（P.3　$p \to q$ の否定）

$p \to q$

すべての p は（必ず）q になる

p を満たしていれば q を満たす

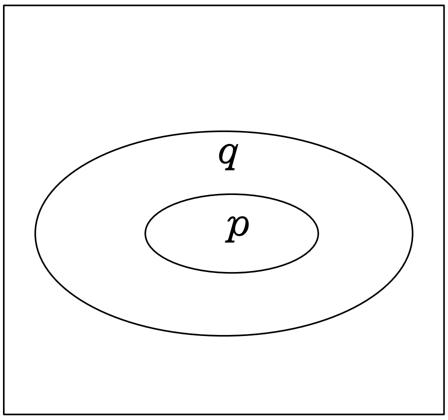
p を満たしていて q でないものはない

$x \in p$ ならば $x \in q$

$x \in p$ かつ $x \notin q$ となるものは存在しない（$=\varnothing$）

$\neg p \vee q$　←　下の否定から考えるとこうなる。

→



$\neg(p \to q)$

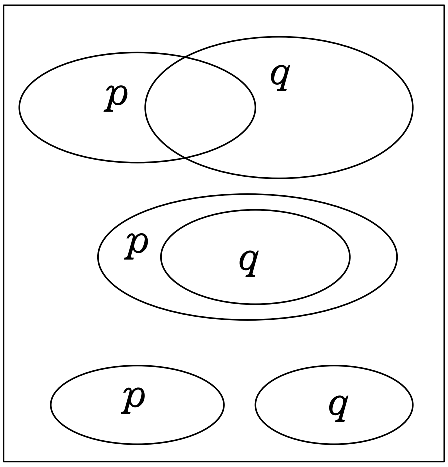
p であるが q ではない（曖昧）

p であってかつ q ではないものがある

$x \in p$ であって $x \notin q$ でないものが存在する（$\neq \varnothing$）

$p \wedge \neg q$

→



（例）「教員ならば教員免許がある。」この命題の真偽を問う。

p 教員	q 教員免許がある	$p \to q$ （教員）ならば（教員免許がある）
真	真	真　…　A
真	偽	偽　…　B
偽	真	真　…　C
偽	偽	真　…　D

小中高の教員に限定するとこの命題は真だが大学教員では真とはいえない。

A：（教員）かつ（免許がある）のだから問題ない。（真）

B：（教員）かつ（免許がない）のだから問題ある。（偽）

C：（教員でない）かつ（免許がある）のだから問題ない。（真）

D：（教員でない）かつ（免許がない）のだから問題ない。（真）

（P.8　定理1）

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i^{c}\right)^{c} = \bigcap_{i\in I} X_i^{cc} = \bigcap_{i\in I} X_i \;\rightarrow\; \bigcup_{i\in I} X_i^{c} = \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)^{c}$$

しかし直接証明してみる。

$$x \in \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)^{c} \;\leftrightarrow\; \neg\left(x \in \bigcap_{i\in I} X_i\right)$$

$$\leftrightarrow\; \neg[\,\forall i \in I\,(x \in X_i)\,] \;\leftrightarrow\; \exists i \in I\,\neg(x \in X_i) \;\leftrightarrow\; \exists i \in I(x \in X_i^{c})$$

$$\leftrightarrow\; x \in \bigcup_{i\in I} X_i^{c}$$

（P.10　定理2）

(b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

（証）X の元 x に対し

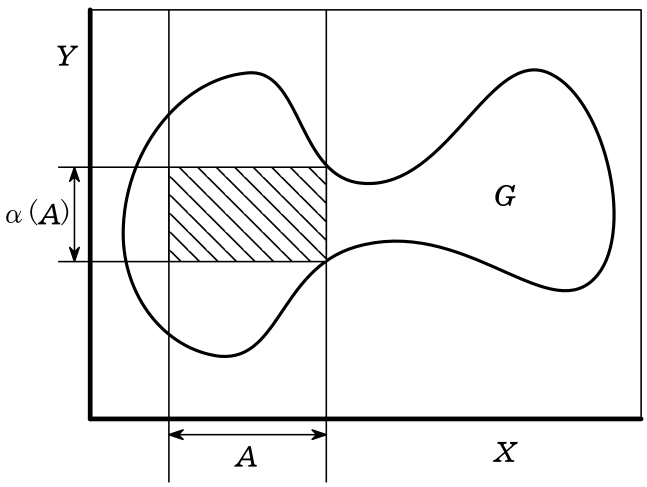
$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in J} B_j\right) \;\leftrightarrow\; f(x) \in \bigcup_{i\in J} B_j \;\leftrightarrow\; \exists j \in J\,(\,f(x) \in B_j\,)$$

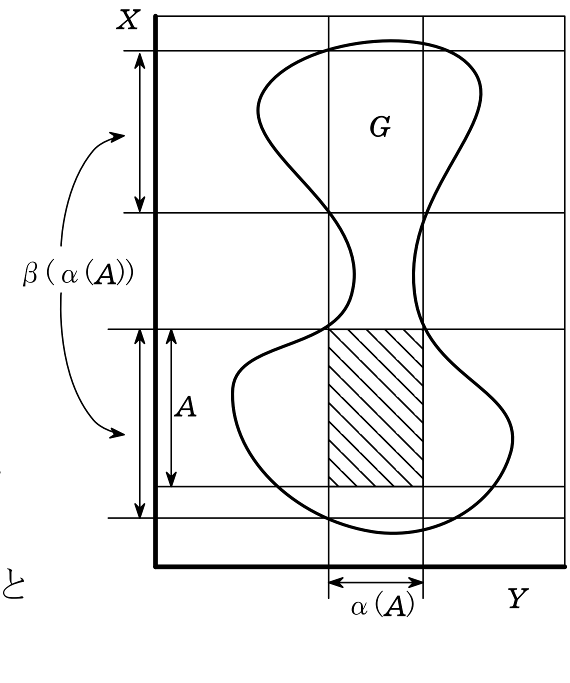
$$\leftrightarrow\; \exists j \in J\,(\,x \in f^{-1}(B_j)\,) \;\leftrightarrow\; \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

（P.16　$\boldsymbol{ER}$3）

$$a - b = kn \;,\; b - c = \ell n \;\rightarrow\; a - c = n(k + \ell)$$

（P.18　ガロア対応）





$\alpha(A)$ は A のすべての元 x に対して xRy となるような Y の元 y 全体がつくる部分集合

（具体的な例）

(a)

Xを日本人、Yをアメリカ人とする。Xの a , b , c 3人(A)すべてが会話をしたことがあるアメリカ人は、すべてで e , f , g , h 4人（$\alpha(A)$）とする。

ところが、A にまたあらたに d さんが加われば（$A' = \{a, b, c, d\}$）、d さんが E , F , G , H の4人と会話をしたことがあるかは、以下はあっても多くなることはない。 $A \subset A' \rightarrow \alpha(A) \supset \alpha(A')$

(b)

アメリカ人の e , f , g , h 全員（$\alpha(A)$）が会話をしたことがある日本人は a , b , c 以外にもいるかもしれない。それを $\beta(\alpha(A))$とすれば $\beta(\alpha(A)) \supset A$

(c)

(b)の日本人を a , b , c , i （$\beta(\alpha(A))$）とすれば、アメリカ人の d , f , g , h 全員と会話したことになる。しかし、それ以上はいないはずである。なぜなら a , b , c の3人は d , f , g , h 以外と会話をしていないからである。つまり、

$\alpha(\beta(\alpha(A))) = \alpha(A)$

（補題）$f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ を写像とする。$f \circ g = 1_Y$ ， $g \circ f = 1_X$ ならば f , g はともに全単射であり、互いに他の逆写像である。

（証）$f \circ g = 1_Y$ とする。任意の $y \in Y$ に対し $g(y) = x$ とすれば

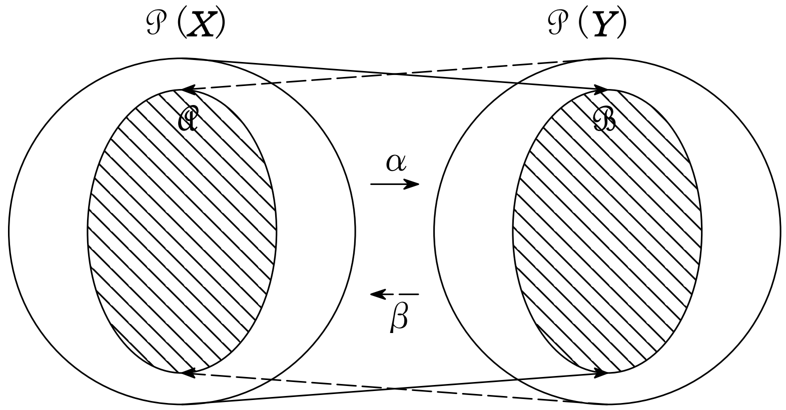
$f(x) = f(g(y)) = y$ となる。よって f は全射である。

次に Y の元 y_1 , y_2 に対し、$g(y_1) = g(y_2)$ とすれば

$f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_1 = y_2$ となる。よって g は単射である。

また、$g \circ f = 1_X$ から同様に、g が全射となり、f が単射となるので f , g はともに全単射となる。$f \circ g = 1_Y$ ， $g \circ f = 1_X$ であることから f , g は互いに他の逆写像となる。

（P.20　定理4）



任意の $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し

$\alpha(A) \in \mathcal{B}$ である。

なぜなら

$\alpha(\beta(\alpha(A))) = \alpha(A)$

なので $\alpha(A)$ は Y の

中の R 閉集合である。

よって $\alpha(A) \in \mathcal{B}$

同様に、任意の $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し $\alpha(A) \in \mathcal{B}$ である。

また補題2から、任意の $A \in \mathcal{A}$ 、任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し

$\beta(\alpha(A)) = 1_{\mathcal{A}}(A) = A$, $\alpha(\beta(B)) = 1_{\mathcal{B}}(B) = B$

であるので、上の補題から α , β は全単射となり、互いに他の逆写像となる。

（P.24　命題3）

$y \neq y'$ ならば $A_y \cap A_{y'} = \varnothing$ について

もし $A_y \cap A_{y'} \neq \varnothing$ ならば $x \in A_y \cap A_{y'}$ とすれば $f(x) = y$, $f(x) = y'$ である

$y = y'$ となり矛盾する。

（P.24　定理1’）

X , Y がたかだか可算な集合ならば、$X \times Y$ はたかだか可算な集合である。

（証）両方が有限集合であれば、$X \times Y$ が有限集合であることは明らかである。

両方が可算集合の場合が定理1の結果である。

そこで、どちらかが有限である場合を考えることにする。ここでは X を有限とする。

Z^+ の有限部分集合を $A = \{1, 2, 3, \cdots, k\}$ とすると、

全単射 $f : A \to X$, $g : Z^+ \to Y$が存在する。

定理1の証明と同様に $A \times Z^+$ が可算集合であることを示せばよい。しかし、

$A \times Z^+$ は $Z^+ \times Z^+$ の部分集合なので、命題1から可算集合である。

（P.25　系）

① I が有限集合で、どの X_i も可算であるとする。

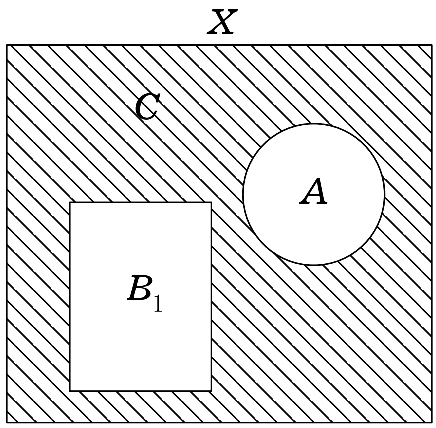
上の証明とおなじように $A = \{1, 2, 3, \cdots, k\}$ とし、定理2の証明の $(m, n) \in A\times Z^+$ に $U = \bigcup_{i\in I} X_i$ の $x_{m,n}$ を対応させる写像は全射になるので、定理1’から U は可算となる。

② I が有限集合で、どの X_i も有限であるとすれば、U は有限集合であることは明らかである。

③ I が可算集合で、どの X_i も有限であるとすれば、U は必ずしも可算ではない。なぜなら、すべての X_i が等しければ、その可算個の和集合は有限となるからである。

④ I が可算集合で、どれか1つの X_i が可算であるとする。$B = \bigcup_{j\neq i, j\in I} X_j$ はたかだか可算である。よって、$X_i \cup B$ は B が可算であれば ① から可算であり、B が有限であれば可算であることは明らかであろう。

（P.27　命題5）



$X_1 = X - A$ ， $B = A \cup B_1$ ， $B_1 \cap A = \varnothing$

$C = X_1 - B_1 = X - A - B_1$

よって

$X = B \cup C$ ， $X_1 = B_1 \cup C$ ， $B_1 \cap C = \varnothing$

そこで $f : X_1 \to X$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \in B_1 \text{ のとき} \\ x & , x \in C \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。まずは全射であることを示す。$X = B \cup C$ であるので直和であるから任意の $y \in X = B \cup C$ に対し、$y \in B$ ならば g が全単射であることから $g(x) = y$ となる B_1 の元 x が存在する。そのとき $f(x) = g(x)$ なので $f(x) = y$ となる元 x が X_1 の中に存在することになる。$y \in C$ ならば $f(y) = y$ となる C の元、つまり X の元が存在する。ゆえに f は全射である。

次に、任意の X_1 の元 x_1, x_2（$x_1 \neq x_2$）に対し、両方とも B_1 か C のどちらか

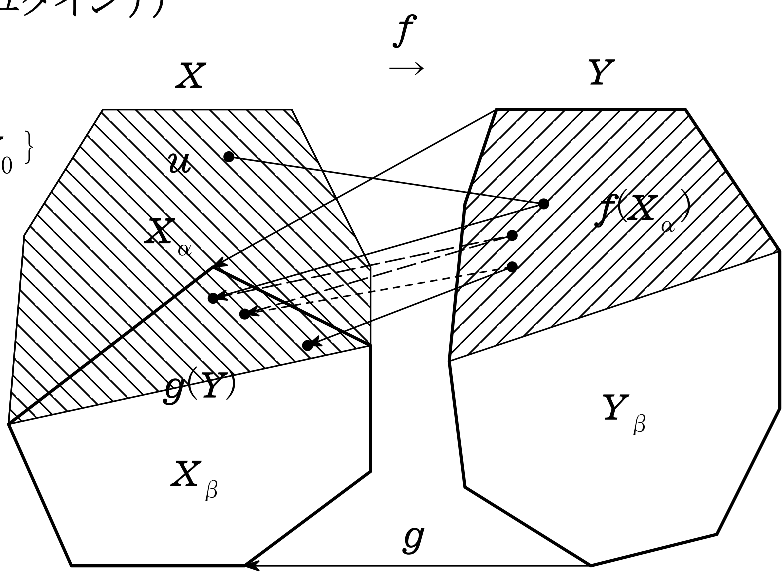
に含まれているとすれば $f(x_1) \neq f(x_2)$ である。

別々に含まれている場合 (仮に $x_1 \in B_1$, $x_2 \in C$ とする)

$f(x_1) = g(x_1) \in B$, $f(x_2) = x_2 \in C$ なので　$B \cap C = \varnothing$ であることから $f(x_1) \neq f(x_2)$ となることはありえない。よって f は単射である。

(b) の $X \cap A = \varnothing$ と仮定してよいことの理由は、仮に $X \cap A = B \neq \varnothing$ とする。
$X \cap (A-B) = \varnothing$ なので (b) の証明から $X \cup (A-B) \sim X$ となる。
$(A-B) \cup B = A$ なので　$X \cup (A-B) \cup B \sim X \cup B \to X \cup A \sim X$ となる。

（P.30　定理４（ベルンシュタイン））



$u \in X - g(Y) = X_0$

$X_\alpha = \{ u , \underset{n < +\infty}{(g\circ f)^n(u)} \mid u \in X_0 \}$

$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$

$f(X_\alpha) = Y_\alpha \cap Y_\beta = \varnothing$

① $y \in Y_\beta \to g(y) \in X_\beta$
もし $g(y) \in X_\alpha$ ならば
ある $u \in X_0$ によって
$g(y) = (g\circ f)^n(u)$ （ $n \geqq 1$, $g(y) \notin X_0$ なので $g(y) = u$ はありえない。）
と書かれ、$g(y) = g\circ f\circ(g\circ f)^{n-1}(u) = g(f\circ(g\circ f)^{n-1}(u))$ であるから、g が単射であることから $y = f\circ(g\circ f)^{n-1}(u)$ となる。よって $y \in f(X_\alpha) = Y_\alpha$ となり矛盾する。
よって $g(Y_\beta) \subset X_\beta$

逆に $x \in X_\beta$ ならば、$x \in X_0$ であるから、$x = g(y)$ となる $y \in Y$ が存在するがこの y は Y_β の元である。もし、$y \in Y_\alpha = f(X_\alpha)$ ならば、$g(y) \in g\circ f(X_\alpha)$ となり $g(y) \in X_\alpha$ となってしまうからである。つまり、$x = g(y) \in g(Y_\beta)$ となる。
よって $g(Y_\beta) \supset X_\beta$

①、② から $g(Y_\beta) = X_\beta$

③ $F : X \to Y$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in X_\alpha \text{ のとき} \\ g^{-1}(x) & , \quad x \in X_\beta \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すれば F は X から Y への全単射である。

（証：全射）

$y \in Y_\alpha$ ならば f は全単射なので $f(x) = y$ となる X_α の元 x が存在する。

よって　$x \in X_\alpha \subset X$ なので $F(x) = f(x) = y$ となる X の元 x が存在する。

$y \in Y_\beta$ ならば g^{-1} は全単射なので $g^{-1}(x) = y$ となる X_β の元 x が存在する。

よって $x \in X_\beta \subset X$ なので $F(x) = g^{-1}(x) = y$ となる X の元 x が存在する。

（証：単射）$x_1 \in X_\alpha$, $x_2 \in X_\beta$ の場合のみにする。当然 $x_1 \neq x_2$ である。

$F(x_1) \in Y_\alpha$, $F(x_2) = g^{-1}(x_2) \in Y_\beta$ よって $Y_\alpha \cap Y_\beta = \varnothing$ から $F(x_1) \neq F(x_2)$

（P.33　定理6）

$$c(A) = \sum_{\alpha \in A} \frac{1}{10^\alpha} = \frac{1}{10^{\alpha_1}} + \frac{1}{10^{\alpha_2}} + \frac{1}{10^{\alpha_3}} + \cdots$$

Z^+ の部分集合 $A = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \cdots \}$ ($a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$) であるので、$c(A)$ の最大値は A が $\{ 1 , 2 , 3 , \cdots \}$ のときである。そのときの $c(A) = 0.111111\cdots = \frac{1}{9}$

（P.33　補題）

$f : X \to Y$ は全単射なので、X の部分集合 A , B に対し、$f(A) = f(B)$ ならば $A = B$ なので、$\varnothing \to \varnothing$ を対応させるという約束のもとで $\mathcal{P}(X)$ から $\mathcal{P}(Y)$ への写像を定義すれば全単射となる。

（P.34　補題）

$f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ を全単射とすれば $h(x , y) = (f(x) , g(y))$ とすれば $h : X \times Y \to X' \times Y'$ は全単射となる。

（証：全射）任意の (x' , y') $\in X' \times Y'$ に対し $f(x) = x'$, $g(y) = y'$ となる $x \in X$, $y \in Y$ が存在するので、(x , y) を $X \times Y$ の元とすればよい。

（証：単射） $h(x_1, y_1) = (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2)) = h(x_2, y_2)$ ならば $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ なので $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ である。

（P.34　定理7）

$\boldsymbol{E}_1 \cup \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{Z}^+$, $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \varnothing$ なので $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_1^c$

ド・モルガンの法則から

$\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E}_1) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E}_1^c) = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{E}_1 \cup \boldsymbol{E}_1^c) = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{Z}^+ = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}$ に $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ を対応させる $\wp(\boldsymbol{Z}^+)$ から $\wp(\boldsymbol{E}_1) \times \wp(\boldsymbol{E}_2)$ への写像は全射であることは間違いない。

また、$(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)$ ならば $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}_2$ なので $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ となり、単射である。

P.33 の補題から

$\boldsymbol{E}_1 \sim \boldsymbol{Z}^+ \rightarrow \wp(\boldsymbol{E}_1) \sim \wp(\boldsymbol{Z}^+)$

$\boldsymbol{E}_2 \sim \boldsymbol{Z}^+ \rightarrow \wp(\boldsymbol{E}_2) \sim \wp(\boldsymbol{Z}^+)$

P.34 の補題から

$\wp(\boldsymbol{E}_1) \times \wp(\boldsymbol{E}_2) \sim \wp(\boldsymbol{Z}^+) \times \wp(\boldsymbol{Z}^+)$

（P.38　選出公理）

「空でない集合から成る集合族が任意に与えられたとき、それらの集合からそれぞれ1つの元をいっせいに選出することができる。」

ここでの集合は数の集合だけではない。たとえば2023年10月12日9:00に各国から一人選手したいとする。仮に、「身長170㎝の人」と選出の基準を決めたらどうだろうか。国によっては一人以上いる国もあれば一人もいない国もあるかもしれない。これではだめである。「一番身長の低い人」としたらどうだろう。しかし、同じ身長の人が二人以上いる可能性があるのでこれもだめである。必ず一人であって0人でもいけない。自分が世界のリーダーだったとして、各国のリーダーにどのような基準を示したらよいだろうか。勝手に決めて出してくれではだめである。

そこで考えられる方法として、各国の人口は有限であるから、あらかじめ全国民に番号を割り振ってもらい、1番の人とすればよいかもしれない。リーダーがどの国

も一人しかいなければリーダーに出てもらえばよいが、紛争中でリーダーが決まっていない国があればますますやっかいである。

国民の数は有限、国の数も有限であるのにもかかわらず、何のトラブルなく選び出すのは大変である。

さてこの選出公理は、まず集合族の元であるそれぞれの集合が無限集合であって、集合族が無限集合でも可能であるとしている。本当に可能であるのか疑問である。「勝手に」が許されるのならよいが、$f : R \to R$ を定義するのに x に対して勝手に y を選ぶのでは x と y の間の関係が見つからないのと同じで、事前に y は決まっていなければならないのである。コンピュータに乱数発生の関数があるが、コンピュータはそこでサイコロを毎回振るのではなく、無理数を使って発生させているようだ。つまり、プログラマーにとっては、次に何が出るか予測可能であるということだ。

選出公理 集合族 $(X_i)_{i \in I}$ において、すべての $i \in I$ に対し $X_i \neq \varnothing$ ならば $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$ である。 すなわち、I から $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ への写像 f で、I のすべての元 i に対して $f(i) \in X_i$ なるものが存在する。そして、その f を選択関数という。

I が有限集合の場合、そのような選出が可能であると言い切っている。もし可能でなければ積集合を定義できないし多変数の関数も定義できないことになる。
有限集合の場合は可能であるとして、帰納法を使えば、任意の自然数 n に対して $\prod_{i=1,2,\cdots,n} X_i \neq \varnothing$ となる。しかし I が無限集合の場合は帰納法では証明できない。また、I の濃度が $\aleph$ であれば益々難しくなってくる。そのあたりが一番の問題なのだろう。

選出公理を認めれば次の $a)$, $b)$ も言える。

$a)$ A , B を2つの集合、F を A から $\mathscr{P}(B)$ への写像とし、すべての $x \in A$ に対して $F(x) \neq \varnothing$ とする。そのとき、A から B への写像 f で
$\forall x \in X \,(\, f(x) \in F(x)\,)$
となるものが存在する。

b) 空でない集合 M から成る集合系（集合の集合）$\mathfrak{M}$ が与えられたとする。そのとき、写像 $\Phi: \mathfrak{M} \to \cup\mathfrak{M}$ で $\forall M \in \mathfrak{M}$（$\Phi(M) \in M$）を満たすものが存在する。

（証：選出公理 $\Rightarrow a$)）

$A = I$ とし、$i \in I$ に対して $F(i) \in \mathcal{P}(B)$ であり、すべての i に対して $F(i) \neq \varnothing$ であるから、選出公理から A から $\bigcup_{i \in X} F(i)$ への写像 f で A のすべての i に対して $f(i) \in F(i)$ となるものが存在する。$\bigcup_{i \in X} F(i) \subset \cup\mathcal{P}(B) = B$ なので、f は B への写像となる。

（証：選出公理 $\Rightarrow b$)）

$\mathfrak{M}$ を I と考えれば、任意の $M \in \mathfrak{M}$ に対して $M \neq \varnothing$ なので $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = \cup\mathfrak{M}$ なので、選出公理から $\mathfrak{M}$ から $\cup\mathfrak{M}$ への写像 f で $\forall M \in \mathfrak{M}$ で $f(M) \in M$ となるものが存在する。その f を Φ とすればよい。

b) $\Rightarrow$ 選出公理は証明できるようなので、選出公理と b) は同値のようだ。
詳しくは、（数学の基礎　齋藤正彦 著　東大出版 P.16 参照）

（選手公理からわかること）

すべての $i \in I$ に対し $f(i) \in X_i$ することができるので $Y_i = X_i - \{f(i)\}$ とすればすべての $i \in I$ に対し $g(i) \in Y_i$ となる g が存在するはずである。これを繰り返していけば、各 X_i が無限集合である限り永遠に続けることができるはずである。

（P.39　ツォルンの補題）

A を一つの順序集合として、その任意の空でない全順序部分集合が A の中に上界（上限）をもつとき、A は帰納的順序集合（強い意味で帰納的）とよぶ。
また、a を A の元とし、もし $a < x$ をみたす A の元 x が存在しなければ、a を A の極大元とよぶ。

（上界があって上限がない例）Q を全体集合として $\{ x \mid x \in Q, 0 < x, x^2 < 2 \}$

定理1（ツォルンの補題） 帰納的順序集合は（少なくとも1つ）極大元をもつ。

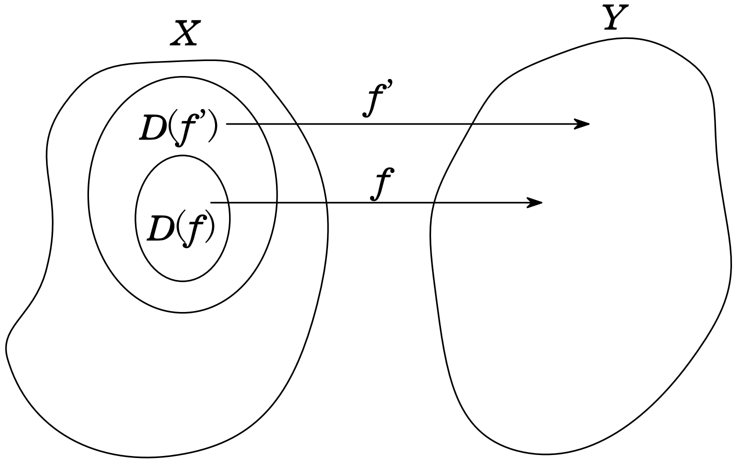
（P.40　定理2）

$A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$ なので、$A \cup B$ は A , B を含む最小の集合である。よって P.18 例8から B^* は $\mathscr{B}$ における $\mathscr{C}$ の上限となる。

$w \notin B$ ならば $B \cup \{w\}$ は $\mathscr{B}$ に属していない。つまり $B \cup \{w\}$ は一次独立ではないから、ある有限個の異なる元を選べば一次従属になる。

（P.42　濃度比較可能定理）

$D(f) \subset D(f') \rightarrow f \leqq f'$



$\mathscr{G}$ を $\mathscr{F}$ の任意の空でない全順序部分集合とすれば、任意の f , $f' \in \mathscr{G}$ に対して $f \leqq f'$ であるか $f \geqq f'$ のどちらかである。つまり、$D(f) \subset D(f')$ であるかその逆である。

（注1）$S = \displaystyle\bigcup_{f \in \mathscr{G}} D(f)$ から、定義域の和集合なので S は X の部分集合である。

（注2）P.18 例8から、$f^*(x)$ の定義域である S が最小の上界であるから、$f^* \in \mathscr{F}$ であり、f^* は $\mathscr{F}$ における $\mathscr{G}$ の上限である。

（注3）$A \neq X$ かつ $B \neq Y$ の否定は $A = X$ であるか $B = Y$

$\neg((A \neq X) \wedge (B \neq Y)) \leftrightarrow (A = X) \vee (B = Y)$

（注4）$B = Y$ ならば ϕ は $A \rightarrow Y$ への全単射になるので逆写像が存在し、Y から A への全単射となる。つまり、その写像は Y から X への単射ということになる。

（P.43　増加写像）

A を順序集合とし、f を A から A への写像とする。すべての $x \in A$ に対して $x \leqq f(x)$ が成り立てば、f を増加写像であるという。

そのような写像は存在する。たとえば恒等写像はその条件を満たす。

（P.44　補題1）

（注1）A_1 の任意の全順序部分集合 T をとれば、任意の $x \in T$ は $a \leqq x$ である。また T は A の全順序部分集合であるので A の中に $sup\ T$ をもつ。$sup\ T$ は A の元であって $a \leqq sup\ T$ なので $sup\ T \in A_1$ 、よって A_1 は強い意味で帰納的である。

（注2）すべての認容部分集合の共通部分 M は認容部分集合である。

（ｉ）すべての認容部分集合には a が含まれているので $a \in M$

証明の前に P.21 問3の証明が必要である。

① $f : X \to Y$ とし、$(A_i)_{i\in I}$ を X の部分集合族とすれば、$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

（証）帰納法が使えないことを注意しておく。

Y の元 y に対し

$y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i) \leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i\ (\ y = f(x)\ )$

$\leftrightarrow\ \ \exists x \forall i \in I\ (\ x \in A_i\ ,\ y = f(x)\ )$

つまり、すべての i について $x \in A_i$ であって $y = f(x)$ となる共通の x が存在する。各 $i \in I$ に対し $x_i \in A_i$ で $y = f(x_i)$ となる元は最低 x はあるもののそれ以外にあるかもしれないので、すべての $i \in I$ に対して $y \in f(A_i)$ となる。よって $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

② $A_i \subset B_i\ \to \bigcap A_i \subset \bigcap B_i$

（証）$\bigcap A_i \subset A_i \subset B_i$ よって $\bigcap A_i \subset \bigcap B_i$

（ⅱ）M_i を容認集合、$M = \bigcap M_i$ とすれば、上の②から

$f(M) = f(\bigcap M_i) \subset \bigcap f(M_i) \subset \bigcap M_i \subset M$

（ⅲ）M の任意の全順序部分集合を T とすれば、すべての i に対し $T \subset M_i$ である。また、すべての M_i において全順序部分集合であるので、各 M_i において

$sup\ T\ \in M_i$（$sup\ T$ は T の A における上限なので T 固有のものである）

よって $sup\ T \in \cap M_i = M$ である。

（注3）M_c が認容集合であることが証明できれば $M_c \subset M$ なので $M_c = M$

（ⅰ）c は M の元であるから $c \in A$ である。よって $a \leqq c$ 、また $a \in M$ だから $a \in M_c$ である。

（ⅱ）M は認容集合なので $f(x) \in M$ である。

$x \leqq c$　　ならば　$f(x) \leqq c$

$f(c) \leqq x$　ならば　$f(c) \leqq f(x)$

つまり「$f(x) \in M$ であり $f(x) \leqq c$ または $f(c) \leqq f(x)$」なので $f(x) \in M_c$

（ⅲ）T を M_c の空ではない全順序部分集合とし、$sup\ T \in M_c$ となることを証明すればよい。まず $T \subset M_c \subset M$ である。M は認容集合なので $sup\ T \in M$ である。よって、$sup\ T \leqq c$　または　$f(c) \leqq sup\ T$ であることを示せばよい。

すべての $x \in T$ に対して $x \leqq c$ ならば c は T の上界となる。よって最小上界であることから $sup\ T \leqq c$

ある $x \in T$ に対して $f(c) \leqq x$ ならば $f(c) \leqq x \leqq sup\ T$

よって $sup\ T \in M_c$ である。

（確認のため：すべての $x \in T$ に対して $f(c) \leqq x$ ならば $f(c) \leqq x \leqq sup\ T$

よって $sup\ T \in M_c$ である。）

（注4）$E = M$ の証明

（ⅰ）$p \to q$（p が偽のときは q の真偽を問わずこの命題は真）

$\varnothing \in A$ なので　$x \in \varnothing$ ならば $x \in A$　という命題は常に真

（ⅱ）任意の $x \in M$ に対して、$x \leqq c$　または　$f(c) \leqq x$　なので

$f(c) \leqq x$ でなければ、言い換えれば $x < f(c)$ ならば $x \leqq c$ でなければならない。また $x \leqq c$ ならば $f(x) \leqq f(c)$ なので、M は認容集合であるから $f(c) \in M$ で「$x < f(c)$　ならば　$f(x) \leqq f(c)$」　よって $f(x)$ は ε 元ということになる。

（ⅲ）ε 元は M の任意の元と比較可能であることについては、$M = M_c$ がわかっているので、任意の ε 元 d に対して、任意の $x \in M = M_d$ をとれば
$x \leqq d$ または $f(d) \leqq x$ である。f は増加写像なので $d \leqq f(d) \leqq x$ となり
$x \leqq d$ または $d \leqq x$ となるから、比較可能であることになる。

$sup\ T = b$ が条件 (*) を満たすことを示す。$T \subset M$ であることに注意して
「$x \in M$, $x < b$ ならば $f(x) \leqq b$」であることを示せばよいことになる。

すべての $c \in T$ に対して $c \leqq x$ ではあり得ない。したがって $x < c$ となる c が存在する。つまり $x < c \leqq b$ となる $c \in T$ が存在する。すると、c は ε 元だから
$x < c$ ならば $f(x) \leqq c$ であるから $f(x) \leqq c \leqq b$ となり
「$x < b$ ならば $f(x) \leqq b$ 」となる。よって b は ε 元である。

（P.46　補題2）

A が極大元 x をもてば、A の元 x で $x < y$ を満たす A の元 y が存在しないので、極大元を持たないのであれば、任意の $x \in A$ に対し $x < y$ となる A の元 y が存在することになる。したがって、各 $A_x \neq \varnothing \Rightarrow \prod_{x \in A} A_x \neq \varnothing$（選出公理）

A から $\bigcup_{x \in A} A_x$ への写像 Φ で、その各 $x \in A$ に対して $\Phi(x) \in A_x$ となるものが少なくとも1つ存在する。

したがって、$f(x) = \Phi(x)$ とすれば、$\bigcup_{x \in A} A_x \subset A$ なので f は A から A への写像であり、$f(x) \in A_x = \{ y \in A \mid x < y \}$ であるから $x < f(x)$ となる。

f は増加関数なので補題1の結論に矛盾することになる。

（P.46　補題3）

T は A の中に上界 a を有する。この a は A の極大元である。なぜなら、もし
$a < b$ なる $b \in A$ が存在するならば、T は全順序集合の極大元であるから、
$x \in T$ ならば $x < a$ である。よって $b \notin T$ である。$T \subsetneq T \cup \{b\}$ であって、全順序集合であるが、これは矛盾する。

（P.50　例2）

$x = y = z$ → $d(x, z) = 0$, $d(x, y) = 0$, $d(y, z) = 0$ → $0 \leqq 0+0$

$x = y \neq z$ → $d(x, z) = 1$, $d(x, y) = 0$, $d(y, z) = 1$ → $1 \leqq 0+1$

$x = z \neq y$ → $d(x, z) = 0$, $d(x, y) = 1$, $d(y, z) = 1$ → $0 \leqq 1+1$

$y = z \neq x$ → $d(x, z) = 0$, $d(x, y) = 1$, $d(y, z) = 0$ → $0 \leqq 1+0$

$y \neq z \neq x$ → $d(x, z) = 1$, $d(x, y) = 1$, $d(y, z) = 1$ → $1 \leqq 1+1$

（P.53　定義　開集合）

$a \in A^i$ ならば $B(a\,;r) \subset A$ となる $r > 0$ が存在するので、$a \in B(a\,;r) \subset A$ から $A^i \subset A$、つまり $A \subset A^i$ であることを示せば $A = A^i$ となって、A が開集合あることを証明できることになる。

（P.53　命題1）

この証明では、任意の $b \in A = B(a\,;r)$ に対して $B(b\,;\rho) \subset A$ となる ρ が存在することがわかったので $b \in A^i$ であることを示したことになる。

（P.54　命題2　$(A^i)^i = A^i$）

$A^i \subset (A^i)^i$ であることを示せばよい。

$B(a\,;r)$ の任意の点 b は $b \in A^i$ となるので $B(a\,;r) \subset A^i$ となる r が存在することになるので、任意の $a \in A^i$ からはじまって a は A^i の内点であり、$a \in (A^i)^i$ であることが示せたことになる。

（P.55　$\varnothing^i = \varnothing$, $X^i = X$）

$\varnothing^i = \varnothing$ は明らかである。$X = X^i \cup X^f \cup X^e$ であって、$X^f = X^e = \varnothing$ なので $X = X^i$

（P.56　定理3の後半の証明）

$(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$　（ド・モルガンの法則）

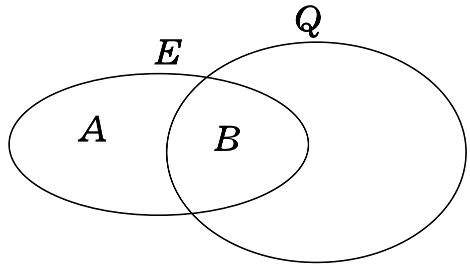
定理1からすべての A_i が閉集合ならば、A_i^c はすべて開集合になるので、右辺は上の証明から開集合である。つまり、$(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$ は開集合なので、その補集合である $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ は閉集合となる。

（P.57　命題4）

$A = \bigcup_{a \in A} B(a\,;r(a))$

$A \supset \bigcup_{a \in A} B(a\,;r(a))$ は明らかである。任意の $x \in A$ に対し $B(x\,;r(x)) \subset A$ となる $r(x)$ が存在するので $x \in B(x\,;r(x)) \subset \bigcup_{a \in A} B(a\,;r(a))$

（P.59　定理4）



$B = E - A$

$B = E \cap Q$

$P = X - Q = Q^c$

このとき $A = P \cap E$ である。

（証）

まず $B \cap A = \varnothing$ であるから $E \cap Q \cap A = \varnothing$ であり $Q \cap A = \varnothing$ となる。よって任意の $x \in A$ に対して $x \in Q^c = P$, $A \subset P$

$P \cap E = P \cap (A \cup B) = (P \cap A) \cup (P \cap B) = (P \cap A) \cup (P \cap E \cap Q) = A \cup \varnothing = A$

(b) の後半

$A = P \cap E$ となるような X の閉集合 P が存在するとする。

$Q = X - P$ は X における開集合なので、(a) から $B = Q \cap E$ とおけば、B は E における開集合となる。つまり $E - B$ は E における閉集合である。

最後に $E - B = A$ になることを示せばよい。

$E - B = E - (Q \cap E) = E \cap (Q \cap E)^c = E \cap (Q^c \cup E^c) = E \cap (P \cup E^c)$

$= (E \cap P) \cup (E \cap E^c) = A \cup \varnothing = A$

なぜ A が E の閉集合であれば、$E - A$ は E の開集合であるかは、もう少し定義が必要だと思う。

（触点と集積点の違い）

● A を X の部分集合とする。X の点 x について、どんな正の実数 ε に対しても

$B(x\,;\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$

が成り立つとき、x を A の触点という。

X の点 x が $A - \{x\}$ の触点であるとき、x は A の集積点という。これは

任意の正の実数 ε に対して

$B(x\,;\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$

が成り立つことをいう。つまり、$B(x\,;\varepsilon)$ が x 以外の A の点を含むことをいう。

(例) R の有限部分集合 A を $\{a\,,b\}$ とすれば、$a\,,b$ は A の触点であるが集積点ではない。$a\,,b$ は A の孤立点である。

(P.62 f が全単射で連続であっも f^{-1} は必ずしも連続ではない)

R に単純距離を導入する。ある実数 x に対して $\{x\}$ という集合を考えるとする。このとき、x の近傍 $B(x\,;\frac{1}{2})$ は $\{x\}$ である。なぜなら 任意の $y \in B(x\,;\frac{1}{2})$ に対して $d(x\,,y) < \frac{1}{2}$ となる点 y は $x = y$ の場合しかあり得ない。したがって $B(x\,;\frac{1}{2}) \subset \{x\}$ となり、$\{x\}$ は開集合であることになる。つまり、R に単純距離を導入した距離空間を R^* とすれば、任意個の開集合の和集合は開集合なので、R^* のすべての部分集合が開集合であることになる。つまり、この場合の位相は $\mathcal{P}(R)$ である。$\mathcal{P}(R)$ の元はすべて開集合なのでそれらの補集合は閉集合である。しかしその閉集合も $\mathcal{P}(R)$ の元なので、すべての部分集合は開集合であって閉集合であることになる。(P.65 問題12.1,3) <u>ここでは開集合としておく。</u>

R の任意の開集合 Q に対して $I_R^{-1}(Q) = Q$ は開集合であるから、I_R は R^* から R への連続写像である。逆に R^* の任意の開集合 Q に対して $(I_R^{-1})^{-1}(Q) = Q$ は R の閉集合であることもあるので連続とはいえない。

あまり良い例とはいえない。

(P.70 縮小写像は連続である)

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\rho}$ とすれば、X から任意に1つの点 x_0 をとったとして、$d(x_0\,,x) < \delta$ ならば $d(f(x_0)\,,f(x)) \leqq \rho\, d(x_0\,,x) < \varepsilon$ とすることができる。

(P.71 定理2)

$s = 1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1}$

$\rho s = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^n$

（P.73　コンパクトの定義）

$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda{}' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\boldsymbol{U}_\lambda \cap \boldsymbol{A}) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda) \cap \boldsymbol{A}$

ここで、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ なので

$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda{}' \Rightarrow \boldsymbol{A} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda$

$\boldsymbol{A} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda \Rightarrow \boldsymbol{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda{}'$

$(\boldsymbol{U}_\lambda{}')_{\lambda \in \Lambda}$ を $\boldsymbol{A}$ の任意の開被覆とすれば、$\boldsymbol{X}$ のある開集合 $\boldsymbol{U}_\lambda$ が存在して $\boldsymbol{U}_\lambda{}' = \boldsymbol{U}_\lambda \cap \boldsymbol{A}$ とすることができるので、$\boldsymbol{A} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{U}_\lambda$ とすることができる。したがってコンパクトの定義を Λ の中から適当に有限個とって $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{U}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n}$ とできるとすれば、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_{\lambda_1}{}' \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n}{}'$ となる。

逆に $(\boldsymbol{U}_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{K}}$ を $\boldsymbol{A}$ の任意の開被覆とすれば、$\boldsymbol{U}_\kappa{}' = \boldsymbol{U}_\kappa \cap \boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ における開集合で、$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\kappa \in \mathrm{K}} \boldsymbol{U}_\kappa{}'$ となるので、コンパクトの定義を K の中から適当に有限個とって $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_{\kappa_1}{}' \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\kappa_m}{}'$ とできるとすれば、$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{U}_{\kappa_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\kappa_m}$ となる。

（P.73　定理3）

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n}$ だったとしても $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{X}$ なので $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n} \cup \boldsymbol{V}$ としてもかまわない。このとき $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{U}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n}$ となることについては、任意の $\boldsymbol{A}$ の元 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ なので $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n} \cup \boldsymbol{V}$ である。よって $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{V}$ であるから $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{U}_{\lambda_n}$ とならなければならない。

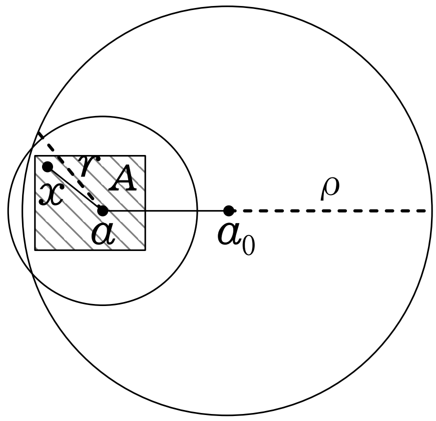
（P.73　有界の定義）

$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$ であって $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$ でもよい。

$\rho = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_0)$ とすれば

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}_0, \rho)$

とできる。



（P.45　補題1の証明について気になっている点）

$A-A=\varnothing$ なので $\varnothing \subset A$ である。この証明が一番納得がいける。これを $a \in E$ に適用すれば、

$a \in M$ である。次に $P=\{x \in M \mid x<a\}$, $Q=\{x \in M \mid f(x) \leqq a\}$ という集合を考える。$x \in P \to x \in Q$ であれば $a \in E$ ということを証明できたことになる。しかし、$P=\varnothing$ なので、$\varnothing \subset Q$ であることから、$x \in \varnothing$ ならば $x \in Q$ である。つまり、$a \in E$ となる。どんな集合でも $\varnothing$ を含むと了解した以上、この論理は正しことになる。

（P.74　命題6）

任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\frac{\sqrt{2}K}{n}<\varepsilon$$

となるように n をとる。

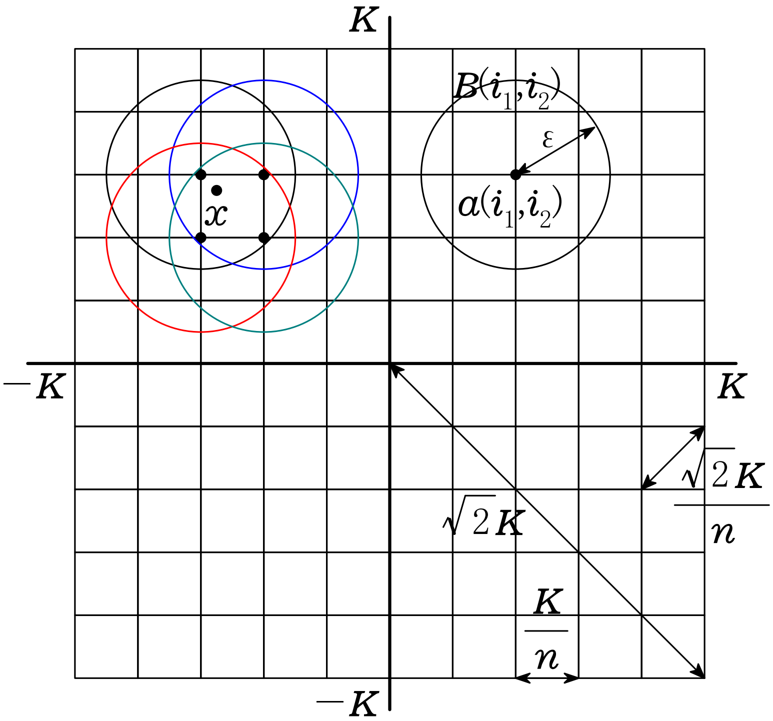
$$a(i_1,i_2)=\left(\frac{i_1K}{n},\frac{i_2K}{n}\right)$$

$$-2n \leqq i_1 \leqq 2n$$
$$-2n \leqq i_2 \leqq 2n$$

なので格子点の数は

$(2n+1)^2$ 個

（右図は $n=5$ としている。）



（P.75　全有界であるがコンパクトでない例）

実数空間 R において、開区間 $A=(-1,1)$ は有界、すなわち全有界である。

$n=2,3,\cdots$ に対して、B_n を区間

$$B_n=\left(-1+\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right)$$

とすれば、$A=\bigcup_{n\in Z^+,n\geqq 2} B_n$ である。しかし、A は B_n $(n\geqq 2)$ の有限個では覆うことができない。$B_2 \subset B_3 \subset \cdots \subset B_n$ であって、$-1+\dfrac{1}{n+1}$, $1-\dfrac{1}{n+1} \in A$ だが、いずれも B_n には含まれない。

（P.76　定理4）

「注意」（ⅱ）は自動的に … は $\varnothing \subset A$ の論理である。

（ⅱ）→（ⅲ）の証明

$(x_n)_{n \in Z^+}$ は X の任意の点列として選ばれているので、この場合は選出公理を必要としない。

（ⅲ）→（ⅳ）の証明

X が全有界であることの証明

X が全有界でないとすれば、「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、半径 ε の有限個の開球で覆うことができる。」の否定であるから、「ある $\varepsilon > 0$ に対し、半径 ε の有限個の開球で覆うことができない。」となる。

x_1 を X の任意の1点とする。

$x_2 \in X - B(x_1, \varepsilon)$, $x_3 \in X - (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$, … と点列 (x_n) を作れば　･･･　であるが、ここでは選出公理が使われていることに注意したい。

（ⅳ）→（ⅰ）の証明

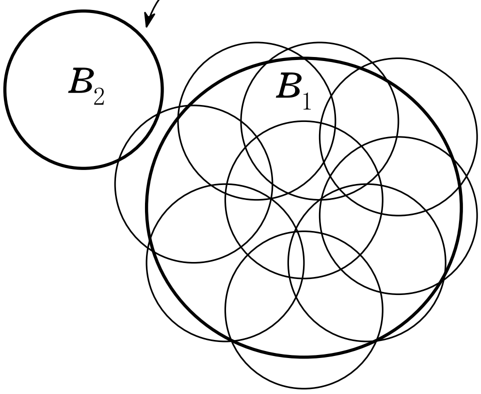
$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の U_λ は開集合であり B_n は開球である。

B_1 は被覆不能な開球である。

次に半径 $\dfrac{1}{2^2}$ の開球を考えた場合、X は全有界であるから、その有限個によって被覆される。当然 B_1 もより少ない開球有限個によって被覆されることになる。ここでもし、これらの有限個の開球がすべて被覆可能ならば B_1 自身被覆可能となるから、これらの開球のうちには必ず被覆不能のものが存在する。そして、その中に B_1 と空でない共通部分をもつものがある。

このような開球による被覆は考えない。

右図のような開球による被覆も考えられるので、$B_2 \cap B_1 = \varnothing$ となるような被覆不能な B_2 があるかかもしれない。しかし、ここでは被覆不能である B_1 の内部に的をしぼっているので共通部分が空でないとしてよい。



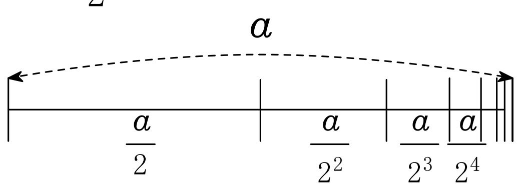
距離空間 X の部分集合 A に対して、X の開集合 U_λ からなる X の部分集合族で、$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を満たすものを開被覆としているが、$A \cap U_\lambda = \varnothing$ となるようなものは考えても意味がない。なぜなら、有限被覆できるかできないかを問題にしているからである。

点列 (x_n) の選び方であるが、B_n の中心としている。B_n は有限個の中から選ばれているので選出公理は関係ないようだが、無限に続けるとなると少し心配である。選出公理をみとめれば問題ない。

● p , q を $p < q$ を満たす2つの自然数とすれば、$\dfrac{1}{2^{p-2}} = a$ としたとき

$$\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p}} + \cdots + \frac{1}{2^{q-2}}$$

$$= a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{q-p}}\right) < a$$



（P.80　系1）

定理4の証明は距離空間 X の部分集合に置きかえても差し支えないので、A がコンパクトならば A は完備かつ全有界である。また全有界ならば有界なので、A は有界閉集合であるといいたいところだが、有界であっても全有界であるとは限らないので、逆を考えての閉集合で止めているのではないかと考えられる。

（P.80　約める ← つづめる）

（P.80　次の定理の前に）

開被覆であるとは、すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ が X の開集合であるとき $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が成り立つことをいう。ここで $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ でもよい。なぜなら、すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \subset X$ であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset X$ である。

（P.80　定理5）

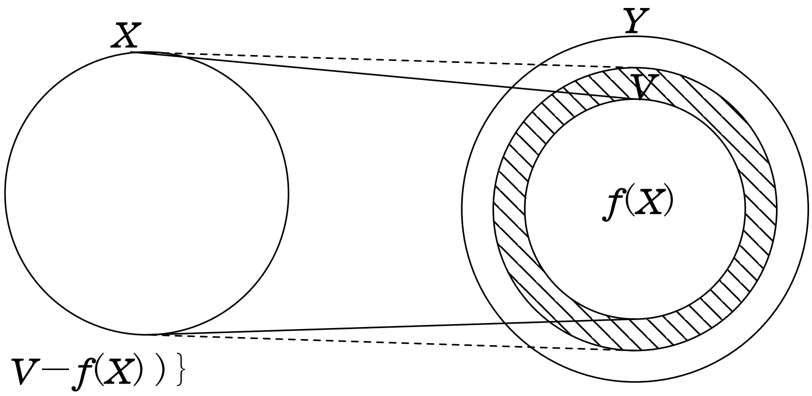
$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$

一般に $A \subset f^{-1}(\,f(A)\,)$ であるが $X = f^{-1}(\,f(X)\,)$ である。なぜなら、$f^{-1}(\,f(X)\,)$

は X の部分集合だからであるから $X \supset f^{-1}(\,f(X)\,)$ よって $X = f^{-1}(\,f(X)\,)$

ここで次ぎのような

場合を考える。



$f(X) \subsetneq V$ の場合

$f^{-1}(V)$

$= \{\, x \in X \mid f(x) \in V \,\}$

$= \{\, x \in X \mid f(x) \in (\, f(X) \cup V - f(X)\,)\,\}$

$= \{\, x \in X \mid f(x) \in f(X) \,\} \cup \{\, x \in X \mid f(x) \in (\, V - f(X)\,)\,\}$

$= \{\, x \in X \mid f(x) \in f(X) \,\} \cup \varnothing$

$= f^{-1}(\,f(X)\,)$

したがって、$X = f^{-1}(\,f(X)\,) = f^{-1}(\,\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\,) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ $\leftarrow$ P.10 定理2 (b)

次に、一般に $f(\,f^{-1}(B)\,) \subset B$ なので

$X = f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\lambda_k})$ としたとき

$f(X) = f(\,f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\lambda_k})\,) = f(\,f^{-1}(\,V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_k}\,)$ $\leftarrow$ (〃)

$\subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_k}$

(注) この定理は X の部分集合 A がコンパクトならば $f(A)$ もコンパクトであるとしていることの方が多い。

(P.81　命題7)

ここでは、f は全単射なので $f^{-1}(\,f(A)\,) = A$

(P.82　命題8)

下限 (inf) の復習

$A \subset R$ に対して $m = inf\, A$ であるための必要十分条件は

1) 任意の $a \in A$ に対し $m \leqq a$

2) $m < x$ となる任意の x に対し、$x > a$ となる $a \in A$ が存在する。

$a \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall r > 0\,;\, B(a\,,\,r) \cap A \neq \varnothing$

A が閉集合ならば $\overline{A} = A$ なので $a \notin A$ ということは $a \in A^e$ なので、ある r が

存在して $B(a\,,r)\cap A=\varnothing$ 、つまり 最大下界だから $d(a\,,A)\geqq r>0$ となる。

（P.83　定理7）

$$\delta=min\left\{\frac{\delta\,(a_1)}{2}\,,\cdots,\frac{\delta\,(a_k)}{2}\right\}$$ なので、任意の $1\leqq i\leqq k$ に対して

$$\delta\leqq\frac{\delta\,(a_i)}{2}$$ よって $$\frac{\delta\,(a_i)}{2}+\delta\ \leqq\ \delta\,(a_i)$$

（P.87　定理1の準備）

中間値性質の復習（上巻 P.97 定理1）

A が中間値性質をもつとは

$s\,,t\in A$ 、$s<t$ のとき、「$s<c<t$ を満たす任意の c は $c\in A$ 」である。

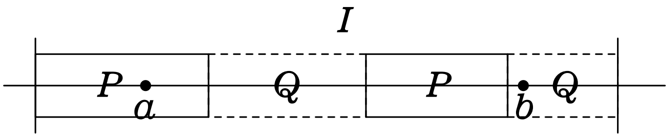
「　」の中を「$s<c<t$ ならば $c\in A$」と書き換えてもよい。「ならば」の定義から $s<c<t$　でありさえすれば必ず $c\in A$ とよめる。これで証明がすっきり理解できる。

（証）A は R の部分集合である。A が上下に有界であるとする。

$a=inf\,A\,,b=sup\,A$ とおけば $A\subset[a\,,b]$ である。

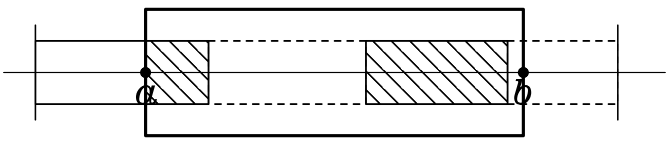
$a<c<b$ ($\forall c\in(a\,,b)$) とすれば、下限、上限の定義から $a<s<c<t<b$ となる $s\,,t\in A$ が存在する。このとき $s<t$ であって $s<c<t$ であるから中間値性質から $c\in A$ とならなければならない。よって $(a\,,b)\subset A$

（P.87　定理1）



この証明であらかじめ想定しなければならないことは右図のように $P\,,Q$ がそれぞれ分断している可能性がある。$P\cup Q=I\,,P\cap Q=\varnothing$ であればよいからである。また、開集合であることから分離した点集合であることもない。

そこで $M=[a\,,b]\cap P$ とすれば上限を考えることによって、左の斜線部は関係ないことになる。



● $c\in P$ ならば $b\in Q$ なので、$c=b$ ならば $c\in P\cap Q=\varnothing$ となり矛盾する。よって、$c<b$ である。

● $P = I \cap U$ (U は R のある開集合) よって、$B(c\ ,\ r) \subset I \cap U$ となる r が存在する。したがって $c < c + \varepsilon < b$ であって $\varepsilon < r$ となるような ε をとれば $c + \varepsilon \in P$ となる。$c + \varepsilon \in M$ なので c が M の上限(≠上界)であることに反する。

同様に、$c \in Q$ ならば $a \in P$ なので、$a = c$ ならば $c \in P \cap Q = \varnothing$ となり矛盾する。よって、$a < c$ である。

$Q = I \cap U$ (V は R のある開集合) よって、$B(c\ ,\ r) \subset I \cap U$ となる r が存在する。したがって $a < c - \varepsilon < c$ であって $\varepsilon < r$ となるような ε をとれば $c - \varepsilon \in Q$ となる。$B(c\ ,\ r) \subset Q$ であるから $(c - \varepsilon\ ,\ c] \subset Q$ である。よって、$P \cap Q = \varnothing$ であるから $(c - \varepsilon\ ,\ c] \cap M = \varnothing$。このことは c が M の上限であることに矛盾する。なぜなら、$x < c$ ならば $x < y$ となる $y \in M$ が存在しなければならないからである。

$\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$ とし、γ を $\alpha < \gamma < \beta$ を満たす任意の実数として、もし $\gamma \notin A$ となるようなものが一つでも存在したとすれば

$P = (-\infty\ ,\ \gamma) \cap A$, $Q = (\gamma\ ,\ +\infty) \cap A$ はそれぞれ $\neq \varnothing$ で A の開集合であり

$A = P \cup Q$ (直和) となる。

なぜなら、$P \cup Q \subset A$ は明らかである。

$P \cap Q = ((-\infty\ ,\ \gamma) \cap A) \cap ((\gamma\ ,\ +\infty) \cap A) = \varnothing \cap A = \varnothing$

また、$x \in A$ に対し、$x \neq \gamma$ なので、$x < \gamma$ ならば $x \in P$, $x > \gamma$ ならば $x \in Q$ となり、$x \in P \cup Q$ となる。よって $A \subset P \cup Q$ 故に $A = P \cup Q$ (直和)

(P.89 定理2)

$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(P' \cup Q') = f^{-1}(P') \cup f^{-1}(Q') = P \cup Q$ ← P.10 定理2 (b)

P が空でないことは $P' \neq \varnothing$ であるから $a \in P'$ とすれば、ある $x \in X$ が存在して $f(x) = a$ である。このとき $f^{-1}(P') = \{x \in X \mid f(x) \in P'\} = P$ としているので $x \in P$ となり、$P \neq \varnothing$ である。

(P.89 命題1)

$A \subset B$, $B = (U \cap B) \cup (V \cap B)$ であるから

$A = A \cap B = \{(U \cap B) \cup (V \cap B)\} \cap A = \{(U \cap B) \cap A\} \cup \{(V \cap B)\} \cap A\}$

$= (U \cap A) \cup (V \cap A)$

$V \cap A = \varnothing$ ならば $A \subset V^c$ で V^c は閉集合であるから、$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であることから $\overline{A} \subset V^c$ となる。したがって $\overline{A} \cap V = \varnothing$ となるが $B \subset \overline{A}$ であったので $B \cap V = \varnothing$ となり仮定に反する。

（P.90　命題2）

$A = P \cup Q$, $A_\lambda \subset A$ から

$A_\lambda = A \cap A_\lambda = \{(U \cap A) \cup (V \cap A)\} \cap A_\lambda$

$= \{(U \cap A) \cap A_\lambda\} \cup \{(V \cap A)\} \cap A_\lambda\} = (U \cap A_\lambda) \cup (V \cap A_\lambda)$

また $D = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset A_\lambda$ だから

$D = D \cap A_\lambda = \{(U \cap A_\lambda) \cup (V \cap A_\lambda)\} \cap D = (U \cap D) \cup (V \cap D)$

（P.91　命題3）

$C_x \subset \overline{C_x}$ そこで $C_x \subset \overline{C_x} \subset \overline{C_x}$ したがって $\overline{C_x}$ は連結である。C_x は x を含む最大の連結部分集合であったので $\overline{C_x} = C_x$ である。

（P.92　P.89の定理2を部分集合に置きかえる）

X , Y を距離空間とし、$f : X \to Y$ を連続写像とする。もし、X の部分集合 A が連結ならば像 $f(A)$ も連結である。

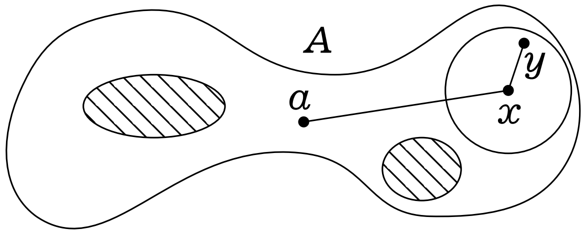
（証）このことを証明するためには、次の定理を証明すればよい。

（定理）X , Y を距離空間とし、$f : X \to Y$ を連続写像とする。A を X の任意の部分集合とし、f の定義域を A に縮小した写像を $f' : A \to Y$ も連続である。

（証）V を Y の開集合とすれば、$f'^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ なので、$f^{-1}(V)$ は X の開集合なので $f'^{-1}(V)$ は A における開集合となる。よって f' は連続である。

続きは、P.89 の定理2の X を A にすればよい。

（P.93　命題5）



$x \in A_1$ と仮定し

$y \in B(x, r) \to y \in A_1$

よって $B(x, r) \subset A_1$

（P.95　$\boldsymbol{f}$ が連続 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f_i}$ が連続）

$\boldsymbol{b} = (b_1\ ,\ b_2\ ,\ \cdots\ ,\ b_n)$ とすれば

$|f_i(x) - b_i| \leqq |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{b}|$　$(1 \leqq i \leqq n)$

$|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{b}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - b_i|^2}$

（P.98　定理1）

$|\boldsymbol{u}|^2 = (b-a)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}'(c) = (b-a)|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}'(c)|$ ← $b-a > 0\ ,\ |\boldsymbol{u}|^2 \geqq 0$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}'(c) \geqq 0$ なので $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}'(c) = |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}'(c)|$

なぜこのようにしたかはシュバァルツの不等式を使うためである。

この定理は絶対値をとっているので成り立つが、ベクトル値関数に拡張した形では成り立たない。（解析入門Ｉ　杉浦光夫 著 P.95 参照）

（P.99　定理2）

$\boldsymbol{f}$ が連続であることと各 f_i が連続であることは同値なので、上巻 P.231 定理3から、各 f_i は $[a\ ,\ b]$ で可積分である。また上巻 P.246 定理3から

$F_i(x) = \int_a^x f_i(t)dt$

とおいたとき、f_i が $[a\ ,\ b]$ で連続ならば、F_i は x において微分可能で、

$F_i'(x) = f_i(x)$

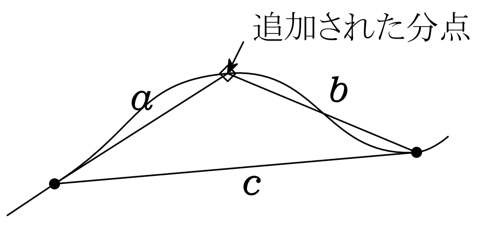
となるので、この定理は $\boldsymbol{f}$ が連続であるという仮定だけでよい。

（P.100　曲線の長さ）

$L(P\ ,\ \gamma) = \sum_{i=1}^{m} |\ \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\ |$ を折れ線の長さと定義している。そこで、あらゆる分割 P に対する $L(P\ ,\ \gamma)$ の上限を $L(\gamma) = \sup_P L(P\ ,\ \gamma)$ とおき、$L(\gamma) < +\infty$ のとき、曲線 γ の長さと定義している。（解析入門Ｉ　杉浦光夫 著 P.342 参照）

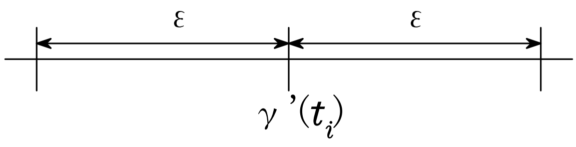
この場合 $L(P\ ,\ \gamma)$ が有界であればよい。

分割が細分化され、分点の数が増えていくと折れ線の長さは増えていくからである。（$c \leqq a+b$）



(P.100　定理4)

$|\gamma'(t)-\gamma'(t_i)|<\varepsilon$



$|\gamma'(t)|<|\gamma'(t_i)|+\varepsilon$ であるから

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\gamma'(t)|dt<\int_{t_{i-1}}^{t_i}(|\gamma'(t_i)|+\varepsilon)dt=|\gamma'(t_i)|\Delta t_i+\varepsilon\Delta t_i$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\gamma'(t)|dt<|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|+2\varepsilon\Delta t_i$$

これを $i=1,\cdots,m$ について加えて

$$\int_a^b|\gamma'(t)|dt<\sum_{i=1}^m(|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|+2\varepsilon\Delta t_i)=L(P,\gamma)+2\varepsilon(b-a)$$

$\leqq L(\gamma)+2\varepsilon(b-a)$

ε は任意であるから、$\int_a^b|\gamma'(t)|dt\leqq L(\gamma)$ を得る。

(P.107　例2)

$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$ はノルムである。

$N1$ はOK

$N2$ は上巻 P.242 定理2の (c) から明らかである。

$N3$ $\|cf\|_1=\int_0^1|cf(x)|dx=|c|\int_0^1|f(x)|dx=|c|\ \|f\|_1$

$N4$ $\|f+g\|_1=\int_0^1|f(x)+g(x)|dx\leqq\int_0^1(|f(x)|+|g(x)|)dx$

$=\int_0^1|f(x)|dx\int_0^1|g(x)|dx=\|f\|_1+\|g\|_1$

(P.108　距離関数)

$d(x,y)=N(x-y)$ としたとき、$Dis3$, $Dis4$ を調べる。

$Dis3$　$d(x,y)=d(y,x)$

$d(y,x)=N(y-x)=N((-1)(x-y))=|-1|N(x-y)=d(x,y)$

$Dis4$　$d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)$

$d(x,z)=N(x-z)=N(x-y+y-z)\leqq N(x,y)+N(y,z)$

$=d(x,y)+d(y,z)$

(P.110　定理2)

X の各点 x に対して $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ だから

x を固定したと考えて、$(f_n(x))$ を $f(x)$ に収束する点列と考えれば、ノルムは連続なので、$f_m(x)$ は定数なので、$a-f_n(x)=b_n$ とみれば $\lim_{n\to\infty} b_n = a-f(x)$ である。

$\lim_{n\to\infty} N(b_n) = a-f(x) = f_m(x)-f(x)$　← 上巻 P.107 参照

しかし、ここで極限をとっているので $\leqq \varepsilon$ となる。

ここでもまた、$\varepsilon > \varepsilon' > 0$ として N を定めておけば $\leqq \varepsilon' < \varepsilon$ とすることができる。

上巻 P.305（一様コーシー条件）

(P.111　連続写像の空間)

continuance → $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}(X, Y)$ また、X を距離空間としている理由は連続を定義できないからである。

(P.112　定理3)

● $b \in \overline{A} \Leftrightarrow b$ に収束する A の点列 $(x_n)_{n\in N}$ が存在する。*OK*

● 収束する A の任意の点列 $(x_n)_{n\in N}$ の極限 x が A に含まれれば A は閉集合である。

(証) $\overline{A}$ は収束する A の点列の極限の全体と一致する。よって、$\overline{A} \subset A$ である。

一般に $A \subset \overline{A}$ なので $A = \overline{A}$ となり、A は閉集合となる。

(定理3の証明)

任意の $f \in \overline{\mathcal{C}^b(X, Y)}$ に対し f に収束する $\mathcal{C}^b(X, Y)$ の点列 (f_n) が存在する。

そのとき $f \in \mathcal{C}^b(X, Y)$ なので $\overline{\mathcal{C}^b(X, Y)} \subset \mathcal{C}^b(X, Y)$ となり、$\overline{\mathcal{C}^b(X, Y)} = \mathcal{C}^b(X, Y)$ を得る。よって、$\mathcal{C}^b(X, Y)$ は $\mathcal{B}(X, Y)$ の閉集合である。

後半は Y が完備なノルム空間ならば定理2から $\mathcal{B}(X, Y)$ は完備であるから、P.69 命題4より、その任意の閉集合は完備である。

(P.113　定理1　ワイエルシュトラスの定理)

● $t \in [0, 1]$ として $x=(b-a)t+a$ とすれば $x \in [a, b]$ となる。したがって $f(t)$ に対して定理が証明されれば、実係数多項式の列 $(P_n(t))$ が存在することが

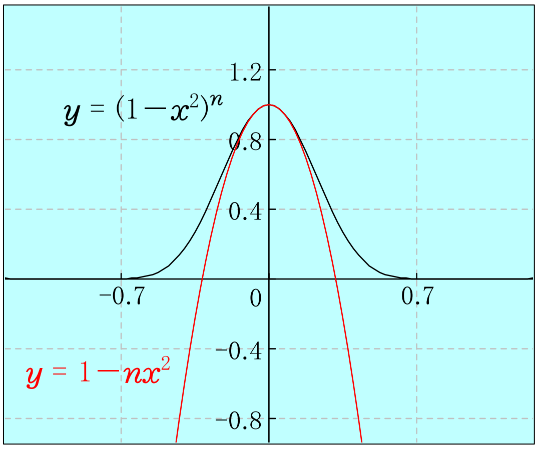
わかる。そして、t に $\dfrac{1}{b-a}(x-a)$ を代入すれば、それはやはり実係数多項式である。

● $Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n$ とおき、定数 c_n を $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx=1$ となるように定める。

$\int_{-1}^{1} c_n(1-x^2)^n dx = c_n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$

$(1-x^2)^n$ は $[-1\ ,\ 1]$ で連続なので可積分である。よって、$c_n=\dfrac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx}$ とすればよい。

● 区間 $[0\ ,\ 1]$ で $(1-x^2)^n \geqq 1-nx^2$



$\phi(x)=(1-x^2)^n-(1-nx^2)$ とする。

$\phi'(x)=-2xn(1-x^2)^{n-1}+2nx$

$=2nx[1-(1-x^2)^{n-1}]$

$\phi'(x)=2nx[1-(1-x^2)^{n-1}]=0$

$x=0$ で $\phi(0)=0\ ,\ \phi'(0)=0$

$0 \leqq x \leqq 1$ で $\phi'(x) \geqq 0$

よって、$0 \leqq x \leqq 1$ で $\phi(x)$ は単調増加関数である。

ゆえに、区間 $[0\ ,\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}]$ では $(1-x^2)^n \geqq 1-nx^2$ である。

● $2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)dx = 2\left[x-\dfrac{n}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{3\sqrt{n}}\right)=\dfrac{4}{3\sqrt{n}}$

● $0 \leqq x \leqq 1$ に対し、$P_n(x)$ を

$P_n(x)=\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt$

と定める。ここでは x を固定し、$f(x+t)Q_n(t)$ を t の関数として t で積分するので

$0 \leqq x \leqq 1$ の外で $f(x)=0$ という約束だったので、$0 \leqq x+t \leqq 1$ の外で

$f(x+t)=0$　つまり、$-x \leqq t \leqq 1-x$ の外で $f(x+t)=0$ となる。

$P_n(x)=\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt$

$=\int_{-1}^{-x} f(x+t)Q_n(t)dt+\int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt+\int_{1-x}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt$

$=\int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt$

ここで $x+t=h$ として置換積分すると、$\dfrac{dh}{dt}=1$ から

$$=\int_0^1 f(h)Q_n(h-x)dh=\int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt$$

● $f(t)Q_n(t-x)=f(t)\cdot c_n(1-(t-x)^2)^n$ だから x の多項式である。

● $f(x)=\int_{-1}^1 f(x)Q_n(t)dt=f(x)\int_{-1}^1 Q_n(t)dt=f(x)\cdot 1=f(x)$

● f は R で一様連続なので $|s-t|<\delta' \to |f(s)-f(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$-\delta'<-\delta \leqq (x+t)-x \leqq \delta<\delta' \to |f(x+t)-f(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となる。

となる $\delta>0$ をとる。$-\delta \leqq (x+t)-x \leqq \delta$ は $|t| \leqq \delta$ を意味するので

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)-f(x)|\,|Q_n(t)|dt=\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt$$

ここで、$Q_n(x)$ は 区間 $[-1,1]$ で正であり偶関数であるから

$$<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{2}$$

次に $\int_{-1}^{-\delta}$ と $\int_{\delta}^{1}$ についてだが、$Q_n(x)$ の形状が 縦軸に対して線対称になっているので、$\delta \leqq t \leqq 1$ なる t に対しては

$$Q_n(t) \leqq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n$$

である。また、$f(x)$ は $[0,1]$ で連続なので $sup|f(x)|=M$ とおくことができる。

したがって $\delta \leqq t \leqq 1$ においては

$|f(x+t)-f(x)| \leqq |f(x+t)|+|f(x)| \leqq 2M$ なので

$$|f(x+t)-f(x)|Q_n(t) \leqq 2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n$$

が成り立ち

$$\left|\int_{\delta}^1\right| \leqq \left|\int_0^1 2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n dt\right|=2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n$$

となる。

同様に $-1 \leqq t \leqq -\delta$ に対しても 縦軸に線対称であることから

$$\left|\int_{-1}^{-\delta}\right| \leqq \left|\int_{-1}^{0} 2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n dt\right| = 2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n$$

である。ゆえに

$$|P_n(x)-f(x)| < 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2}$$

となる。

● 上巻 P.170 問題5．2の1 から、$n \to \infty$ のとき $\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$

● 最後の議論は、x は $[0,1]$ の任意の点だったので、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある N が存在し $n \geqq N$ ならば $[0,1]$ に含まれるすべての x に対して

$$|P_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

となり、一様収束することが証明できたことになる。

（P.116　X がコンパクトである場合）

P.89 定理5から $f : X \to R$ が実連続関数ならば、$f(X)$ はコンパクトである。$f(X)$ は R の部分集合なので、P.80 系2から有界閉集合となり、f は有界連続関数となる。つまり、その場合 $\mathcal{C}^b(X) = \mathcal{C}(X)$ となる。

（P.116　関数環の定義）

13.1 までの Y はノルムの定義されたベクトル空間だったので、扱っていた関数がベクトル値関数であった。したがって積が定義できなかったが、ここでは Y が R なので積が定義できることになる。つまり、多変数実数値関数ということになる。

（P.117　よく使う不等式）

$\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$ ，$\|cx\| = |c|\,\|x\|$ $\to$ $\|x\|-\|y\| \leqq \|x+y\|$

なぜなら、$a = (a+b)-b$ だから $\|a\| \leqq \|a+b\|+\|-b\| = \|a+b\|+\|b\|$

$\|a\|-\|b\| \leqq \|a+b\| \to \|x\|-\|y\| \leqq \|x+y\|$

また $\|-y\| = \|y\|$ なので $\|x\|-\|y\| \leqq \|x-y\|$

これらの不等式は一般のノルムに関してもいえることになる。

（P.117　定理2）

$\|f_n-f\| \to 0$ であるから $\varepsilon = 1$ とすれば、すべての $x \in X$ に対して、自然数

N が存在して、$n \geqq N$ ならば

$|f_n - f| < 1$ となるので、$|f_n| < |f| + 1 \ \rightarrow\ \|f_n\| \leqq |f| + 1 \leqq \|f\| + 1$

（P.118　ワイエルシュトラスの定理の別表現）

任意の $f \in \mathcal{C}([a\ ,\ b])$ に対し、$\mathcal{A}$ の列 $(P_n(x))$ で f に一様収束するものが存在するので、$f \in \overline{\mathcal{A}}$ よって $\mathcal{C}([a\ ,\ b]) \subset \overline{\mathcal{A}}$ 、逆に $f \in \overline{\mathcal{A}}$ ならば P.67 命題1から $\mathcal{A}$ の列 $(P_n(x))$ で f に一様収束するものが存在するので f は連続である。よって $f \in \mathcal{C}([a\ ,\ b])$ となる。ゆえに $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}([a\ ,\ b])$ となる。

（P.119　補題）

$g(x_1) \neq g(x_2)$ ， $h(x_1) \neq 0$ ， $k(x_2) \neq 0$

を満たす $\mathcal{A}$ の元 g , h , k が存在する。ここで h は x_1 で 0 でなければよいだけで、$h(x_2) \neq 0$ となる必要はない。しかし、x_2 に対しては $k(x_2) \neq 0$ となる関数 k が存在するのである。g についても x_1 , x_2 に対してのみ $g(x_1) \neq g(x_2)$ となればよいのである。単射 g が存在するという意味ではない。

（P.119　$\overline{\mathrm{A}}$ は C（X）に含まれる関数環である。）

X がコンパクト距離空間である場合には、X から Y への連続写像は有界なので $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^b(X)$ である。よって $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ である。また、P.112 定理3から $\mathcal{C}(X)$ は $\mathcal{B}(X)$ の閉集合である。

そこで、$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^b(X)$ とすれば、$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ なので定理2から $\overline{\mathcal{A}}$ も関数環である。$\overline{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の閉集合なので $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(X)$ である。

（P.120　第2段）

● $h(x) = max\{f\ ,\ g\} = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2}$

$f \geqq g$ のとき $\dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2} = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{f-g}{2} = f$

$f < g$ のとき $\dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2} = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{g-f}{2} = g$

● $\ell(x) = min\{f , g\} = \dfrac{f+g}{2} - \dfrac{|f-g|}{2}$

$$\ell(x) = \begin{cases} g(x) \ , \ f(x) \geqq g(x) \text{ のとき} \\ f(x) \ , \ f(x) < g(x) \text{ のとき} \end{cases}$$

$f \geqq g$ のとき $\dfrac{f+g}{2} - \dfrac{|f-g|}{2} = \dfrac{f+g}{2} - \dfrac{f-g}{2} = g$

$f < g$ のとき $\dfrac{f+g}{2} - \dfrac{|f-g|}{2} = \dfrac{f+g}{2} - \dfrac{g-f}{2} = f$

● $max\{f , g , r\}$

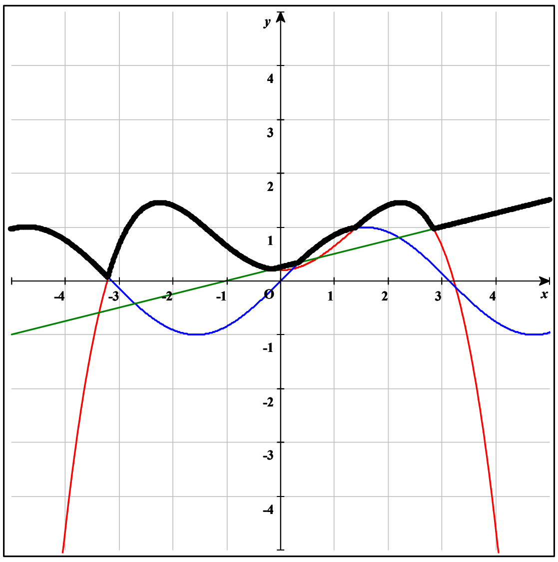
$= max\{max\{f , g\} , r\}$

(例)

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{20}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + 0.2 \\ g(x) = \sin x \\ r(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$max\{f , g , r\}$ が右図の(黒)曲線と

なった。



● $max\{f_1 , f_2\} \in \mathscr{C}_0$ なので $max\{f_1 , f_2 , f_3\} = max\{\, max\{f_1 , f_2\} , f_3\} \in \mathscr{C}_0$

帰納的に $max\{f_1 , \cdots , f_n\} \in \mathscr{C}_0$ となる。

● $min\{f , g , r\}$

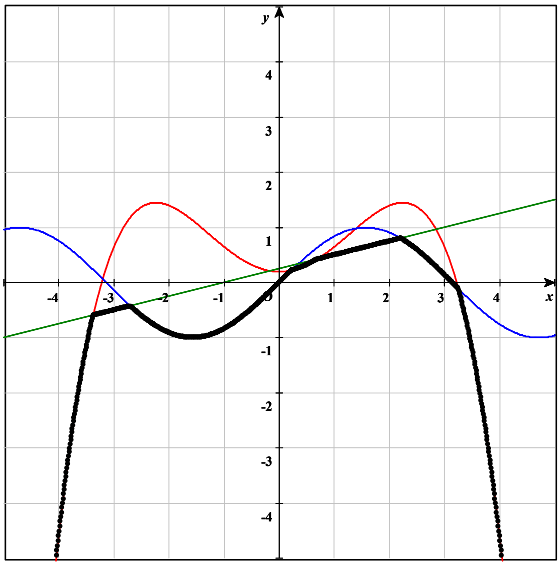
$= min\{min\{f , g\} , r\}$

(例)

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{20}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + 0.2 \\ g(x) = \sin x \\ r(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$min\{f , g , r\}$ が右図の(黒)曲線と

なった。



● $min\{f_1 , f_2\} \in \mathscr{C}_0$ なので $min\{f_1 , f_2 , f_3\} = min\{\, min\{f_1 , f_2\} , f_3\} \in \mathscr{C}_0$

帰納的に $min\{f_1 , \cdots , f_n\} \in \mathscr{C}_0$ となる。

（P.121　第3段）

● $\mathcal{A}$ が X の点を分離し、X のどの点も零化しないので、$f \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0$ となり

ゆえに $\mathcal{A}_0$ は X の点を分離し、X のどの点も零化しない。

● $y = x$ の場合

$h(x) \neq 0$ となる $h \in \mathcal{A}_0$ が存在するので、$h_x(y) = f(x)\dfrac{h(y)}{h(x)}$ とおけば $h_x \in \mathcal{A}_0$

であり、$h_x(x) = h_x(y) = f(x)$ となる。($h(x)$, $f(x)$ はスカラーと見る)

● h_y , f は y で連続であるから、y の適当な開近傍 $V(y)$ をとれば、すべての $t \in V(y)$ に対し $|f(t) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|h_y(t) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる。

$$f(y) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(y) - \varepsilon < f(t) - \frac{\varepsilon}{2} < f(y) \quad \cdots ①$$

$$f(y) - \frac{\varepsilon}{2} < h_y(t) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(y) < h_y(t) + \frac{\varepsilon}{2} < f(y) + \varepsilon \quad \cdots ②$$

①、②から $f(t) - \dfrac{\varepsilon}{2} < h_y(t) + \dfrac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(t) - \varepsilon < h_y(t)$

($f(y)$ はスカラーと見る)

● 開近傍 $V(y)$ だが、X がコンパクト空間なので距離関数が定義されてなく開球を使うことができないのかもしれないが、ストーンの定理にはコンパクト距離空間を仮定としているので、開球を使ってもよいと思う。なぜなら、この本の中で開近傍はまだ定義されていないからである。

● $h_{y_i}(x) = f(x)$, $h_{y_i}(y_i) = f(y_i)$

$t \in V(y_i)$ に対し

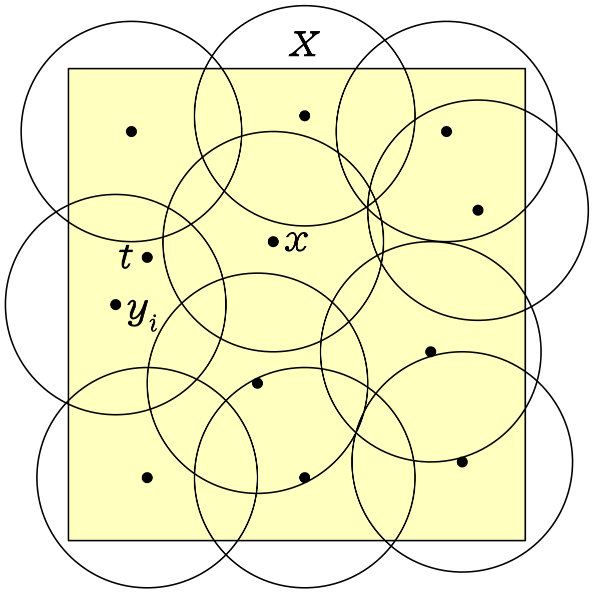
$h_{y_i}(t) > f(t) - \varepsilon$

$y_j = x$ の場合は、$h_x(t)$ となるが

その場合 x で連続で $t \in V(x)$ なら

$|f(t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ かつ

$|h_x(t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とすることができ



$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(x) - \varepsilon < f(t) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \quad \cdots ①'$$

$f(x)-\frac{\varepsilon}{2} < h_x(t) < f(x)+\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(x) < h_x(t)+\frac{\varepsilon}{2} < f(x)+\varepsilon$ … ②'

①'、②' から $f(t)-\frac{\varepsilon}{2} < h_x(t)+\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(t)-\varepsilon < h_x(t)$ となるので問題ない。

(P.122　第4段)

● $t \in U(x)$ ならば、f , g_x は x で連続であり $g_x(x) = f(x)$ なので

$|f(t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|g_x(t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$f(x)-\frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x)+\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(x) < f(t)+\frac{\varepsilon}{2} < f(x)+\varepsilon$ … ①''

$f(x)-\frac{\varepsilon}{2} < g_x(t) < f(x)+\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(x)-\varepsilon < g_x(t)-\frac{\varepsilon}{2} < f(x)$ … ②''

①''、②'' から $g_x(t)-\frac{\varepsilon}{2} < f(t)+\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow g_x(t) < f(t)+\varepsilon$

(P.122　定理4)

● $f+\overline{f} = 2u$, $f-\overline{f} = u+iv-(u-iv) = i2v$ から u , v が連続であることがわかるので、u , $v \in \mathcal{A}_R$ である。

● $f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow u(x_1) \neq u(x_2)$ または $v(x_1) \neq v(x_2)$ なので、x_1 , x_2 に応じてどちらかを使えばいいので、$\mathcal{A}_R$ は X の点を分離する。同様に零化しない。

● 定理3から X 上の任意の実数値関数 g は $g \in \overline{\mathcal{A}_R}$ 、また $\mathcal{A}_R \subset \mathcal{A}$ から $\overline{\mathcal{A}_R} \subset \overline{\mathcal{A}}$ なので $g \in \overline{\mathcal{A}}$ となる。そこで任意の $f = u+iv \in \mathcal{C}_C(X)$ に対して、u , v は実数値関数 であるから u , $v \subset \overline{\mathcal{A}}$ となり、$\overline{\mathcal{A}}$ が複素関数環であることから $u+iv \in \overline{\mathcal{A}}$ 、よって $\mathcal{C}_C(X) \subset \overline{\mathcal{A}}$

逆に、$f \in \overline{\mathcal{A}}$ に対して f に収束(一様収束)する複素連続関数の関数列が存在するので f は連続となり、$f \in \mathcal{C}_C(X)$ 、よって $\mathcal{C}_C(X) \supset \overline{\mathcal{A}}$

以上によって、$\mathcal{C}_C(X) = \overline{\mathcal{A}}$

(P.133　命題1)

f が x において微分可能であるとして、定義の式 ① における a を $a = (a_1 , \cdots , a_n)$ とする。つまり、a が存在することを仮定にする。

そこで、$\boldsymbol{e}_i$ 方向の微分を考えてみる。$\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{e}_i$ として、$|\boldsymbol{h}| \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$ で

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h} = a_i h$ であるから

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{h} - a_i \right| = 0$$

となることを示せばよい。

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{h} - a_i \right| = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})-a_i h}{h} \right|$$

$$= |\boldsymbol{e}_i| \lim_{h\to 0, h\neq 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})-a_i h}{h|\boldsymbol{e}_i|} \right|$$

$$= |\boldsymbol{e}_i| \lim_{h\to 0, h\neq 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}}{h|\boldsymbol{e}_i|} \right| = |\boldsymbol{e}_i| \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}$$

$|\boldsymbol{e}_i| = 1$ であり、① から $\displaystyle \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$ だから

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{h} - a_i \right| = 0$$

となる。

ここで注意しておきたい事は、偏微分の場合 $h\boldsymbol{e}_i$ の h は $+0$ と -0 の二方向の近づき方があるが、① の分母を $|\boldsymbol{h}|$ としておくことによって、微分可能であることから偏微分可能であることに上手に導くことができることである。分母に置くので、ベクトルにしないというだけではない。

(P.134　平均値の定理)

$f(b)-f(a) = (b-a)f'(a+\theta b)$　$(0 < \theta < 1)$

$f(x+h, y+k)-f(x, y+k) = hD_1 f(x+\theta h, y+k)$

(P.135　②)

$D_1 f(x+\theta_1 h, y+k) = D_1 f(x, y)+\varepsilon_1(\boldsymbol{h})$

$D_1 f$ は $\boldsymbol{x} = (x, y)$ の近傍で連続であるから、$\sqrt{(\theta_1 h)^2+k^2} < \sqrt{h^2+k^2} = |\boldsymbol{h}|$

であるから

$\varepsilon_1(\boldsymbol{h}) = D_1 f(x+\theta_1 h, y+k)-D_1 f(x, y)$

とおいたとき、$|\boldsymbol{h}|\to 0$ のとき 点 $(x+\theta_1 h, y+k)$ も (x, y) に近づく、連続であることから右辺は 0 に近づく、つまり、$\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\to 0$ ということである。

（P.135　注意）

$(n=3$ の場合$)$

$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)-f(x_1, x_2, x_3)$

$=f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)-f(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3)$

$+f(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3)-f(x_1, x_2, x_3+h_3)$

$+f(x_1, x_2, x_3+h_3)-f(x_1, x_2, x_3)$

$=h_1D_1f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)$

$+h_2D_2f(x_1, x_2+\theta_2 h_2, x_3+h_3)$

$+h_3D_3f(x_1, x_2, x_3+\theta_3 h_3)$

（微分可能性の定義まとめ）

（一変数の場合）

$f(x+h)-f(x)=ch+o(h)\quad(h\to 0)$

（偏微分の場合）

$f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})=a_ih+o(h)\ (h\to 0)$

（多変数実数値関数の場合）

・$\displaystyle\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|}=0$

・$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{h})\quad\left(\displaystyle\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0}\frac{r(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|}\right)$

・$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}+|\boldsymbol{h}|\,\varepsilon(\boldsymbol{h})$　（$r(\boldsymbol{h})=|\boldsymbol{h}|\,\varepsilon(\boldsymbol{h})$ として $\displaystyle\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0}\varepsilon(\boldsymbol{h})=0$）

（P.136　接超平面）

$(n=2$ の場合$)$

接超平面 G 上の点 (x_0, y_0, z_0) における G の接超平面の方程式は

$z - z_0 = grad\, f(x_0) \cdot (x - x_0)$

$= (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))(x - x_0) + (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))(y - y_0)$

・$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \rightarrow dz = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

（微分可能である。） ⇔ （一つの接超平面で近似できる。）

（P.137　定理2　微分鎖律）

$$\frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{h} = \pm\left|\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right|$$

$h > 0$ ならば $\frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{h} > 0$ なので $+\left|\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right|$

$h < 0$ ならば $\frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{h} < 0$ なので $-\left|\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right|$

● $grad\, f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ ← 横ベクトル

$\gamma'(t) = {}^t(x_1'(t), \cdots, x_n'(t)) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$ ← 縦ベクトル

内積 $grad\, f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})\begin{pmatrix} \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$

もっと一般の場合（仮に $n = 3$, $p = 2$ ）

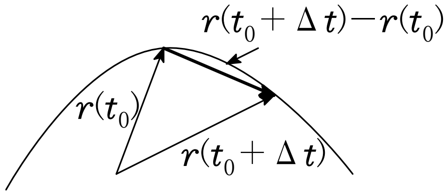
$z = f(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = \phi_1(t_1, t_2)$, $x_2 = \phi_2(t_1, t_2)$ とした場合

他の変数を固定し、t_1 , t_2 で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_2}$$

（P.141　グラディエントと超平面）



$grad\ f(\boldsymbol{x}_0)$ は曲線 γ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における接ベクトルと直交する。つまり、$grad\ f(\boldsymbol{x}_0)$ はその接超平面の法線ベクトルとなる。

微分可能であるということは $grad\ f(\boldsymbol{x}_0)$ が定まることをいうので、そのことは超接平面が一つに定まることを意味している。また、各偏微分の値は $grad\ f(\boldsymbol{x}_0)$ から $\boldsymbol{e}_i$ への射影となる。つまり、$grad\ f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{e}_i$ に等しい。

（P.142　例2）

$G = \{ (x, f(x)) \mid x \in U \}$　,　$S = \{ \boldsymbol{u} = (x, z) \in R^{n+1} \mid g(\boldsymbol{u}) = f(x) - z = 0 \}$

とすると、$G \subset S$ である。

なぜなら、任意の $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0)) \in G$ に対して $g(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0)) = f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) = 0$

となり、$(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0)) \in S$

逆に $f(x) - z = 0$ となる x, z は例1のような場合は $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ の場合分けが必要になる。

（例）$\{ (x, ax+b) \mid x \in R \} = \{ (x, y) \in R^2 \mid ax + b - y = 0 \}$

左は $y = ax + y$ 上の点の座標を表す。右は $ax + b - y = 0$ の解の集合であって同じ要素からできている。この場合は $grad\ g(x_0, y_0) = (a, -1)$ だから

$(a, -1) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \ \rightarrow\ y - y_0 = a(x - x_0) \ \rightarrow\ y = ax - (ax_0 - y_0)$

$\rightarrow\ y = ax-(-b) = ax+b$

（P.142　例1を例2で解釈すると）

$f(x\ ,\ y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$　（ $x_0\ ,\ y_0 > 0$ ）

$\boldsymbol{R}^3$ における f のグラフは $G = \{\,(x\ ,\ z\ ,\ \sqrt{r^2-x^2-y^2}\ )\,|\,(x\ ,\ y) \in \boldsymbol{R}^2\,\}$

$\boldsymbol{R}^3$ の点を $\boldsymbol{u} = (x\ ,\ y\ ,\ z)$ と書き、$g(\boldsymbol{u}) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}-z$

によって定義する。

f のグラフ G は $\sqrt{r^2-x^2-y^2}-z = 0$ となる $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面である。

$\boldsymbol{u}_0 = (x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0 = \sqrt{r^2-x_0^2-y_0^2}\ )$ とすれば

$$grad\ g(\boldsymbol{u}_0) = \left(\ -2x_0\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x_0^2-y_0^2}}\ ,\ -2y_0\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x_0^2-y_0^2}}\ ,\ -1\ \right)$$

$$= \left(\ -\frac{x_0}{z_0}\ ,\ -\frac{y_0}{z_0}\ ,\ -1\ \right)$$

$\boldsymbol{u}_0$ における接平面の方程式は

$$z-z_0 = -\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0)$$

$$zz_0-z_0^2 = -x_0(x-x_0)-y_0(y-y_0)$$

$zz_0+xx_0+yy_0 = z_0^2+x_0^2+y_0^2 = r^2$　　$\leftarrow$　例1と同じになる。

（P.143　問題14．1）

3) $|\boldsymbol{x}| = r$ とおく。$grad\ f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) 求めよ。($k > 0$)

(a) $f(\boldsymbol{x}) = r^k$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \rightarrow\ r^k = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{k}{2}}\ \rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i\times\frac{k}{2}\times\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{k-2}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = kx_i\times\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}(k-2)}$$

よって $grad\ f(\boldsymbol{x}) = kr^{k-2}\boldsymbol{x}$

(b) $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{r^k}$

$$\frac{1}{r^k}=(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{-\frac{k}{2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i\times(-\frac{k}{2})\times(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{-k-2}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=-x_i k(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}(-k-2)}$$

よって $grad\, f(\boldsymbol{x})=-kr^{-k-2}\boldsymbol{x}$

(c) $f(\boldsymbol{x})=\ell og\ r$

$$\ell og\ r=\ell og((\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i\times\frac{1}{2}\times(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{1}{r}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=x_i(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{1}{r}$$

よって $grad\, f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{x}$

(d) $f(\boldsymbol{x})=e^{-r^2}$

$$e^{-r^2}=exp\,(-(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=-2x_i\times e^{-r^2}$$

よって $grad\, f(\boldsymbol{x})=-2e^{-r^2}\boldsymbol{x}$

● $f(\boldsymbol{x})=r$

$$r=(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i\times\frac{1}{2}\times(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=x_i\frac{1}{r}$$

よって $grad\, f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{r}\boldsymbol{x}$

ここで、$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}$, $|\boldsymbol{r}|=r$ とすれば

$$\nabla r=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$$

(a) $\nabla r^k=kr^{k-2}\boldsymbol{r}=(kr^{k-1})\nabla r=(kr^{k-1})\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}$

(b) $\nabla\frac{1}{r^k}=(-kr^{-k-1})\nabla r=(-kr^{-k-1})\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-kr^{-k-2}\boldsymbol{r}$

(c) $\nabla\ell og\ r=(\frac{1}{r})\nabla r=\frac{1}{r}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

(d) $\nabla\, e^{-r^2} = (-2re^{-r^2})\nabla r = (-2re^{-r^2})\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = -2e^{-r^2}\boldsymbol{r}$

よって

$\nabla f(r) = f'(r)\nabla r$（$|\boldsymbol{r}| = r \neq 0$）という公式ができる。

もう少し一般化すると

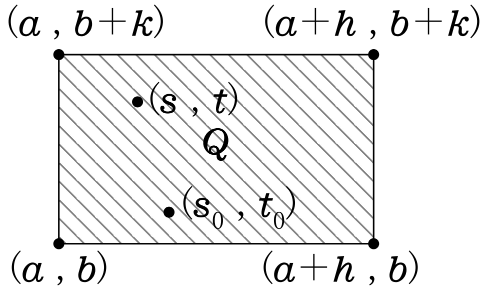
> $h(x) = f(\,g(x)\,)$ のような合成関数の場合
>
> $\dfrac{\partial h}{\partial x_i} = f'(\,g(x)\,)\dfrac{\partial g}{\partial x_i} \;\rightarrow\; \nabla h = f'(\,g(x)\,)\nabla g$

5) $\nabla\,(fg) = g\,\nabla f + f\,\nabla g$ ，$\nabla\dfrac{1}{f} = -\dfrac{1}{f^2}\,\nabla f$

$$\frac{\partial\,(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + \frac{\partial g}{\partial x_i}f \;\rightarrow\; \nabla\,(fg) = g\,\nabla f + f\,\nabla g$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{f^2}\right) \rightarrow \nabla\frac{1}{f} = -\frac{1}{f^2}\,\nabla f$$

（P.148　定理1）



Q の内部の点 $(s\,,\,t)$ で

$|\,(D_2D_1f)(s\,,\,t) - A\,| < \varepsilon$

が成り立つ。

補題から $\Delta(Q)(h\,,\,k)$ は D の内部のある点 $(s_0\,,\,t_0)$ で

$\Delta(Q)(h\,,\,k) = hk(D_2D_1f)(s_0\,,\,t_0)$ となる。したがって $(s_0\,,\,t_0) \in Q$ だから

$$\left|\,\frac{\Delta(Q)(h\,,\,k)}{hk} - A\,\right| < \varepsilon \qquad (\,h \rightarrow 0 \Rightarrow s_0 \rightarrow a\;,\; k \rightarrow 0 \Rightarrow t_0 \rightarrow b\,)$$

● f が n 変数ならば、

$\Delta Q = f(a_1\,,\cdots,\,a_i + h\,,\cdots,\,a_j + k\,,\cdots,\,a_n)$

$-f(a_1\,,\cdots,\,a_i + h\,,\cdots,\,a_j\,,\cdots,\,a_n) - \{\,f(a_1\,,\cdots,\,a_i\,,\cdots,\,a_j + k\,,\cdots,\,a_n)$

$-f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n)\}$

とし、$g(x)=f(a_1, \cdots, x, \cdots, a_j+k, \cdots, a_n)-f(a_1, \cdots, x, \cdots, a_j, \cdots, a_n)$ とおけば、

$\Delta Q = g(a_i+h_i)-g(a_i)$

となり、あとは平均値の定理を同じように使えばよい。

(P.154　$\nabla\cdot\boldsymbol{h}$)

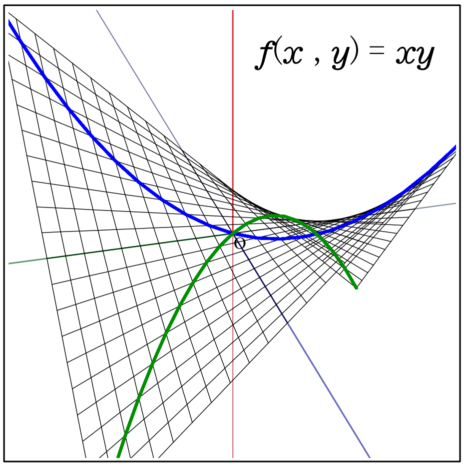
微分作用子 $D=h_1D_1+\cdots+h_nD_n=(D_1, \cdots, D_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}=\nabla\cdot\boldsymbol{h}$

(P.165　例2)

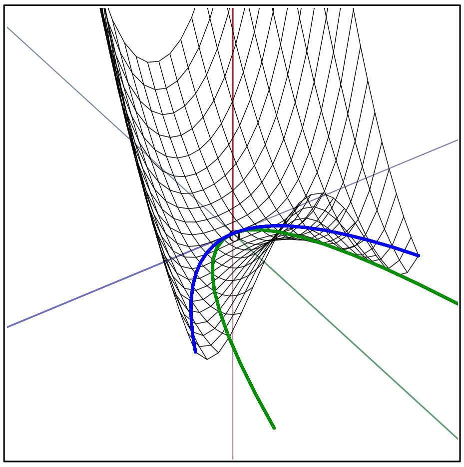
$y=x$ 上では $z=x^2$ (青線)

$y=-x$ 上では $z=-x^2$ (緑線)

原点が鞍点(アンテン)となっている。



(P.165　例3)



$f(x, y)=(y-x^2)(y-2x^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x(y-2x^2)-4x(y-x^2)$

$=8x^3-6xy$

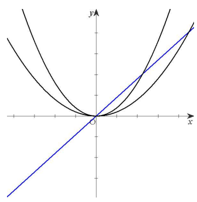
$\dfrac{\partial f}{\partial y}=(y-2x^2)+(y-x^2)$

$=-3x^2+2y$

$(0, 0)$ は臨界点である。

$y=ax^2\ (1<a<2)$

$f(x, y)=(a-1)x^2\times(a-2)x^2=(a-1)(a-2)x^4<0$



（P.166　例1）

$2x+y-2=0 \to y=-2x+2 \;\to x+2(-2x+2)-2=0 \to -3x=-2$

$\to x=\dfrac{2}{3}$　よって $y=-\dfrac{4}{3}+2=\dfrac{2}{3}$

（P.167　例2）

$2xy-y^2=0 \;\to y\neq 0$ とすれば $x=\dfrac{y}{2} \to \dfrac{y^2}{4}-y^2=0 \to y=0$ となり矛盾

$\to\;\; y=0\,,\,x=0$

$y-y^2=-(y^2-y)=-\{\,(y-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\,\}=-(y-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}$

$x^2-x=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}$

（P.168　(*)）

$n=3$ としてみると、(*) は

$(h_1D_1+h_2D_2+h_3D_3)^2f(\boldsymbol{a})$

$=(h_1^2D_1^2+h_2^2D_2^2+h_3^2D_3^2+2h_1h_2D_1D_2+2h_1h_3D_1D_3+2h_2h_3D_2D_3)f(\boldsymbol{a})$

$$=\begin{pmatrix}h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1^2f(\boldsymbol{a}) & D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & D_1D_3f(\boldsymbol{a})\\ D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & D_2^2f(\boldsymbol{a}) & D_1D_2f(\boldsymbol{a})\\ D_1D_3f(\boldsymbol{a}) & D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & D_3^2f(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1D_1^2f(\boldsymbol{a}) & h_2D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & h_3D_1D_3f(\boldsymbol{a})\\ h_1D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & h_2D_2^2f(\boldsymbol{a}) & h_3D_1D_2f(\boldsymbol{a})\\ h_1D_1D_3f(\boldsymbol{a}) & h_2D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & h_3D_3^2f(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$$

$=h_1^2D_1^2f(\boldsymbol{a})+h_1h_2D_1D_2f(\boldsymbol{a})+h_1h_3D_1D_3f(\boldsymbol{a})+h_1h_2D_1D_2f(\boldsymbol{a})+h_2^2D_2^2f(\boldsymbol{a})+h_2h_3D_1D_2f(\boldsymbol{a})$

$+h_1h_3D_1D_3f(\boldsymbol{a})+h_2h_3D_1D_2f(\boldsymbol{a})+h_3^2D_3^2f(\boldsymbol{a})$

$A=\begin{pmatrix}D_1^2f(\boldsymbol{a}) & D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & D_1D_3f(\boldsymbol{a})\\ D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & D_2^2f(\boldsymbol{a}) & D_1D_2f(\boldsymbol{a})\\ D_1D_3f(\boldsymbol{a}) & D_1D_2f(\boldsymbol{a}) & D_3^2f(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$ は対称行列となっており、$A={}^tA$ である。

この行列をヘッセ行列と呼ぶ。f が C^2級 なので対称行列となる。

（P.169　定理2）

$Q(h)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(D_iD_jf)(\boldsymbol{a})h_ih_j$　　（ $\boldsymbol{a}$ は臨界点）

$$\frac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{|\boldsymbol{h}|^2}(D_iD_jf)(\boldsymbol{a})h_ih_j = \sum_{i,j=1}^{n}(D_iD_jf)(\boldsymbol{a})\frac{h_i}{|\boldsymbol{h}|}\cdot\frac{h_j}{|\boldsymbol{h}|}$$

$k_i = \dfrac{h_i}{|\boldsymbol{h}|}$, $\boldsymbol{k} = (\ k_1\ , \cdots, k_n\ )$とおけば $\rightarrow$ $|\boldsymbol{k}| = 1$

$$\frac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = Q(\boldsymbol{k}) = \sum_{i,j=1}^{n}(D_iD_jf)(\boldsymbol{a})k_ik_j$$

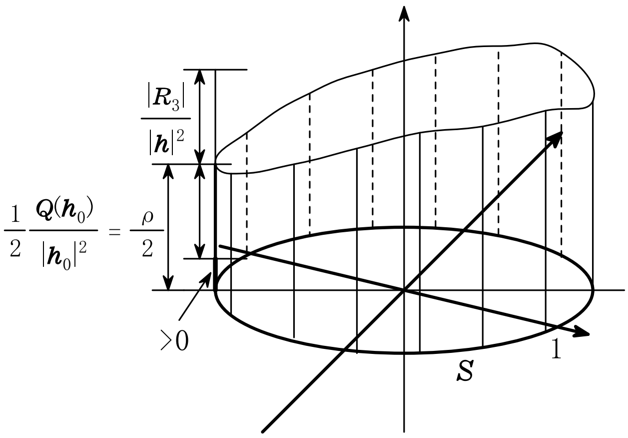
(a) $Q(\boldsymbol{h}) > 0$ とする。 $\dfrac{|R_3|}{|\boldsymbol{h}|^2} < \dfrac{\rho}{2}$ なので $-\dfrac{\rho}{2} < \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < \dfrac{\rho}{2}$ であるから

任意の $\boldsymbol{h}$ に対し $\dfrac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} \geqq \rho = \dfrac{Q(\boldsymbol{h}_0)}{|\boldsymbol{h}_0|^2}$

$0 < |\boldsymbol{h}| < \delta$ のとき

$$\frac{1}{2}\frac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} \geqq \frac{\rho}{2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} > 0$$

$\left(0 < \dfrac{\rho}{2} + \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < \rho\right)$



$Q(\boldsymbol{h})$ が<u>半正の場合</u>は、$\boldsymbol{a}$ の近傍で $Q(\boldsymbol{h}) \geqq 0$ で $Q(\boldsymbol{h}) = 0$ となる $\boldsymbol{h} \neq 0$ が存在するので、$\rho = 0$ とせざるえない。すると、どんなに δ を小さくとっても

$-r < \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < r$ なので $-r > 0 + \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} > r$ となり、極小値といいきれない。

(b) $Q(\boldsymbol{h}) < 0$ とする。 $\boldsymbol{h} \neq 0$ のときの $\dfrac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2}$ の最大値 $\displaystyle\max_{h \neq 0} \frac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = \mu$ が存在して、$\mu < 0$ である。上と同様に δ をとれば、$\dfrac{\mu}{2} < \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < -\dfrac{\mu}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}\frac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} \leqq \frac{\mu}{2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < 0 \quad \leftarrow \left(\ \mu < \frac{\mu}{2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < 0\ \right)$$

$Q(\boldsymbol{h})$ が<u>半負の場合</u>は、$\boldsymbol{a}$ の近傍で $Q(\boldsymbol{h}) \leqq 0$ で $Q(\boldsymbol{h}) = 0$ となる $\boldsymbol{h} \neq 0$ が存在するので、$\mu = 0$ とせざるえない。すると、どんなに δ を小さくとっても

$-r < \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} < r$ なので $-r > 0 + \dfrac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^2} > r$ となり、極大値といいきれない。

(c) $Q(\boldsymbol{h})$ が不定符号であるとする。そのとき、$\boldsymbol{a}$ の近傍で

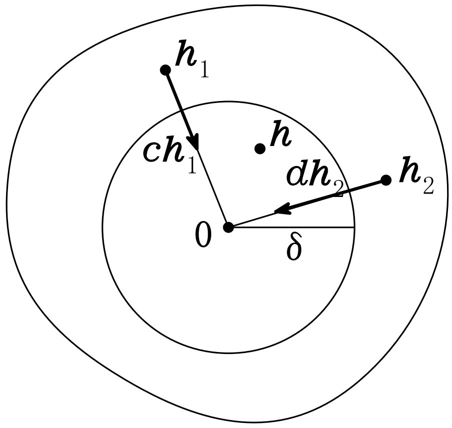
$\dfrac{Q(\boldsymbol{h}_1)}{|\boldsymbol{h}_1|^2} = \rho_1 > 0$, $\dfrac{Q(\boldsymbol{h}_2)}{|\boldsymbol{h}_2|^2} = \rho_2 < 0$ となるような $\boldsymbol{h}_1 \neq 0$, $\boldsymbol{h}_2 \neq 0$ が存在する。

0 でない任意の定数 c に対して

$$\frac{Q(c\boldsymbol{h})}{|c\boldsymbol{h}|^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{|c\boldsymbol{h}|^2}(D_iD_jf)(\boldsymbol{a})ch_ich_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (D_iD_jf)(\boldsymbol{a})\frac{h_i}{|\boldsymbol{h}|} \cdot \frac{h_j}{|\boldsymbol{h}|} \cdot \frac{c^2}{c^2}$$

$$= \frac{Q(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2}$$



$$\frac{\rho_2}{2} < \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}_2|^2} < -\frac{\rho_2}{2} \quad \rightarrow \quad \rho_2 < \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}_2|^2} + \frac{\rho_2}{2} < 0 \text{ だから}$$

$$\frac{1}{2}\frac{Q(\boldsymbol{h}_2)}{|\boldsymbol{h}_2|^2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}_2|^2} = \frac{\rho_2}{2} + \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}_2|^2} < 0$$

（P.172　補題）

(a) $t = \dfrac{x}{y} \rightarrow x = yt$ として $ax^2+2bxy+cy^2$ に代入

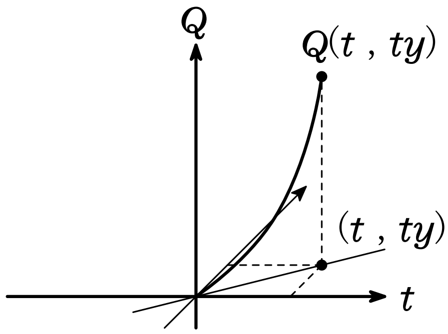
$$ay^2t^2+2by^2t+cy^2 = y^2(at^2+2bt+c)$$

$$at^2+2bt+c = a(t^2+\frac{2b}{a}t+\frac{c}{a})$$

$$= a\{ (t+\frac{b}{a})^2-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a} \}$$

$$= a\{ (t+\frac{b}{a})^2+\frac{ac-b^2}{a^2} \}$$

y を固定し、x を t の関数とする。
そのとき $Q > 0$ である。



(c)

($a \neq 0$ の場合)

$at_1^2+2bt_1+c > 0$ から

$$Q(t_1\eta\ ,\ \eta) = \eta^2(at_1^2+2bt_1+c) > 0$$

$at_2^2+2bt_2+c<0$ から

$Q(t_2\eta\ ,\ \eta)=\eta^2(at_2^2+2bt_2+c)<0$

($a=0$ の場合)

$b^2-ac>0$ から $b\neq 0$

(d)

($a\neq 0$ の場合)

$Q(\alpha y\ ,y)=y^2(a\alpha^2+2b\alpha+c)=0$ つまり直線 $x=\alpha y$ 上で 0 となる。

それ以外の点では符号は一定である。なぜなら

$t\neq\alpha$ に対し、$a>0$ ならば $at^2+2bt+c>0$ なので $Q(ty\ ,y)>0$

$t\neq\alpha$ に対し、$a<0$ ならば $at^2+2bt+c<0$ なので $Q(ty\ ,y)<0$

(P.173 定理3)

$\Delta=(D_1D_2f(a))^2-D_1^2f(a)\,D_2^2f(a)$

定理2の

$Q(h)=(D_1h+D_2k)^2f(a)=((D_1^2h^2+2D_1D_2hk+D_2^2k^2)f)(a)$

$=D_1^2f(a)h^2+2D_1D_2f(a)hk+D_2^2f(a)k^2$

$=Ah^2+2Bhk+Ck^2$

$\Delta=B^2-AC$

(P.174 例1)

$D_1f(x\ ,y)=3x_2-9y=0$

$D_2f(x\ ,y)=3y^2-9x=0$

$y=0$ とすれば $x=0$ なので $(x\ ,y)=(0\ ,0)$ が一つ目の臨界点である。

$y\neq 0$ として、$y=\dfrac{1}{3}x^2$ 下の式に代入して

$3\times\dfrac{1}{9}x^4=9x\rightarrow x\neq 0$ として $x^3=27\rightarrow x=3\ ,y=3$

よって、二つ目の臨界点は $(x\ ,y)=(3\ ,3)$ となる。

$D_1^2 f(x, y) = 6x$, $D_1 D_2 f(x, y) = -9$, $D_2^2 f(x, y) = 6y$

$(x, y) = (0, 0)$ の場合

$A = 0$, $B = -9$, $C = 0$ → $A = 0$, $\Delta = B^2 - AC = 81 > 0$

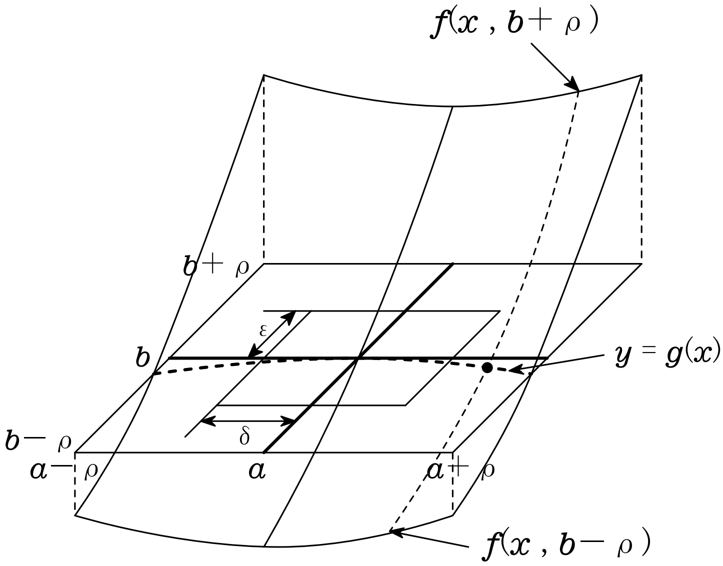
定理3の (c) から $(0, 0)$ は極値点ではない。

$(x, y) = (3, 3)$ の場合

$A = 18$, $B = -9$, $C = 18$ → $A > 0$, $\Delta = B^2 - AC = 81 - 18 \times 18 < 0$

定理3の (a) から $(3, 3)$ は狭義の極小点で、$f(3, 3) = 27 + 27 - 27 = 27$ が極小値である。

(P.176 定理1)



$I = (a - \rho , a + \rho)$ とおき

各 $x \in I$ に対し

y の関数 $f(x, y)$ は

$b - \rho \leqq y \leqq b + \rho$ で

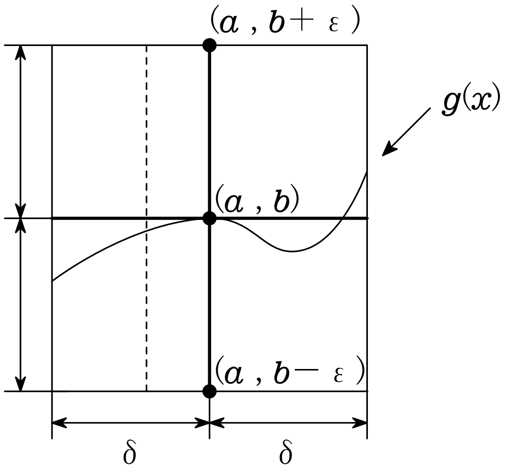
狭義単調増加であるから

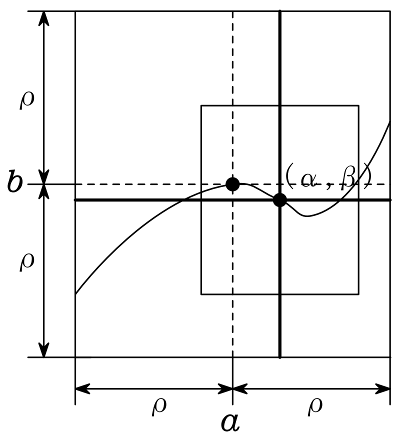
中間値の定理により

$f(x, y) = 0$

を満たす y がただ一つ存在する。その y を $g(x)$ とする。

● g がa で連続であることを示す。





$|x - a| < \delta$ ($\delta \leqq \rho$) → $f(x, y) = 0$ を満たす $y = g(x)$ は $b - \varepsilon$ と$b + \varepsilon$ の間にあるから $|g(x) - b| < \varepsilon$

● $g'(x) = -\dfrac{D_1f(x\ ,\ g(x))}{D_2f(x\ ,\ g(x))}$

$x \in I$ において $D_2f(x\ ,\ g(x)) > 0$ であり、$D_1f(x\ ,\ y)\ ,\ D_2f(x\ ,\ y)$ はともに連続なので、g' も連続である。

● 注意について

$\gamma(x) = (x\ ,\ g(x))$ とおけば、微分鎖律により

$$\frac{d}{dx}f(\gamma(x)) = grad\ f(\gamma(x))\cdot\gamma'(x) = (D_1f(x\ ,\ y)\ ,\ D_2f(x\ ,\ y))\begin{pmatrix}1\\ g'(x)\end{pmatrix}$$

（P.180　定理3）

(2) $D_i g(\tilde{x}) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = -\dfrac{D_i f(\tilde{x}\ ,\ g(\tilde{x}))}{D_n f(\tilde{x}\ ,\ g(\tilde{x}))}$

$\tilde{x}$ を V の任意の点とし、$|h| \neq 0$ を十分小さい数として、

$\tilde{h} = (0\ ,\ \cdots\ ,\ 0\ ,\ \overset{\overset{i}{\vee}}{h}\ ,\ 0\ ,\ \cdots\ ,\ 0)$ を加えた $\tilde{x}+\tilde{h}$ も V に属するとする。

$g(\tilde{x}) = y\ ,\ g(\tilde{x}+\tilde{h}) = y+k$ とし

$x = (\tilde{x}\ ,\ y)\ ,\ h = (\tilde{h}\ ,\ k) = (0\ ,\ \cdots\ ,\ 0\ ,\ \overset{\overset{i}{\vee}}{h}\ ,\ 0\ ,\ \cdots\ ,\ 0\ ,\ \overset{\overset{n}{\vee}}{k})$

とおく。そのとき多変数関数に関する平均値の定理によって

$f(x+h)-f(x) = grad\ f(x+\theta h)\cdot h$

を満たす θ（$0 < \theta < 1$）が存在する。

$f(x) = 0$ ， $f(x+h) = f(\tilde{x}+\tilde{h}\ ,\ g(\tilde{x}+\tilde{h})) = 0$

であるから、

$(D_1 f(x+\theta h)\ ,\ \cdots\ ,\ D_i f(x+\theta h)\ ,\ \cdots\ ,\ D_n f(x+\theta h))\cdot h = 0$

$D_i f(x+\theta h)h+D_n f(x+\theta h))k = 0$

$$\frac{g(\tilde{x}+\tilde{h})-g(\tilde{x})}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{D_i f(x+\theta h)}{D_n f(x+\theta h))}$$

左辺は $h \to 0$ としたときの $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ であり、$h \to 0$ なので $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} = -\dfrac{D_i f(x)}{D_n f(x)}$

（P.183　定理3　ラグランジュ乗数法）

$F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}) = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}, g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}))$

とおく。$F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1})$，$g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1})$ を x_i の関数とみなせば、$\gamma(x_i) = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}, g(x_i))$ として

$\dfrac{d\gamma}{dx_i}(x_i) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, D_i g(x_i))$ なので、微分鎖律により

$D_i f(\gamma(x_i)) = grad\, f(\gamma(x_i)) \cdot D_i \gamma(x_i)$

$= (D_1 f(x), \cdots, D_i f(x), \cdots, D_n f(x)) \cdot \dfrac{d\gamma}{dx_i}(x_i)$

$= D_i f(x) + D_n f(x) D_i g(x_i)$

また、$D_i F(\tilde{a}) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1)$ なので

$D_i F(\tilde{a}) = D_i f(a) + D_n f(a) \dfrac{\partial}{\partial x_i} g(\tilde{a}) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1)$

（P.185　例1）

$y - 2\lambda x = 0 \rightarrow y = 2\lambda x$

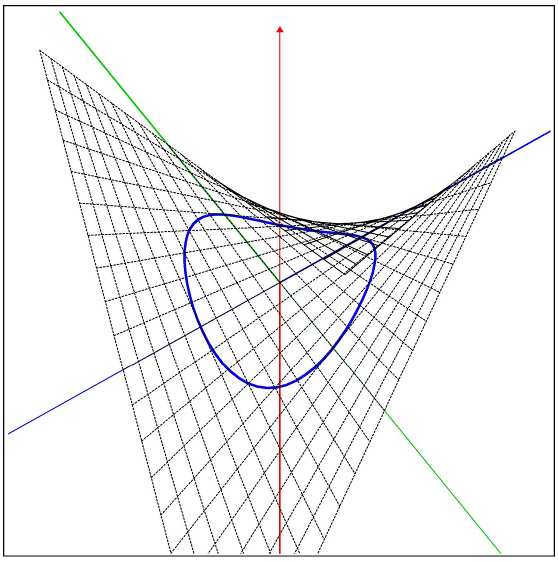
$x - 2\lambda y = 0 \rightarrow x = 2\lambda y$

$x^2 + y^2 = 4\lambda^2 x^2 + 4\lambda^2 y^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2) \rightarrow 4\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$

$\lambda = \dfrac{1}{2}$ の場合 $y = x$ となり

$2x^2 = 1$ から $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ この場合

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$\lambda = -\dfrac{1}{2}$ の場合 $y = -x$ となり

$2x^2 = 1$ から $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ この場合

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(P.186　例2)

$$a_1\frac{\lambda a_1}{2}+\cdots+a_1\frac{\lambda a_1}{2}=k \to \lambda(a_1^2+\cdots+a_n^2)=2k \to \lambda=\frac{2k}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

よって ② より

$$x_i=\frac{a_ik}{a_1^2+\cdots+a_n^2} \to x_1^2+\cdots+x_n^2=\frac{k^2}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)^2}(a_1^2+\cdots+a_n^2)=\frac{k^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

● 最小点であることの理由

$x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqq |\frac{k}{a_1}|^2$ かつ $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=k$ を満たす集合を S とすれば、S はコンパクトであり、点 $(\frac{k}{a_1}, 0, \cdots, 0)$ は S に含まれ、そのときの f の値は $\frac{k^2}{a_1^2}$ で $\frac{k^2}{a_1^2} \geqq \frac{k^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ である。また③で求めた点を P とすれば f の対称性から、P の近傍で符号は一定であるので鞍点ではない。最大点でないことはわかっているので、③で求めた点は S の内点であり、最小点ということになる。(P.166 参照)

(境界点でのチェックなしに最小点であることを決断できるか疑問である。次の注意の内容が決定的である。)

(P.186　例3)

s は定数なので、$f(x, y, z)=(s-x)(s-y)(s-z)$ としている。

$$\begin{cases} -(s-y)(s-z)-\lambda=0 \cdots ① \\ -(s-x)(s-z)-\lambda=0 \cdots ② \\ -(s-x)(s-y)-\lambda=0 \cdots ③ \\ x+y+z=2s \cdots ④ \end{cases}$$

一番長い辺を z とすると

三角不等式で $z \leqq x+y \to 2z \leqq x+y+z \to z \leqq \frac{2s}{2}=s$

$z=s$ のとき三角形は直線となってしまうので、そのときの面積は 0 となる。よって $z<s$ としてよい。当然 $x<s$, $y<s$ である。

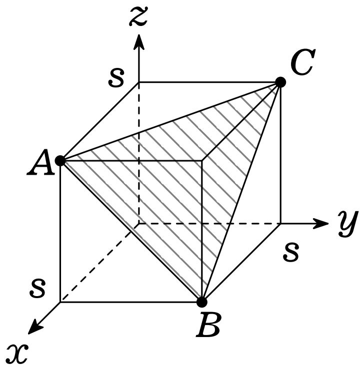
①、②から

$$(s-y)(s-z)=(s-x)(s-z) \to (s-y)=(s-x) \to x=y$$

②、③から

$(s-z)=(s-y) \to y=z$

④から $3x=2s \to x=y=z=\dfrac{2}{3}s$



3点 A , B , C は平面 ① の上にある。

右図の△ABC 上の点は ① を満たしている。

そしてこの△ABC 上の点の集合を E とすれば、E はコンパクトである。

点 A , B , C では $f=0$

辺AB 上では $x=s$ なので $f=0$ 同様に、辺AC , 辺BC 上で $f=0$ である。

したがって、E の境界点で $f=0$ である。S の内部では $f>0$ なので最大点は E の内部の点である。したがってそれは f の臨界点である。

以上によって、$(\frac{2}{3}s\ ,\ \frac{2}{3}s\ ,\ \frac{2}{3}s)$ が最大点となり、そのときの面積は

$$\sqrt{s\left(\frac{s}{3}\right)^3}=\sqrt{\frac{s^4}{3^3}}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

(P.191　定理1)

$f(x)$ は S で一様連続であるということは、任意の ε > 0 に対し、ある δ > 0 が存在し、$d(x-x')<\delta$ となる任意の x , x' に対して、$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ が成り立つ。

ただし、この δ は x , x' の選び方には依存しない。

この定理の証明では、$x=(x\ ,\ y)$ としたとき、x を 区間 $[a\ ,\ b]$ で止めて考えているので、$|(x\ ,\ y)-(x\ ,\ y')|<\delta \ \to\ |y-y'|<\delta$ としている。

● ϕ_1 を $[a\ ,\ b]$ で連続な関数、ϕ_2 を $[c\ ,\ d]$ で連続な関数とする。

$\phi(x\ ,\ y)=\phi_1(x)\phi_2(y)$

とすれば、

$$I(\phi)=\int_c^d\left[\int_a^b \phi(x\ ,\ y)dx\ \right]dy=\int_c^d\left[\int_a^b \phi_1(x)\phi_2(y)dx\ \right]dy$$

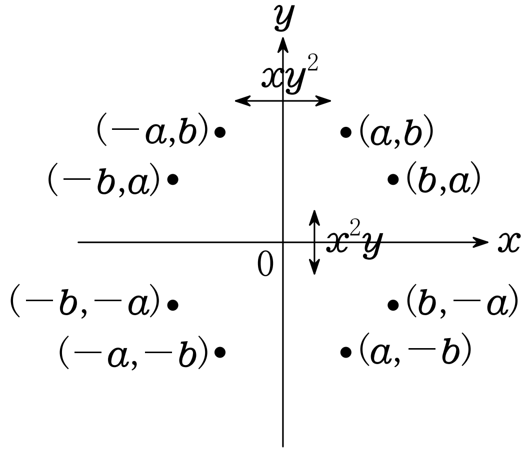
$$=\int_a^b \phi_1(x)dx\cdot\int_c^d \phi_2(y)dy$$

$$I'(\phi) = \int_a^b [\int_c^d \phi(x, y)dx\,]dy = \int_a^b [\int_c^d \phi_1(x)\phi_2(y)dx\,]dy$$

$$= \int_c^d \phi_2(y)dy \cdot \int_a^b \phi_1(x)dx$$

$$I(\phi) = I'(\phi)$$

● S の点を分離することについては、$x \neq x'$ に対して $\phi(x) \neq \phi(x)$ となる $\phi \in \mathcal{A}$ が存在することを確かめればよい。



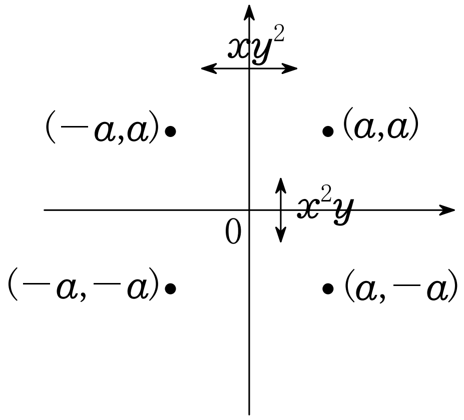
($0 < a < b$ の場合)

この場合は

$a^2b - ab^2 = ab(a-b) \neq 0$ なので

x^2y , xy^2 のいずれかで

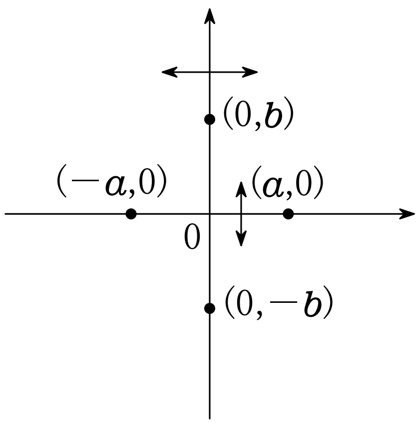
分離できる。



($0 < a = b$ の場合)

xy^2 , x^2y のいずれかで

分離できる。



(どちらか 0 の場合)

$(x+1)y$, $x(y+1)$ のいずれかで

分離できる。

$(0,0)$ と $(\pm a,0)$ の場合は $x(y+1)$

$(0,0)$ と $(0,\pm b)$ の場合は $(x+1)y$

以上により、分離できるϕが存在する。(もっと上手い証明はないだろうか？)

● 零化に関しては$(x-m)(y-n)$という形の関数でm , nを調整すればよい。

この定理は他書では、$f(x , y)$がSで可積分であることを仮定として

$$\int_S f(x , y)dS = \int_c^d \int_a^b f(x , y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x , y)dxdy$$

としている。まだ重積分を定義してない状態で右の等号が成り立つことを示したことはすばらしい。

(P.194　定理3)

$a \leqq u \leqq b$, $a \leqq v \leqq b$として、3変数の関数

$$\Phi(y ; u , v) = \int_u^v f(x , y)dx$$

を考える。この段階では、y , u , vは唯の独立変数と考える。そして、定理2の仮定から$S = [a , b]\times I$であり、$D_2f(x , y)$がSで存在して連続である。

単なる偏微分なので、u , vを定数とみなせば、定理2によって

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v D_2f(x , y)dx$$

$D_2f(x , y)$はSで連続なので定理1から$\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$は$I$内の閉区間で連続である。

ここで次のことを証明する。

● $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$で定義された関数$f(x , y)$は$f(x , y) = g(y)$のとき、$g(y)$が$c \leqq y \leqq d$で連続ならば、$[a , b]\times[c , d]$で連続である。

(証) $\boldsymbol{a} = (a_1 , a_2)$, $\boldsymbol{x} = (x_1 , x_2)$とする。$g(y)$は連続なので、任意の$\varepsilon > 0$に対して、ある$\delta > 0$が存在して

$|a_2 - x_2| < \delta \rightarrow |g(a_2) - g(x_2)| < \varepsilon$　とすることができる。

このとき、任意のx , $x' \in [a , b]$に対して$f(x , y) = f(x' , y) = g(y)$なので

$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}| < \delta$　とすれば$|a_2 - x_2| \leqq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}|$から

$|f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})| = |g(a_2) - g(x_2)| < \varepsilon$　となる。

そこで、上のI内の閉区間を$[c , d]$とすれば$[a , b]\times[c , d] \subset S$となり、

$[a , b]\times[c , d]$で$\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$は連続となる。

また7．2節の定理3によって

$\int_u^v f(x\,,\,y)dx$ を v の関数とみれば $\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,v}=f(v\,,\,y)$ となり、S で連続である。

$\int_u^v f(x\,,\,y)dx$ を u の関数とみれば、$\int_u^v f(x\,,\,y)dx=-\int_v^u f(x\,,\,y)dx$ から

$\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,u}=-f(u\,,\,y)$ となり、S で連続である。

故に、$\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}$, $\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,v}$, $\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,u}$ は $[a\,,\,b]\times[c\,,\,d]$ で C^1 級となる。

したがって、P.136 系から Φ は $[a\,,\,b]\times[c\,,\,d]$ で微分可能となる。

次に $\gamma(y)=(y\,,\,u(y)\,,\,v(y))$ とすれば、微分鎖律から

$F(y)=\Phi(y\,;\,u(y)\,,\,v(y))$ であるから

$$F'(y)=\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\,,\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,u}\,,\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,v}\right)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{du}{dy}\\ \dfrac{dv}{dy}\end{pmatrix}=\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}+\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,v}\frac{dv}{dy}$$

$$=\int_{u(y)}^{v(y)} D_2 f(x\,,\,y)dx-f(u(y)\,,\,y)\frac{du}{dy}+f(v(y)\,,\,y)\frac{dv}{dy}$$

（P.195　例1）

$y=x^\alpha \to y=e^{\alpha\,\ell og\,x} \to t=\alpha\,\ell og\,x$ として $\dfrac{dt}{d\alpha}=\ell og\,x$

$$\to \int x^\alpha\,d\alpha=\frac{1}{\ell og\,x}\int e^t\,dt=\frac{x^\alpha}{\ell og\,x}+C$$

（P.195　例2）

$y=x^\alpha \to \ell og\,y=\alpha\,\ell og\,x \to \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial\,y}{\partial\,\alpha}=\ell og\,x \to y'=x^\alpha\ell og\,x$

$S=[0\,,\,1]\times(a\,,\,+\infty)$ とすると、$x^\alpha\ell og\,x$ は S で連続なので、α の関数

$F(\alpha)=\int_0^1 x^\alpha dx=\dfrac{1}{\alpha+1}$ は 定理2から α に関して $(a\,,\,+\infty)$ で微分可能で、

$$F'(\alpha)=\int_0^1 x^\alpha\ell og\,x\,dx=-\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

$y = x^{\alpha}\ell og\, x \to \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = \ell og\, x\, (x^{\alpha})' = x^{\alpha}(\ell og\, x)^2$

n 回微分すると

$\dfrac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = x^{\alpha}(\ell og\, x)^n$

$y = \dfrac{1}{\alpha+1} \to \dfrac{dy}{d\alpha} = (\dfrac{1}{t})' \times 1 = -\dfrac{1}{t^2} = -\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}$

もう一回 α で微分すると

$(-\dfrac{1}{(\alpha+1)^2})' = -1 \times (-2) \times t^{-3} = \dfrac{2}{(\alpha+1)^3}$

もう一回 α で微分すると

$(\dfrac{2}{(\alpha+1)^3})' = 2 \times (-3) \times t^{-4} = \dfrac{(-1)^3 \times 3!}{(\alpha+1)^4}$

n 回微分すると

$\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}(\ell og\, x)^n dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$

（P.196　例3）（まぎらわしいので、x , y を入れかえる。）

定理3をまとめておくことにする。

> $f(x, y)$ は R^2 の領域 $S = [a, b] \times I$ で定義された連続関数とする。ただし、I は R のある区間である。$u(y)$, $v(y)$ は $a \leqq u(y) \leqq b$, $a \leqq v(y) \leqq b$ を満たす C^1級の関数とする。そのとき、$D_2 f(x, y)$ が S で存在して連続ならば
>
> $\displaystyle F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)dx$
>
> とおけば
>
> $\displaystyle F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} D_2 f(x, y)dx - f(u(y), y)\frac{du}{dy} + f(v(y), y)\frac{dv}{dy}$

$f(y)$ は原点を含むある区間 I で連続であるとし、$y \in I$ に対して

$\displaystyle F_n(y) = \int_0^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)dx \qquad (n = 2, 3, \cdots)$

とおく。特に $n=1$ のときには次のようにする。

$$F_1(y)=\int_0^y f(x)dx$$

$\phi(x,y)=\dfrac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(x)$ （$n=2,3,\cdots$）とすれば ϕ は $S=[a,b]\times I$ で連続である。$v(y)=y$ とし、$v(y)$ は C^1 級であり、$a \leqq v(y) \leqq b$ とする。定理3から

$$F_n'(y)=\int_0^y D_2\phi(x,y)dx+\phi(y,y)$$

$$=\int_0^y \frac{(y-x)^{n-2}}{(n-2)!}f(x)dx+\frac{(y-y)^{n-1}}{(n-1)!}f(y)=\int_0^y \frac{(y-x)^{n-2}}{(n-2)!}f(x)dx=F_{n-1}(y)$$

$$F_n'(y)=F_{n-1}(y) \quad \cdots \text{①}$$

$$F_1'(y)=f(y) \qquad \cdots \text{②}$$

①、②から $F_3'(y)=F_2(y) \ \rightarrow \ F_3''(y)=F_2'(y)=F_1(x) \ \rightarrow \ F_3'''(y)=f(x)$ となり

$$\frac{d^n}{dy^n}F_n(y)=f(y) \quad \cdots \text{③}$$

$F_n(y)=\displaystyle\int_0^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(x)dx$ （$n \geqq 2$）から

$F_n^{(n-1)}(y)=\displaystyle\int_0^y \frac{(y-x)^{n-(n-1)}}{(n-(n-1))!}f(x)dx=\int_0^y \frac{(y-x)}{1!}f(x)dx$ だから

$$F_n(0)=F_n'(0)=\cdots=F_n^{(n-1)}(y)=0$$

となる。

（P.197　広義積分の一様収束）

$f(x,y)$ が R^2 の領域 $S=[a,+\infty)\times I$ で連続であるとする。各 $y\in I$ に対し $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ が収束するとし、それを y の関数として $F(y)$ とする。

$t>a$ として、$f(x,y)$ は連続なので可積分であり、$F_t(y)$ を次のように定義する。

$$F_t(y)=\int_a^t f(x,y)dx$$

このとき、任意の $\varepsilon>0$ に対し、y に無関係な実数 K が存在して、$t>K$ である限

り、すべての $y \in I$ に対して

$$|F(y)-F_t(y)| = \left|\int_a^{+\infty} f(x, y)dx - \int_a^t f(x, y)dx\right| = \left|\int_t^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

となるとき、$F_t(y)$ は $F(y)$ に一様収束するという。

（P.198　定理4）

定理1から $f(x, y)$ は $S' = [a, t]\times[c, d]$ で連続なので、$F_t(y) = \int_a^t f(x, y)dx$ は $y \in [c, d]$ で連続である。仮定により $t \to +\infty$ のとき $F_t(y)$ は $F(y)$ に一様収束するのであるから、広義積分

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

は各 y に対し存在し、命題1から $F(y)$ は連続である。よって、$\int_c^d F(y)dy$ は確定する。さらに命題2から

$$\int_c^d F(y)dy = \lim_{t\to+\infty}\int_c^d F_t(y)dy$$

$\lim_{t\to+\infty}\int_c^d F_t(y)dy$ は確定する。しかるに定理1によって

$$\int_c^d F_t(y)dy = \int_c^d\int_a^t f(x, y)dxdy = \int_a^t\int_c^d f(x, y)dxdy$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\int_c^d f(x, y)dxdy = \lim_{t\to+\infty}\int_c^d F_t(y)dy$$

なので $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\int_c^d f(x, y)dxdy$ は確定し $\int_a^{+\infty}\int_c^d f(x, y)dxdy$ と表すことができる。よって

$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^{+\infty}\int_c^d f(x, y)dxdy$$

● 有限区間における広義積分に命題1，2を置きかえる。

（命題1'）

関数 $f_\alpha : I \to R$ が連続で、$\alpha \to \alpha_0+0$ のとき f_α が I で f に一様収束するならば、f も I で連続である。

（証）x_0 を I の任意の 1 点とする。$\varepsilon > 0$ に対し、ある $\eta > 0$ が存在し、

$0 < \alpha - \alpha_0 < \eta$ を満たすすべての α とすべての $x \in I$ に対して

$|f_\alpha(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

が成り立つ。また、f_α は I で連続なので、ある $\delta>0$ が存在して、$|x-x_0|<\delta$ なるすべての x に対して

$|f_\alpha(x)-f_\alpha(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

が成り立つ。よって $|x-x_0|<\delta$ ならば、

$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_\alpha(x)+f_\alpha(x)-f_\alpha(x_0)+f_\alpha(x_0)-f(x_0)|$

$\leqq|f(x)-f_\alpha(x)|+|f_\alpha(x)-f_\alpha(x_0)|+|f_\alpha(x_0)-f(x_0)|$

$<\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

よって f は x_0 で連続である。

（命題2'）

f_α が区間 $[a, b]$ で連続な関数で、$\alpha\to\alpha_0+0$ のとき f に一様収束するとする。そのとき

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0+0}\int_a^b f_\alpha(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ。

（証）一様収束性より、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある $\delta>0$ が存在して $0<\alpha-\alpha_0<\delta$ なるすべての α とすべての $x\in[a, b]$ に対して

$|f_\alpha(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$

が成り立つ。よって

$\left|\int_a^b f_\alpha-\int_a^b f\right|\leqq\int_a^b|f_\alpha-f|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}\times(b-a)=\varepsilon$

となる。

（定理4'）　有界区間の広義積分に置きかえる。（直線 $x=a$ 上で不連続）

$f(x, y)$ は $S=(a, b]\times[c, d]$ で連続であるとする。$a<t\leqq b$ とし

定理1から $f(x, y)$ は $S'=(t, b]\times[c, d]$ で連続なので、$F_t(y)=\int_t^b f(x, y)dx$ は $y\in[c, d]$ で連続である。仮定により $t\to a+0$ のとき $F_t(y)$ は $F(y)$ に一様収束するのであるから、広義積分

$$\int_a^b f(x\,,\,y)dx$$

は各 $y \in [c\,,\,d\,]$ に対し収束し、$F(y) = \int_a^b f(x\,,\,y)dx$ と定義でき、命題1’から

$F(y)$ は $[c\,,\,d]$ で連続である。したがって $\int_c^d F(y)dy$ は確定する。

命題2’により

$$\int_c^d F(y)dy = \lim_{t \to a+0} \int_c^d F_t(y)dy$$

が成り立つ。つまり $\lim_{t \to a+0} \int_c^d F_t(y)dy$ が確定する。

しかるに定理1によって

$$\int_c^d F_t(y)dy = \int_c^d \int_t^b f(x\,,\,y)dxdy = \int_t^b \int_c^d f(x\,,\,y)dxdy$$

よって

$$\lim_{t \to a+0} \int_c^d F_t(y)dy = \lim_{t \to a+0} \int_t^b \int_c^d f(x\,,\,y)dxdy$$

から $\lim_{t \to a+0} \int_t^b \int_c^d f(x\,,\,y)dxdy$ は確定し、これを $\int_{\to a}^b \int_c^d f(x\,,\,y)dxdy$ とし

$$\int_c^d F(y)dy = \int_{\to a}^b \int_c^d f(x\,,\,y)dxdy$$

となる。

（定理5’）　有界区間の広義積分に置きかえる。(直線 $x = a$ 上で不連続)

$S = (a\,,\,b] \times I$ とし

$G(y) = \int_{\to a}^b D_2 f(x\,,\,y)dx\,,\ G_t(y) = \int_t^b D_2 f(x\,,\,y)dx$ とおけば、$G_t(y)$ は連続で

$G(y)$ に一様収束するのであるから、$G(y)$ は I で連続である。続きは定理4’から

導き出せる。

（P.200　定理6）

各 $y \in I$ に対し

$\int_a^{+\infty} f(x\,,\,y)dx$ は上巻P.260 定理3、または P.261 系により

$$\int_a^{+\infty} |\, f(x\,,\,y)\,| dx \leqq \int_a^{+\infty} \phi(x)dx$$

であるから絶対収束する。したがって

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$ ← この収束は一様収束のターゲットになる。

とする。次に一様収束の定義から、$t > a$ として $f(x, y)$ は連続なので

$$F_t(y) = \int_a^t f(x, y)dx$$

と定義できる。そして、任意の $\varepsilon > 0$ に対して実数 K が存在して、$t > K$ なるすべての t に対して

$$\int_t^{+\infty} \phi(x)dx < \varepsilon$$

とできるので、任意の $y \in I$ に対して

$$|F(y) - F_t(y)| = \left|\int_t^{+\infty} f(x, y)dx\right| \leqq \left|\int_t^{+\infty} |f(x, y)|dx\right| \leqq \int_t^{+\infty} \phi(x)dx$$

から、y に関して一様収束する。

● 任意の $\varepsilon > 0$ に対して実数 K が存在して、$t > K$ なるすべての t に対して

$$\left|\int_t^{+\infty} \phi(x)dx\right| = \int_t^{+\infty} \phi(x)dx < \varepsilon$$

については $\int_a^{+\infty} \phi(x)dx$ が存在するのであるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある実数 K が存在して $t > K$ なるすべての t に関して

$$\left|\int_a^{+\infty} \phi(x)dx - \int_a^t \phi(x)dx\right| = \int_t^{+\infty} \phi(x)dx < \varepsilon$$

とならなければならない。

● この定理を有界区間の広義積分の形にする。

$f(x, y)$ が $S = (a, b] \times I$ で定義された連続関数とする。

(ⅰ) $(a, b]$ で定義されたある連続関数 $\phi(x)$ が存在して、任意の $y \in I$ に対し

$$|f(x, y)| \leqq \phi(x)$$

(ⅱ) $\int_{\to a}^{b} \phi(x)dx$ が収束する。

上の二つが満たされたとき、$\int_t^b f(x, y)dx$ は $t \to a$ のとき、y に関して一様収束する。つまり、$F(y) = \int_{\to a}^{b} f(x, y)dx$ に一様収束するので、$F(y)$ は I で連続となる。

(略証) $\left|\int_t^b f(x, y)dx\right| \leqq \int_t^b |f(x, y)|dx \leqq \int_t^b \phi(x)dx < \varepsilon$

(P.200　例1)

$y = x^{s-1} \to \ell og\, y = (s-1)\ell og\, x \to \dfrac{y'}{y} = \ell og\, x \to y' = x^{s-1}\ell og\, x$

ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は、$s > 0$ に対し

● $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \quad \to \quad \Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\ell og\, x\, dx$

(証) 次のように区間にわける。

$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx = F_1(s) + F_2(s)$

$\Gamma'(s) = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\ell og\, x\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\ell og\, x\, dx = G_1(s) + G_2(s)$

上巻 P.291 定理4から、$F_1(s)$, $F_2(s)$ は、$s > 0$ に対し収束する。

定理5、6を有界区間の形に書き直す。

(定理5')

$f(x, y)$ は $S = (a, b] \times I$ で定義された連続関数であるとする。

(ⅰ) 各 $y \in I$ に対し、$\int_{\to a}^b f(x, y)dx$ は収束する。それを $F(y)$ とおく。

(ⅱ) S で $D_2 f(x, y)$ は連続で $F_t(y) = \int_t^b D_2 f(x, y)dx$ が $y \in I$ に関し $t \to a$ のとき $F(y)$ に一様収束する。

上の二つが満たされたとき、 $F'(y) = \int_{\to a}^b D_2 f(x, y)dx$

(定理6')

(ⅰ) $(a, b]$ で定義されたある連続関数 $\phi(x)$ が存在して、任意の $y \in I$ に対し $|f(x, y)| \leqq \phi(x)$

(ⅱ) $\int_{\to a}^b \phi(x)dx$ が収束する。

上の二つが満たされたとき、$\int_t^b f(x, y)dx$ は $t \to a$ のとき、y に関して一様収束する。つまり、$F(y) = \int_{\to a}^b f(x, y)dx$ に一様収束するので、$F(y)$ は I で連続となる。

● 区間 $(0\ ,\ 1]$

$S = (0\ ,\ 1]\times(0\ ,\ +\infty)$ として $s \in I = (0\ ,\ +\infty)$ で $F_1{}'(s) = G_1(s)$ を証明する。

（準備） $0 < \alpha$ のとき $x^{\alpha}\ell og\ x \to 0$（$x \to 0+$）

（証）$-t = \ell og\ x$ とすれば $\ell og\ x^{\alpha} = \alpha\ell og\ x = -\alpha t \ \to x^{\alpha} = e^{-\alpha t}$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ell og\ x = \lim_{t\to +\infty} -te^{-\alpha t} = \lim_{t\to +\infty} -\frac{t}{e^{-\alpha t}} = 0$$ （上巻 P.167 定理2）

$G_1(s) = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x\ dx$ は $s \leqq 1$ ならば広義積分になる。

いま $s_1 > 0$ を一つ固定する。$0 < \delta < s_1$ なる δ をとれば、任意の $s \geqq s_1$ に対し区間 $0 < x \leqq 1$ で

$|\ e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x\ | \leqq |\ e^{-x}x^{s_1-1}\ell og\ x\ | = |\ e^{-x}x^{\delta-1+s_1-\delta}\ell og\ x\ |$

$= e^{-x}x^{\delta-1}|\ x^{s_1-\delta}\ell og\ x\ |$

となり、$s_1 - \delta > 0$ なので、上の準備から $x^{s_1-\delta}\ell og\ x \to 0$（$x \to 0+$）

よってある定数 M が存在して、$0 < x \leqq 1$ で

$|\ e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x\ | \leqq Me^{-x}x^{\delta-1}$

が成り立つ。ここで $\phi(x) = Me^{-x}x^{\delta-1}$ とすれば、定理6’において

（ i ） $\phi(x)$ は $(0\ ,\ 1]$ において連続であり、任意の $s \in I$ に対して

$|\ e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x\ | \leqq \phi(x)$

（ ii ） $\int_{\to 0}^1 Me^{-x}x^{\delta-1}dx = M\int_{\to 0}^1 e^{-x}x^{\delta-1}dx$ は $\delta > 0$ なので収束する。

よって $s \geqq s_1$ において $\int_t^1 e^{-x}x^{s-1}\ell og\ xdx\ (t \to 0)$ は一様収束する。そして

その極限は定理5’から $\left(\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx\right)' = F_1{}'(s)$ に等しい。つまり

$F_1{}'(s) = G_1(s)$

s_1 は任意であったから、いくらでも小さくできるので $s > 0$ において

$F_1{}'(s) = G_1(s)$

● 区間 $[1\ ,\ +\infty)$

$S = [1\ ,\ +\infty]\times I$ として $s \in I$ で $F_2{}'(s) = G_2(s)$ を証明する。

$s_2>0$ を一つ固定し、$s \leqq s_2$ ならば x の区間 $[1\ ,\ +\infty)$ で

$$e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x = e^{-x}x^{s}\ \frac{\ell og\ x}{x} \leqq e^{-x}x^{s_2}\ \frac{\ell og\ x}{x}$$

となり、$\dfrac{\ell og\ x}{x} \to 0\ (x \to +\infty)$（上巻 P.167 定理3）

よってある定数 M が存在して、$1 \leqq x < +\infty$ で

$$|\ e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x\ | = e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x \leqq Me^{-x}x^{s_2}$$

が成り立つ。ここで $\phi(x) = Me^{-x}x^{s_2}$ とすれば、定理6において

（ i ）$\phi(x)$ は $[1\ ,\ +\infty)$ において連続であり、任意の $s \in I$ に対して

$$|\ e^{-x}x^{s-1}\ell og\ x\ | \leqq \phi(x)$$

（ ii ）$\displaystyle\int_1^{+\infty} Me^{-x}x^{s_2}dx = M\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s_2}dx$ は $s_2>0$ なので収束する。

よって $s \leqq s_2$ において $\displaystyle\int_1^{t} e^{-x}x^{s-1}\ell og\ xdx\ (t \to +\infty)$ は一様収束する。そしてその極限は定理5から $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx\right)' = F_2'(s)$ に等しい。つまり

$$F_2'(s) = G_2(s)$$

s_1 は任意であったから、いくらでも大きくできるので $s>0$ において

$$F_2'(s) = G_2(s)$$

ゆえに $s>0$ において $\Gamma'(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\ell og\ xdx$

となる。

（解析入門 Ⅰ　杉浦光夫 著　東大出版 P.326 以降が詳しい。）

（P.202　例2）

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin\ x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ の証明　（上巻 P.290 例）

（証）a , b を定数、$a>0$ とする。

$$\int e^{-ax}cos\ bx\ dx = \frac{e^{-ax}(bsin\ bx - acos\ bx)}{a^2+b^2} \quad \leftarrow \text{ 上巻 P.270 例2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}cos\ bx\ dx = 0 - \frac{-a}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \cdots\ ①$$

ここで、上の積分を $S = [0\ ,\ +\infty)\times I$ とし $(x\ ,\ b) \in S$ に対し

$f(x\ ,\ b) = e^{-ax}\cos bx$ とみる。

したがって $|\,e^{-ax}\cos bx\,| \leqq e^{-ax}$

$\int_0^{+\infty} f(x\ ,\ b)dx$ は収束する。定理6から $0 \leqq x < +\infty$ において $\phi(x) = e^{-ax}$ とすれば

（ｉ） $\phi(x)$ は $[0\ ,\ +\infty)$ で連続で、I に属する任意の b に対し

$|\,f(x\ ,\ b)\,| \leqq \phi(x)$

（ⅱ） $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$ となり収束する。

よって、b に関して $\int_0^{+\infty} f(x\ ,\ b)dx$ に一様収束するので、定理4から $[0\ ,\ b] \subset I$ としたとき、

$$F(b) = \int_0^{+\infty} f(x\ ,\ b)dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\ dx \text{ は } [0\ ,\ b] \text{ で連続で}$$

$$\int_0^{b} F(b)db = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{b} e^{-ax}\cos bx\ db\right)dx \text{ となる。}$$

$t = bx$ とすれば $\dfrac{dt}{db} = x \to db = \dfrac{1}{x}dt$

$$\int_0^{b} e^{-ax}\cos bx\ db = \frac{e^{-ax}}{x}[\sin bx]_0^{b} = \frac{e^{-ax}}{x}\sin bx$$ ← bx の b に b を代入

よって①の左辺を b に関して 0 から b まで定積分すると

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{b} e^{-ax}\cos bx\ db\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx$$

また①の右辺は

$$\int_0^{b}\frac{a}{a^2+b^2}db = arc\ tan\ \frac{b}{a}$$ ← 上巻 P.252 定理1 (e)

①から

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx = arc\ tan\ \frac{b}{a} \quad \cdots \ ②$$

を得る。

準備 1

$f = x$, $g = arctan\,\dfrac{x}{a}$ $\rightarrow f\,' = 1$

$tan\,g = \dfrac{x}{a}$ $\rightarrow$ $(tan\,g)^2 = \dfrac{sin^2 g}{cos^2 g} = \dfrac{1-cos^2 g}{cos^2 g} = \dfrac{x^2}{a^2}$

$\rightarrow$ $cos^2 g(\dfrac{x^2}{a^2}+1) = 1$ $\rightarrow$ $cos^2 g = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2}+1} = \dfrac{a^2}{x^2+a^2}$ … ①

$tan\,g = \dfrac{x}{a}$ の両辺を x で微分して、①を代入すると

$\dfrac{sin^2 g+cos^2 g}{cos^2 g}g\,' = \dfrac{1}{a}$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{cos^2 g}g\,' = \dfrac{1}{a}$ $\rightarrow g\,' = \dfrac{cos^2 g}{a} = \dfrac{a}{x^2+a^2}$

$\int f\,'g = fg - \int fg\,'$ から

$$\int_0^b arctan\,\frac{x}{a}dx = \left[x\,arctan\,\frac{x}{a}\right]_0^b - \int_0^b \frac{ax}{x^2+a^2}dx$$

$$= \left[x\,arctan\,\frac{x}{a}\right]_0^b - \frac{1}{2}a\int_0^b \frac{2x}{x^2+a^2}dx \quad \leftarrow \int\frac{f\,'}{f} = \ell og\,f$$

$$= \left[x\,arctan\,\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ell og(x^2+a^2)\right]_0^b$$

$$= b\,arctan\,\frac{b}{a} - \frac{a}{2}\ell og(b^2+a^2) + \frac{a}{2}\ell og(a^2) \quad \leftarrow \ell og(a^2) = 2\ell og\,a$$

$$= b\,arctan\,\frac{b}{a} - \frac{a}{2}\ell og(b^2+a^2) + a\ell og\,a$$

準備 2

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{sin\,bx}{x}dx$ の $x = 0$ はこの積分の特異点ではない。

$e^{-ax}\dfrac{sin\,bx}{x} = be^{-ax}\dfrac{sin\,bx}{bx} \rightarrow b$ ($x \rightarrow 0$)

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{sin\,bx}{x}dx = arc\,tan\,\frac{b}{a}$ この左辺の積分も b について一様収束する。

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx = \int_0^1 e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx$$

とすれば、1番目の項は確定する。2番目の項は、$x \geqq 1$ なので

$$\left| e^{-ax}\frac{\sin bx}{x} \right| \leqq e^{-ax}$$

上と同様に $S = [1, +\infty) \times I$ とし $(x, b) \in S$ に対し

$f(x, b) = e^{-ax}\dfrac{\sin bx}{x}$ とみる。

定理6から $1 \leqq x < +\infty$ において $\phi(x) = e^{-ax}$ とすれば

（ⅰ）$\phi(x)$ は $[1, +\infty)$ で連続で、I に属する任意の b に対し

$|f(x, b)| \leqq \phi(x)$

（ⅱ）$\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-ax}dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-a}$ となり収束する。

よって $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x, b)dx$ は収束する。つまり $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, b)dx$ は収束する。

よって、b に関して $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, b)dx$ に一様収束するので、定理4から $[0, b] \subset I$ としたとき

$F(b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, b)dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx$ は $[0, b]$ で連続で

$\displaystyle\int_0^b F(b)db = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^b e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}db\right)dx$ となる。

準備 3

$$\int_0^b e^{-ax}\frac{\sin tx}{x}dt = \frac{e^{-ax}}{x}\int_0^b \sin tx\, dt \quad \left(y = tx \text{ とすると } \frac{dy}{dt} = x \ \rightarrow \ dt = \frac{dy}{x} \right)$$

$$= \frac{e^{-ax}}{x^2}[-\cos tx]_0^b = \frac{e^{-ax}}{x^2}(1 - \cos bx)$$

②の左辺を b に関して 0 から b まで定積分すると

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^b e^{-ax}\cos bx\, db\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos bx}{x^2}dx$$

②の右辺については、準備 1から

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos bx}{x^2}dx$$

$$= b\arctan\frac{b}{a}-\frac{a}{2}\ell og(b^2+a^2)+a\ell og\ a$$

ここで $b=1$ とすれば

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \arctan\frac{1}{a}-\frac{a}{2}\ell og(1+a^2)+a\ell og\ a \quad \cdots \ ③$$

さて、ここまで $a>0$ として得たのであるが、$a \geqq 0$ なるとき $0 \leqq x < +\infty$ で

$$0 \leqq e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x^2} \leqq \frac{1-\cos x}{x^2}$$

準備 4

$$f=x\ ,\ g=\frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow f'=1\ ,\ g'=\frac{x^2\sin x-2x(1-\cos x)}{x^4}$$

$$=\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}$$

$\int f'g=fg-\int fg'$ に代入して

$$\int\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{1-\cos x}{x}-\int\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^2}dx$$

$$=\frac{1-\cos x}{x}-\int\left(\frac{2\cos x-2}{x^2}+\frac{x\sin x}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1-\cos x}{x}+2\int\frac{1-\cos x}{x^2}dx-\int\frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int\frac{1-\cos x}{x^2}dx=-\frac{1-\cos x}{x}+\int\frac{\sin x}{x}dx \quad \leftarrow \text{移項すると}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0\ ,\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ は収束することはわかっている。

したがって $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ は収束する。

$f(x\ ,a)=e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x^2}$ とみる。定理6から $\phi(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ とすれば

準備 4から $f(x, a)$ は $a \geqq 0$ で a に関して一様収束する。よって、$a=0$ で連続である。

ゆえに ③の左辺は $a \to 0$ のとき $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

右辺は $\arctan\frac{1}{a} - \frac{a}{2}\log(1+a^2) + a\log a \to \frac{\pi}{2}$ （$a \to 0$）

したがって

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2} \quad \cdots ④$$

準備 4から

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

（P.204　例3）

a を定数として、積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$ は $S=[0, +\infty)\times I$ で定義されているとする。$|e^{-x^2}\cos ax| \leqq e^{-x^2}$ であるから、定理6の $\phi(x)=e^{-x^2}$ とすれば $\phi(x)$ は $[0, +\infty)$ で連続で、任意の $a \in I$ に対し（ⅰ）、（ⅱ）を満たすので

$$J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$$

とすれば、任意の $a \in I$ に対し、$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$ は一様収束する。

$$f(x, a) = e^{-x^2}\cos ax$$

とすれば $D_2 f(x, a) = -xe^{-x^2}\sin ax$ であり

$\int_0^{+\infty} D_2 f(x, a)dx = \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin ax\,dx$ は $|-xe^{-x^2}\sin ax| \leqq xe^{-x^2}$ であるから、定理6の $\phi(x)=xe^{-x^2}$ とすれば、$\phi(x)$ は $[0, +\infty)$ で連続で、任意 $a \in I$ に対し（ⅰ）を満たす。

$t = x^2 \to \frac{dt}{dx} = 2x$ から $\to dx = \frac{1}{2x}dt$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

よって（ⅱ）を満たす。ゆえに a に関して一様収束することがわかったので、定

理5から

$$J'(a)=\int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin ax\,dx=\int_0^{+\infty}(-xe^{-x^2})\sin ax\,dx$$

$$f'=-xe^{-x^2},\ g=\sin ax \to f=\frac{1}{2}e^{-x^2},\ g'=a\cos ax$$

$\int_0^{+\infty} f'g=[fg]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} fg'$ に代入して

$$\int_0^{+\infty}(-xe^{-x^2})\sin ax\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin ax\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x^2}a\cos ax\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin ax\right]_0^{+\infty}-\frac{a}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos ax\,dx$$

$$=-\frac{a}{2}J(a)$$

よって

$$J'(a)=-\frac{a}{2}J(a)$$

（P.211　命題1）

$\sum_{h=1}^{\ell}\{c_{kh}(\sum_{i=1}^{m} b_{hi}a_{ij})\}=\sum_{i=1}^{m}\{(\sum_{k=1}^{\ell} c_{kh}b_{hi})a_{ij}\}$ について

予備定理

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$（Σ 記号の交換法則）

左辺は i を固定しておいて j を動かしたときの和の和、右辺は j を固定しておいて i を動かしたときの和の和である。なぜ一致するかは右図からわかる。

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}$$

$$\sum_{h=1}^{\ell}\{c_{kh}(\sum_{i=1}^{m} b_{hi}a_{ij})\}=\sum_{h=1}^{\ell}(\sum_{i=1}^{m} b_{hi}a_{ij}c_{kh})=\sum_{h=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_{hi}c_{kh}$$

ここで $d_{ih}=a_{ij}b_{hi}c_{kh}$（$j$, k は変化しない）とすれば、予備定理より

$$=\sum_{h=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{m} d_{ih}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{\ell} d_{ih}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{\ell} a_{ij}b_{hi}c_{kh}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{\ell} b_{hi}c_{kh}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\{(\sum_{h=1}^{\ell} b_{hi}c_{kh})a_{ij}\}$$

別の考え方としては、両辺とも同類項はなく ℓm 項ある。また、(i , h) を指定すれば、両辺とも $a_{ij}b_{hi}c_{kh}$ という項が一つずつ存在するので等号が成り立つ。

（P.213　命題5）

もし L が単射だとして、$v \neq 0$, $L(v) = 0$ となる v が存在したとしたならば $L(v) = L(0) = 0$ となり矛盾する。よって $v = 0$ 以外ない。

（P.214　命題7）

● もし他に $R(v_i) = w_i$ （ $i = 1, 2, \cdots, n$ ）があったとすれば、$L(v) = R(v)$ となる。

● $v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$ と一意的に表されるはずなので、$L(v_i) = w_i$

（P.215　命題8）

$L(v_i) = w_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする。

● L が全射ならば $L(V) = W$ なので、W の任意の元 w に対して $L(v) = w$ となる V の元 v が存在する。そのとき、$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ とすれば $L(v) = x_1L(v_1) + \cdots + x_nL(v_n) = w$ なので、$L(v_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は W を生成することになる。

単射ならば命題5から $L(v) = 0$ ならば $v = 0$ のときに限るので、$0 \in W$ に対して $0 = x_1L(v_1) + \cdots + x_nL(v_n)$ とおけば、$0 = L(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n)$ なので $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0$ でなければならない。したがって、$x_1 = \cdots = x_n = 0$ となり、$L(v_i)$ は一次独立となる。

● $L(v_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が W の基底ならば、W の任意の元 w に対し $w = y_1L(v_1) + \cdots + y_nL(v_n)$ とすることができるはずである。$y_1L(v_1) + \cdots + y_nL(v_n)$ $= L(y_1v_1 + \cdots + y_nv_n)$ なので、$v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ とすれば $v \in V$ となって $L(v) = w$ となる v が存在するので、L は全射となる。

また $L(v) = L(y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = 0$ とおけば $L(y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = y_1L(v_1) + \cdots + y_nL(v_n) = 0$ なので、$L(v_i)$ の一次独立性から $y_1 = \cdots = y_n = 0$ でなければならない。つまり $v = 0$ でなければならない。よって命題5から L は単射である。

● V , W が同型ならば $L : V \to W$ への同型写像が存在するので、V の底を v_i $(i = 1, \cdots, n)$ とすれば $L(v_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ は W の底になるので $dim\ V = dim\ W$ となる。
逆に $dim\ V = dim\ W$ ならば W の底 w_i と V の底 v_i は同数あることになる。
よって命題7から、$L(v_i) = w_i$ となる線型写像 L がただ一つ存在する。そして上の証明からこの L は同型写像でなければならないことになる。

（P.217　命題11）

この命題は数ベクトル空間について語っていることに注意したい。したがって底は標準基底であり、n 次元数ベクトル空間から m 次元数ベクトル空間への写像 L_A に限定している。
$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ とすれば p.210 の定義 ② から $A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ であり、$L_A(\boldsymbol{x}) = L_A(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$
$\boldsymbol{F}^m$ の底を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ とすれば、

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a}_1 & & \boldsymbol{a}_j & & \boldsymbol{a}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_ja_{1j} + \cdots + x_na_{1n})\boldsymbol{u}_1 + \cdots \\ &+ (x_1a_{i1} + \cdots + x_ja_{ij} + \cdots + x_na_{in})\boldsymbol{u}_i + \cdots \\ &+ (x_1a_{m1} + \cdots + x_ja_{mj} + \cdots + x_na_{mn})\boldsymbol{u}_m \end{aligned}$$

ここまでは写像としての対応である。
成分だけを見れば

$$\begin{pmatrix} x_1a_{11} + \cdots + x_ja_{1j} + \cdots + x_na_{1n} \\ \vdots \\ x_1a_{i1} + \cdots + x_ja_{ij} + \cdots + x_na_{in} \\ \vdots \\ x_1a_{m1} + \cdots + x_ja_{mj} + \cdots + x_na_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

（P.218　表現行列）　佐武流で行う。

V の底を $\alpha = \{v_1, \cdots, v_n\}$, W の底を $\beta = \{w_1, \cdots, w_m\}$ とする。L を V から W への線型写像とする。

$$L(\,v_1\,,\cdots,\,v_n\,)=(\,L(v_1)\,,\cdots,\,L(v_n)\,)=(\,w_1\,,\cdots,\,w_m\,)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\ \cdots\ ※$$

とおけば、$L(x)=y$ のとき

$$y=(\,w_1\,,\cdots,\,w_m\,)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=L(\,(\,v_1\,,\cdots,\,v_n\,)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})=L(\,x_1v_1+\cdots+x_nv_n\,)$$

$$=(\,L(v_1)\,,\cdots,\,L(v_n)\,)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\,L(\,v_1\,,\cdots,\,v_n\,)\,)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=(\,w_1\,,\cdots,\,w_m\,)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$(\,w_1\,,\cdots,\,w_m\,)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ は成分表示のように見えるが $y_1w_1+\cdots+y_mw_m$ というベクトルである。したがって、上の計算は線型写像によるベクトルの計算である。しかし

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

は成分間の計算である。この行列 $A=[\,L\,]_{\beta}^{\alpha}$ を L の表現行列と呼ぶ。

※ によって L から A を求めたが、逆に A から L を ※ を使って定めることができる。

（注意）命題11では $L_A(x)=Ax$ で直接定義したが、F^n , F^m が標準基底を使っていたためで、※からわかるように

※ $L_A(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \quad (j=1\,,2\,,\cdots,\,n)$

は P.218 の $L(v_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \quad (j=1\,,2\,,\cdots,\,n)$ の形をしていることからわかるよう

$$\left[L_A\right]_{e'}^{e}=A$$

となっている。

（P.219　命題13） 佐武流で行う。

V の底を $\alpha = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$, W の底を $\beta = \{ w_1 , \cdots , w_m \}$, Z の底を $\gamma = \{ u_1 , \cdots , u_\ell \}$ とし、$L : V \to W$, $M : W \to Z$ を線型写像とする。

$$L (v_1 , \cdots , v_n) = (w_1 , \cdots , w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdots ①$$

$$M(w_1 , \cdots , w_m) = (u_1 , \cdots , u_\ell) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell m} \end{pmatrix} \cdots ②$$

$L(x) = y$, $M(y) = z$ とする。

$$z = (u_1 , \cdots , u_\ell) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\ell \end{pmatrix} = M \circ L((v_1 , \cdots , v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = (M \circ L (v_1 , \cdots , v_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

①から

$$= M((w_1 , \cdots , w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = M((w_1 , \cdots , w_m) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix})$$

$$= M(w_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + \cdots + w_m \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j) = (M(w_1 , \cdots , w_m)) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

②から

$$= (u_1 , \cdots , u_\ell) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

$$= (u_1 , \cdots , u_\ell) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdots ③$$

一方

$$M \circ L(v_1 , \cdots , v_n) = (u_1 , \cdots , u_\ell) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell n} \end{pmatrix}$$

$$z=(u_1,\cdots,u_\ell)\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_\ell\end{pmatrix}=M\circ L((v_1,\cdots,v_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix})=(M\circ L(v_1,\cdots,v_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=(u_1,\cdots,u_\ell)\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ c_{\ell 1}&\cdots&b_{\ell n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

以上により

$$\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{\ell 1}&\cdots&b_{\ell m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=[M]^{\beta}_{\gamma}[L]^{\alpha}_{\beta}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ c_{\ell 1}&\cdots&b_{\ell n}\end{pmatrix}=[M\circ L]^{\alpha}_{\gamma}$$

（命題13）

各 $j=1,\cdots,n$ に対し $L(v_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i$ ， 各 $i=1,\cdots,m$ に対し $M(w_i)=\sum_{k=1}^{\ell}b_{ki}u_i$

$(M\circ L)(v_j)=M(L(v_j))=M(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}(M(w_i))=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}(\sum_{k=1}^{\ell}b_{ki}u_i)$

$=\sum_{k=1}^{\ell}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}b_{ki})u_i$

から証明しているが、少しややこしい。

（P.220　逆変換は線形変換）

$L(x)=y$, $L(x')=y'$ とおけば

$L^{-1}(y+y')=L^{-1}(L(x+x'))=x+x'=L^{-1}(y)+L^{-1}(y')$

$L^{-1}(\alpha y)=L^{1}(\alpha L(x))=L^{-1}(L(\alpha x))=\alpha x=\alpha L^{-1}(y)$

（P.220　命題14）

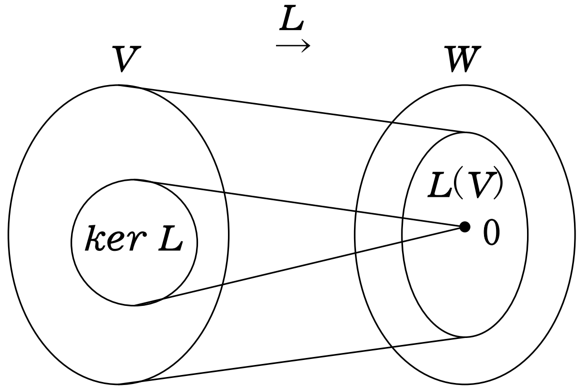
$B=BI=BAC=IC=C$

（P.222　核は部分空間）

w , $w'\in ker\ L$ とすれば、$L(w+w')=L(w)+L(w')=0+0=0$

$L(\alpha w)=\alpha L(w)=0$

（P.222　定理1）



L が単射ならば V の基底を

$\{ u_1 , \cdots , u_n \}$ として $L(u_i) = w_i$

とすれば $w_1 , \cdots , w_n$ は W_0 を

生成する。

次に $w_1 , \cdots , w_n$ が一次独立であるこ

とについては、$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0 \rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$

P.215 命題8を使えば、V と $L(V) = W_0$ は同型なので、$dim\ W_0 = n - 0$

（P.224　定理2）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ a_{s+1,1} & \cdots & a_{s+1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^s \\ a^{s+1} \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right] \text{一次独立} \\ \leftarrow a^k = \sum_{i=1}^{s} c_{ki} a^i \quad (k = s+1 , \cdots , m) \end{matrix}$$

$a^1 , \cdots , a^m$ の中かに s 個の一次独立のベクトルがあったとする。その添え字集合を大きさの順に並べて $S = (s_1 , s_2 , \cdots , s_s)$ とする。a^{s_i} ($1 \leqq i \leqq s$) は一次独立である。

すると S に含まれない添え字の $a^{k \notin S} = \sum_{i=1}^{s} c_{ki} a^{s_i}$ ($1 \leqq i \leqq s$) と書けるから

$x \in F^n$ が　$a^{s_1} x = 0 , \cdots , a^{s_s} x = 0$ を満たせば

$a^{k \notin S} x = (\sum_{i=1}^{s} c_{ki} a^{s_i}) x = 0$

● 行を変えても解空間は普遍

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

● A' は $s\times n$ 行列なので $\{\, A'x \mid x \in F^n \,\}$ の次元は s 以下である。

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & A' & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} a_{s+1,1} & \cdots & a_{s+1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

（P.227　空間 L（V,W)））

$(cL)(v+v') = cL(v+v') = cL(v)+cL(v') = (cL)(v)+(cL)(v') \rightarrow cL \in \mathfrak{L}(V,W)$

（P.228　行列環 $algebra$）

$\mathfrak{L}(F^n,F^m)$ はベクトル空間だが環ではない。なぜなら2つの行列が同じ $n\times m$ 行列ならば、その積が定義できない。したがって $\mathfrak{L}(F^n)$ でなければならない。
$\mathfrak{L}(V,W)$ についても同じことが言える。

（P.231　命題6）

$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\, a^i x \,)^2 = (\, a^1 x \,)^2+(\, a^2 x \,)^2+\cdots+(\, a^m x \,)^2$

$\leqq |a^1|^2|x|^2+|a^2|^2|x|^2+\cdots+|a^m|^2|x|^2 = (\, |a^1|^2+|a^2|^2+\cdots+|a^m|^2 \,)|x|^2 = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)|x|^2$

$|Ax| \leqq (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} |x|$

$(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} = \rho$ とみれば、命題4の (b) から $\|A\| \leqq (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$

（P.232　定理2）

● M が単射であることについては、P.213 命題5から、$M(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限ることをいえばよい。$M(0) = 0$ は明らかであるので $x \neq 0$ の場合 $M(x) \neq 0$ であることを示せばよい。その根拠が①である。

● Ω が開集合であることについては、L , M を標準基底に関して行列化すれば R^{n^2} の点として M の表現行列の近くに M の表現行列を選ぶことができるので、$<\lambda$ とすることができる。つまり、(a) を満たす M が存在する。
詳しくは、線形代数学　佐武一郎 著　裳華房 P.142

●$\| M^{-1}-L^{-1} \| \leqq \| M^{-1} \| \| L-M \| \| L^{-1} \|$ だと思う。

この写像が全射であることは明らかである。単射であることは、$M^{-1} = L^{-1}$ ならば任意の x に対し $M^{-1}(x) = L^{-1}(x)$ なので $x = ML^{-1}(x)$ となる。よって ML^{-1} は恒等写像なので、$(L^{-1})^{-1} = L = M$ となる。

(P.233　問題15．2,1)

(a) P.230 命題4から$L(x)$ は連続であり、P.108 命題1からノルムは連続なのでその合成関数は連続である。また $|x| \leqq 1$ はコンパクトな集合であるから、P.81 定理6から $\max_{|x|\leqq 1} | L(x) | = \sup_{|x|\leqq 1} | L(x) |$

(b) $\| L \| = \sup_{x\in X\,,\, x\neq 0} \dfrac{| L(x) |}{|x|}$ (スペクトルノルム・作用素ノルム・誘導ノルム)

この定義が大本で $\| L \| = \sup_{x\in X\,,\, x\neq 0} \dfrac{| L(x) |}{|x|}$ から

$\| L \| = \sup_{x\neq 0\,,\, |x|\leqq 1} | L(x) | = \sup_{|x|=1} | L(x) |$

(証)　$\alpha = \sup_{|x|=1} | L(x) |$，$\beta = \sup_{x\in X\,,\, x\neq 0} \dfrac{| L(x) |}{|x|}$ とする。

$\alpha = \sup_{x\in X\,,\, |x|=1} \dfrac{| L(x) |}{|x|}$ とも書けるので、$\{x\in X\,,\, |x|=1\} \subset \{x\in X\,,\, x\neq 0\}$ なので

上限の定義から $\alpha \leqq \beta$ である。

一方、$x \neq 0$ なる任意の $x \in X$ に対して $x' = \dfrac{x}{|x|}$ とおけば $|x'| = 1$ であるので $|x|$ はスカラーであることに注意して、上巻 P.352 定理4 と L は線型写像であることから

$$\frac{| L(x) |}{|x|} = \frac{| L(|x|x') |}{|x|} = \frac{|x|\, | L(x') |}{|x|} = | L(x') | \leqq \sup_{|x|=1} | L(x) | = \alpha$$

$x \neq 0$ なる任意の $x \in X$ に対して $\dfrac{| L(x) |}{|x|} \leqq \alpha$ から、最小上界である上限の定義から $\beta \leqq \alpha$

以上により $\alpha = \beta$ を得る。

次に $\sup_{|x|\leqq 1} | L(x) | = \gamma$ とすれば $\gamma \geqq \alpha$ である。

一方、$|x| \leqq 1$ ならば、$x=0$ も含めて $\dfrac{|L(x)|}{|x|} \geqq |L(x)|$ よって $\beta \geqq \gamma$

$\alpha = \beta$ だったので $\gamma = \alpha = \beta$ となる。

(求め方) $L(x) = Ax$ として、${}^{T}AA$ もしくは $A^{T}A$ の最大固有値の正の平方根で求めることができる。(線形代数学　佐武一郎 著　裳華房　P.162 注意参照)

(P.237　置換の符号)

$\{i, j\}$ が Ω 全体を動くとき $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ も Ω 全体を動く。

(例) $n = 3$ とする。

$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ としてみる。

$(\sigma(1), \sigma(2)) = (1, 3), (\sigma(1), \sigma(3)) = (2, 3), (\sigma(2), \sigma(3)) = (1, 2)$

(証) $(i, j) \neq (i', j')$ (注意 $(i, j) = (j, i)$)

$(\sigma(i), \sigma(j)) = (\sigma(i'), \sigma(j'))$ とすると、

$\sigma(i) = \sigma(i'), \sigma(j) = \sigma(j')$ であるか $\sigma(i) = \sigma(j'), \sigma(j) = \sigma(i')$ である。

σ は全単射なので前の方ならば $(i, j) = (i', j')$ となる。

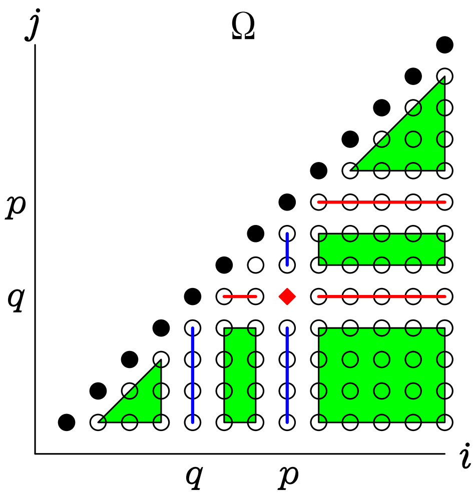
後ろの方ならば $i = j', j = i'$ となり、順番を入れかえただけなので同じ互換となる。よって、この写像は単射である。

全射であることは σ が全単射であることから明らかである。

(P.237　命題2)

Ω の (p, q) 以外の元は右図の青線赤線、緑の領域となる。

これらの領域を数学的に記述するとますます紛らわしくなるので、色で区別することにする。



$$s(\tau) = \prod_{(i,j)\in\Omega} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}$$

$$= \frac{\tau(p) - \tau(q)}{p - q} \cdot \prod_{\text{青線}} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \cdot \prod_{\text{赤線}} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \cdot \prod_{\text{緑領域}} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}$$

$$= \frac{q-p}{p-q} \cdot \prod_{\text{青線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \cdot \prod_{\text{赤線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \cdot \prod_{\text{緑領域}} \frac{i-j}{i-j}$$

$$= (-1) \cdot \prod_{\text{青線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \cdot \prod_{\text{赤線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \quad \cdots \text{①}$$

$$\prod_{\text{青線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} = \prod_{\text{青線1}} \frac{\tau(p)-\tau(j)}{p-j} \cdot \prod_{\text{青線2}} \frac{\tau(q)-\tau(j)}{q-j} = \prod_{\text{青線1}} \frac{q-\tau(j)}{p-j} \cdot \prod_{\text{青線2}} \frac{p-\tau(j)}{q-j}$$

$$= \prod_{\text{青線1}} \frac{q-j}{p-j} \cdot \prod_{\text{青線2}} \frac{p-j}{q-j}$$

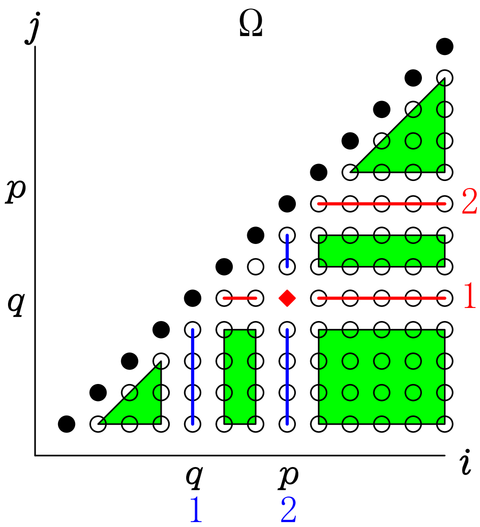
$$= \boxed{\frac{p-1}{q-1} \times \frac{p-2}{q-2} \times \cdots \times \frac{p-(q-2)}{q-(q-2)} \times \frac{p-(q-1)}{q-(q-1)}}$$

$$\times \boxed{\frac{q-1}{p-1} \times \frac{q-2}{p-2} \times \cdots \times \frac{q-(q-2)}{p-(q-2)} \times \frac{q-(q-1)}{p-(q-1)}}$$

積が1

$$\times \frac{q-(q+1)}{p-(q+1)} \times \cdots \times \frac{q-(p-1)}{p-(p-1)}$$

$$= \frac{q-(q+1)}{p-(q+1)} \times \cdots \times \frac{q-(p-1)}{p-(p-1)} \quad \cdots \text{②}$$



$$\prod_{\text{赤線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} = \prod_{\text{赤線1}} \frac{\tau(i)-\tau(q)}{i-q} \cdot \prod_{\text{赤線2}} \frac{\tau(i)-\tau(p)}{i-p} = \prod_{\text{赤線1}} \frac{\tau(i)-p}{i-q} \cdot \prod_{\text{赤線2}} \frac{\tau(i)-q}{i-p}$$

$$= \prod_{\text{赤線1}} \frac{i-p}{i-q} \cdot \prod_{\text{赤線2}} \frac{i-q}{i-p}$$

$$= \frac{(q+1)-p}{(q+1)-q} \times \cdots \times \frac{(p-1)-p}{(p-1)-q} \times \boxed{\frac{(p+1)-p}{(p+1)-q} \times \frac{(p+2)-p}{(p+2)-q} \times \cdots \times \frac{(n-1)-p}{(n-1)-q} \times \frac{n-p}{n-q}}$$

積が1

$$\times \boxed{\frac{(p+1)-q}{(p+1)-p} \times \frac{(p+2)-q}{(p+2)-p} \times \cdots \times \frac{(n-1)-q}{(n-1)-p} \times \frac{n-q}{n-p}}$$

$$= \frac{(q+1)-p}{(q+1)-q} \times \cdots \times \frac{(p-1)-p}{(p-1)-q} \quad \cdots \text{③}$$

②、③から

$$\prod_{\text{青線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \cdot \prod_{\text{赤線}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j}$$

$$= \frac{q-(q+1)}{p-(q+1)} \times \cdots \times \frac{q-(p-1)}{p-(p-1)} \times \frac{(q+1)-p}{(q+1)-q} \times \cdots \times \frac{(p-1)-p}{(p-1)-q} = 1$$

①に代入して

$$s(\tau) = \prod_{(i\,,\,j)\in\Omega} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} = -1$$

P.238 の証明は $\boldsymbol{E}$ の扱いがよくわからなかった。

（P.246　D2の証明）　◎ P.246 のD2の証明は間違っている。

$p < q$ とする。

$$det\ A = \sum_{\sigma \in U} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(p),p} \cdots a_{\sigma(q),q} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$- \sum_{\rho \in V} a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(p),p} \cdots a_{\rho(q),q} \cdots a_{\rho(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \in U} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(p),p} \cdots a_{\sigma(q),q} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$- \sum_{\sigma \in U} a_{\sigma\ \tau(1),1} \cdots a_{\sigma\ \tau(p),p} \cdots a_{\sigma\ \tau(q),q} \cdots a_{\sigma\ \tau(n),n}$$

$\tau(p) = q$, $\tau(q) = p$ ， $a_{\sigma(p),p} = a_{\sigma(p),q}$ ， $a_{\sigma(q),q} = a_{\sigma(q),p}$ だから

$$= \sum_{\sigma \in U} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(p),p} \cdots a_{\sigma(q),q} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$- \sum_{\sigma \in U} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(q),p} \cdots a_{\sigma(p),q} \cdots a_{\sigma(n),n} = 0$$

（P.247　定理5）

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$\sigma(i) = j \rightarrow i = \sigma^{-1}(j)$ なので $a_{\sigma(i),i} = a_{j,\sigma^{-1}(j)}$ となるので $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ の並び順を j の小さい順にずれば $a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$ となる。また

$s(\sigma) = s(\sigma^{-1})$ から

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

${}^{T}A = B$ とすれば $b_{ij} = a_{ji}$ となって

$$= \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} = det\ B = det\ ({}^{T}A)$$

（P.251　定理1）

$D1$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,p}+b_{i-1,p} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cancel{a_{i,1}} & \cdots & \cancel{a_{i,j}} & \cdots & \cancel{a_{i,p}+b_{i,p}} & \cdots & \cancel{a_{i,n}} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,p}+b_{i+1,p} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$(j\neq p)\ \rightarrow\ (-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,p}+b_{i-1,p} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,p}+b_{i+1,p} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$(j=p)\ \rightarrow\ (-1)^{i+p}(a_{ip}+b_{ip})\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,p-1} & a_{i-1,p+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,p-1} & a_{i+1,p+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & Ka_{1,p} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & Ka_{i-1,p} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cancel{a_{i,1}} & \cdots & \cancel{a_{i,j}} & \cdots & \cancel{Ka_{i,p}} & \cdots & \cancel{a_{i,n}} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & Ka_{i+1,p} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & Ka_{n,p} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$(j\neq p)\ \rightarrow\ (-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & Ka_{1,p} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & Ka_{i-1,p} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & Ka_{i+1,p} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & Ka_{n,p} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$(j=p)\ \rightarrow\ (-1)^{i+p}Ka_{ip}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,p-1} & a_{i-1,p+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,p-1} & a_{i+1,p+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$D2$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & \cdots & a_{1,q} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,p} & \cdots & a_{i-1,q} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cancel{a_{i,1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,j}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,p}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,q}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,n}} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,p} & \cdots & a_{i+1,q} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} & \cdots & a_{n,q} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$j\neq p$, $j\neq q$ ならば $det\,(A_{ij})=0$ から

$$D(A)=(-1)^{i+p}a_{ip}det\,(A_{ip})+(-1)^{i+q}a_{iq}det\,(A_{iq}) \quad \cdots \text{※}$$

$$A_{ip}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,q-1} & a_{1,q} & a_{1,q+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,p-1} & a_{i-1,p+1} & \cdots & a_{i-1,q-1} & a_{i-1,q} & a_{i-1,q+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,p-1} & a_{i+1,p+1} & \cdots & a_{i+1,q-1} & a_{i+1,q} & a_{i+1,q+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,q-1} & a_{n,q} & a_{n,q+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$A_{iq}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,q-1} & a_{1,q+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,p-1} & a_{i-1,p} & a_{i-1,p+1} & \cdots & a_{i-1,q-1} & a_{i-1,q+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,p-1} & a_{i+1,p} & a_{i+1,p+1} & \cdots & a_{i+1,q-1} & a_{i+1,q+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,q-1} & a_{n,q+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

p , $p+1$, $p+2$, $\cdots$, $p+\ell-1$ $\qquad$ $q-p=\ell$ とすれば

$\times(-1)$

$\times(-1)^2$

$\times(-1)^{\ell-1}$

$\ell-1=q-p-1$

$det\,(A_{ip})=(-1)^{q-p-1}det\,(A_{iq})$, $a_{ip}=a_{iq}$ なので

※に代入して

$$D(A)=(-1)^{i+p}(-1)^{q-p-1}a_{iq}det\,(A_{iq})+(-1)^{i+q}a_{iq}det\,(A_{ip})$$

$$=(-1)^{i+q-1}a_{ip}det\,(A_{ip})+(-1)^{i+q}a_{ip}det\,(A_{ip})$$

$$=0$$

$D3$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} i \text{ 行} \quad \rightarrow \quad D(I_n) = (-1)^{i+1} a_{ii} det\,(I_{n-1}) = 1$$

この展開を余因子展開と呼ぶ。

（P.252　ヴァンデルモンドの行列式）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \cdots & y_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$ とみれば、帰納法の仮定から

$$= \prod_{1 \leqq i < j \leqq n-1} (y_j - y_i) = \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)$$

（P.255　命題2）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad adj\,A = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$A(adj\,A)$ の $(i\,,\,k)$ 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj}$ となる。そこで次のことを証明する。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj} = \delta_{ik}\, det\,A \quad \cdots \quad ①$$

（ $i = k$ の場合 ）

これは i 行に関する余因子展開なので $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \delta_{ii}\, det\,A$

（ $i \neq k$ の場合 ）

A の第 k 行に A の第 i 行は貼り付けてできる行列を A' とする。

よって $det\,A' = 0$ である。

k 行に関して余因子展開すれば

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a'_{kj}\, det\,(A'_{kj}) = 0$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{k1}} & \cancel{a_{k2}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{a_{i2}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a'_{kj}=a_{ij}$, $A'_{kj}=A_{kj}$ だから

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a'_{kj}\,det\,(A'_{kj})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ij}\,det\,(A_{kj})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{k+j}det\,(A_{kj})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{kj}=0$$

● 列については

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \rightarrow A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

k 列に関して余因子展開すれば、$det\,A'=0$ から

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a'_{ik}\,det\,(A'_{ik})=0$$

$a'_{ik}=a_{ij}$, $A'_{ik}=A_{ik}$ だから

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a'_{ik}\,det\,(A'_{ik})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ij}\,det\,(A_{ik})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+k}det\,(A_{ik})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ik}=0$$

よって $det\,A\neq 0$ ならば $A^{-1}=\dfrac{1}{det\,A}\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{pmatrix}$ となる。

（P.256　系）

（別証明）P.243 定理3から証明できる。

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\rightarrow x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{j}$ 列を $\boldsymbol{b}$ に置きかえた行列を $\boldsymbol{A}_j$ とすれば

$$det\ A_j = det\,(\,\boldsymbol{a}_1\,,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1}\,,\boldsymbol{b}\,,\boldsymbol{a}_{j+1}\,,\cdots,\boldsymbol{a}_n\,)$$

$$= det\,(\,\boldsymbol{a}_1\,,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1}\,,x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n\,,\boldsymbol{a}_{j+1}\,,\cdots,\boldsymbol{a}_n\,)$$

$$= x_j\,det\ A$$

$$A_j = (\,\boldsymbol{a}_1\,,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1}\,,\boldsymbol{b}\,,\boldsymbol{a}_{j+1}\,,\cdots,\boldsymbol{a}_n\,) \rightarrow x_j = \frac{det\ A_j}{det\ A} \quad (\,det\ A \neq 0\,)$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{b}$ 列に関して余因子展開すれば

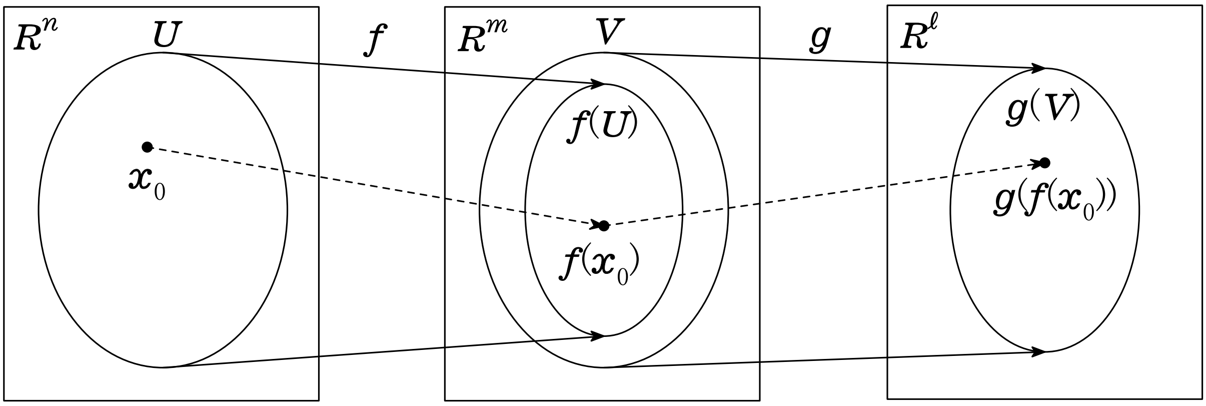
$$det\ A_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i\ det\,(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} b_i\ \Delta_{ij}$$

$$x_j = \frac{det\ A_j}{det\ A} = \frac{1}{det\ A}\sum_{i=1}^{n} b_i\ \Delta_{ij} = \frac{1}{det\ A}(b_1\Delta_{1j}+\cdots+b_n\Delta_{nj})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{det\ A}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ から $A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$ となる。

(P.270　定理1(微分鎖律)



$F = g\circ f \ \rightarrow\ F'(\boldsymbol{x}_0) = g'(\,f(\boldsymbol{x}_0)\,)f'(\boldsymbol{x}_0)$ が成り立つ。

（証） $f(x_0)=y_0$, $L=f'(x_0)$, $M=g'(y_0)$ とおく、f , g は x_0 , y_0 で微分可能から

$f(x_0+h)-f(x_0)=L(h)+|h|\varepsilon(h)$, $\lim_{|h|\to 0}|\varepsilon(h)|=0$

$g(y_0+k)-g(y_0)=M(k)+|k|\eta(k)$, $\lim_{|k|\to 0}|\eta(h)|=0$

である。いま $f(x_0+h)=y_0+k$ とおけば、上の第1式より

$k=L(h)+|h|\varepsilon(h)$ … ①

よって第2式より

$F(x_0+h)-F(x_0)=M(\,L(h)+|h|\varepsilon(h)\,)+|k|\eta(k)$

$=M(\,L(h)\,)+|h|M\varepsilon(h)+|k|\eta(k)$

$=M(\,L(h)\,)+\gamma(h)$

ただし $\gamma(h)=|h|M\varepsilon(h)+|k|\eta(k)$ である。$h\neq 0$ ならば

$$\frac{|\gamma(h)|}{|h|}\leqq |M\varepsilon(h)|+\frac{|k|}{|h|}|\eta(k)| \quad \cdots ②$$

P.230 命題4から

$|M\varepsilon(h)|\leqq \|M\|\,|\varepsilon(h)|$

また、①から $|k|\leqq |L(h)|+|h|\,|\varepsilon(h)|\leqq \|L\|\,|h|+|h|\,|\varepsilon(h)|$ なので

$$\frac{|k|}{|h|}\leqq \|L\|+|\varepsilon(h)|$$

よって ② に代入して

$$\frac{|\gamma(h)|}{|h|}\leqq \|M\|\,|\varepsilon(h)|+(\,\|L\|+|\varepsilon(h)|\,)\,|\eta(k)|$$

$h\to 0$ のとき $k\to 0$ 、したがって $|\varepsilon(h)|\to 0$, $|\eta(k)|\to 0$ であるから

$$\frac{|\gamma(h)|}{|h|}\to 0$$、すなわち

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|\,F(x_0+h)-F(x_0)-(M\,L)(h)\,|}{|h|}=0$$

ゆえに F は x_0 において微分可能で、次のようになる。

$F'(x_0)=ML=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$

（P.272　C^1可逆の定義）

（C^1可逆の定義）

$f : U \to R^n$, C^1級

$f(U) = V$ （U , V は開集合）

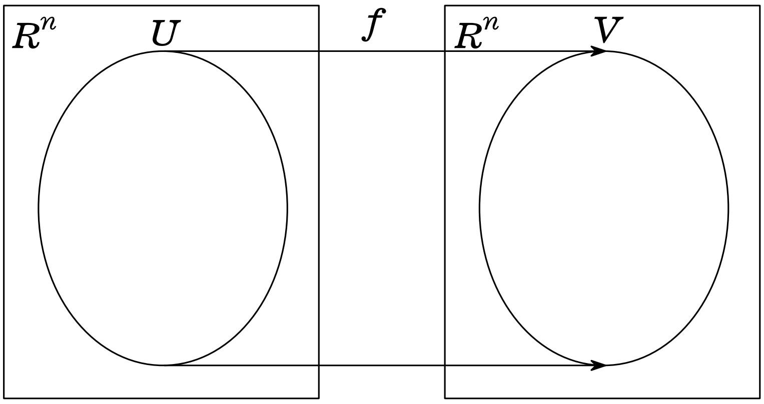
f は $U \to V$ への全単射

$f^{-1} : V \to U$, C^1級

ならば

f は U において C^1可逆

であるという。



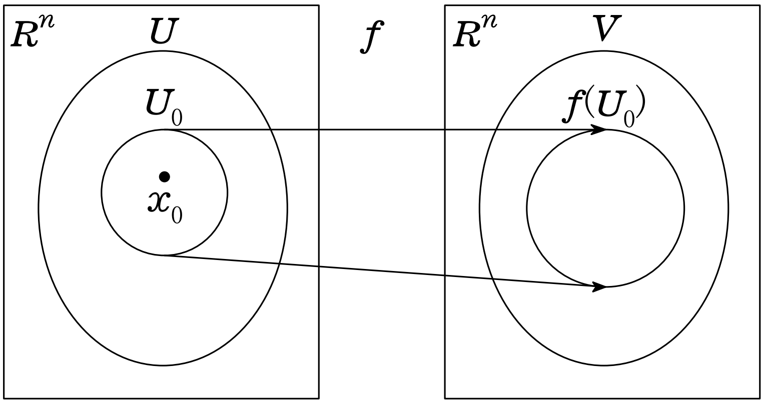
（局所的に C^1可逆の定義）

$f : U \to R^n$, C^1級

U は開集合

$x_0 \in U$

もし、$x_0 \in U_0 \subset U$ なる開集合を適当にとれば f が U_0 おいて C^1可逆となるとき、f は x_0 において局所的に C^1可逆であるという。



つまり、

$f(U_0) = V_0$ （U_0 , V_0 は開集合）

f は $U_0 \to V_0$ への全単射

$f^{-1} : V_0 \to U_0$, C^1級

となる U_0 が存在すればよい。

（P.273　定理３（逆写像定理））

（証）$f'(a) = L$ とおく。仮定によって L は可逆な線型変換であるから、逆変換 L^{-1} が存在する。実数 λ を $2\lambda\|L^{-1}\| = 1$ によって定める。

(a) f は C^1 なので f' は連続であるから、a を中心とする開球 U_0 $(\subset U)$ を適当にとって

$x \in U_0$ ならば $\| f'(x) - L \| < \lambda$

とすることができるとあるが、ここでは注意が必要である。$f'(x) = M$ としたとき連続であるから、$\|M-L\| = \sup_{|z|\leqq 1} |(M-L)(z)| < \lambda$
という意味である。
$2\lambda\|L^{-1}\| = 1$ から $\|L^{-1}\| = \dfrac{1}{2\lambda}$ なので P.232 定理2から
$\| f'(x)-L \| < \lambda < 2\lambda$ となって、$x \in U_0$ のとき $f'(x)$ は可逆である。

● $f(U_0) = V_0$ とおいたとき、f が U_0 上で単射（P.215 命題9 から全単射となる。）であることを示す。

まず点 $y \in R^n$ を固定して、写像 $\phi : U_0 \to R^n$ を次のように定義する。

$\phi(x) = x + L^{-1}(y - f(x))$ … ①

定義によって $f(x) = y$ と $\phi(x) = x$ は同値である。（L^{-1} が全単射であるため）

ϕ を微分すれば、微分鎖律により

$\phi'(x) = I - L^{-1}f'(x) = L^{-1}(L - f'(x))$ $\leftarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ だから $(x)' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

ゆえに P.231 命題5から

$\|\phi'(x)\| \leqq \|L^{-1}\| \, \|L - f'(x)\| < \dfrac{1}{2\lambda} \cdot \lambda = \dfrac{1}{2}$

また U_0 は開球で凸なので P.271 定理2から、$x_1, x_2 \in U_0$ に対して

$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leqq \dfrac{1}{2}|x_1 - x_2|$ … ②

を得る。よって、もし $x_1, x_2 \in U_0$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ ならば、$f(x_1)$ を y として上の ϕ を作れば、$\phi(x) = x + L^{-1}(f(x_1) - f(x))$ となり

$\phi(x_1) = x_1 + L^{-1}(f(x_1) - f(x_1)) = x_1$, $\phi(x_2) = x_2 + L^{-1}(f(x_1) - f(x_2)) = x_2$ から

$|x_1 - x_2| \leqq \dfrac{1}{2}|x_1 - x_2|$

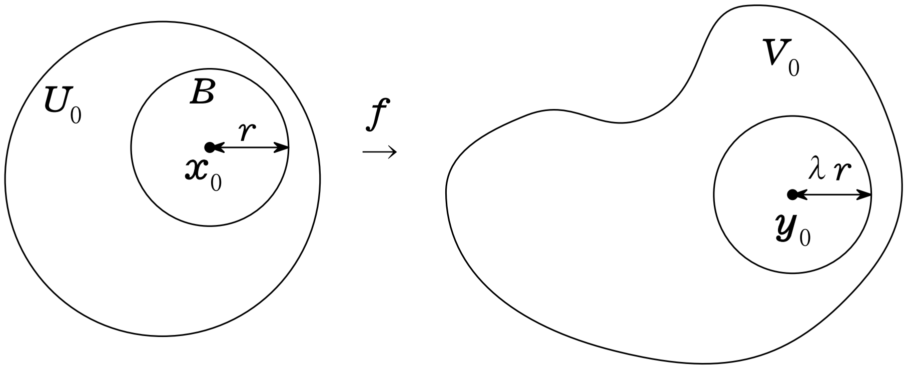
を得るから、$x_1 = x_2$ となる。ゆえに f は U_0 で単射（全単射）である。

● V_0 も R^n の開集合であることを示す。

いま y_0 を V_0 の1点とし、$x_0 \in U_0$ を $f(x_0) = y_0$ なる点とする。（上の証明から全単射であることがわかっているので可能である。）

実数 $r>0$ を、開球 $B=B(\boldsymbol{x}_0;r)$ の閉包 $\overline{B}$ が U_0 に含まれるようにとる。そのとき $\boldsymbol{y}_0$ を中心、λr を半径とする開球 $B(\boldsymbol{y}_0;\lambda r)$ が V_0 に含まれることを次のようにして示される。

$\boldsymbol{y}$ を $B(\boldsymbol{y}_0;\lambda r)$ の任意の点とする。この点 $\boldsymbol{y}$ を固定して上の①により写像 $\phi:U_0\to R^n$ を定義する。



もし ϕ が U_0 内に固定点 $\boldsymbol{x}$ をもつことが示されれば、この $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる($\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ は $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ と同値)から、$\boldsymbol{x}\in U_0$ であって f は U_0 から V_0 への全単射であるから、$\boldsymbol{y}\in V_0$ したがって $B(\boldsymbol{y}_0;\lambda r)\subset V_0$ となって開集合であることが証明できる。

さて、ϕ の定義によって $\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+L^{-1}(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x}))$ で $f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$ だったので

$\phi(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0+L^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$ である。

$\phi(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0=L^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$

したがって

$$|\phi(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0|\leqq\|L^{-1}\|\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<\frac{1}{2\lambda}\cdot\lambda r=\frac{r}{2}$$

である。一方、任意の $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in U_0$ に対して ② が成り立つ($\boldsymbol{y}$ は R^n の任意の固定点であればよかったので)から、$\boldsymbol{x}\in\overline{B}$ ならば

$$|\phi(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{x}_0)|\leqq\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqq\frac{r}{2}$$

よって

$$|\phi(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0|\leqq|\phi(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{x}_0)|+|\phi(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0|<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

となる。ゆえに $\phi(\boldsymbol{x})\in\overline{B}$ で、ϕ の定義域を $\overline{B}$ に制限した写像は $\overline{B}$ から $\overline{B}$ への写像となる。②によってそれは縮小写像であり、しかも $\overline{B}$ は有界閉集合で P.69 命題4から R^n は完備な距離空間であるので $\overline{B}$ は完備であり、P.70 定理2

によって ϕ は $\overline{B}$ のなかにただ一つの固定点をもつことになる。これでこれまでの主張が証明されたことになる。

(b) V_0 上で $g=f^{-1}$ とおく、y および $y+k$ （$k\neq 0$）を V_0 の2点とし、$g(y)=x$, $g(y+k)=x+h$ とする。すなわち x , $x+h$ は

$f(x)=y$, $f(x+h)=y+k$

となる U_0 の2点である。上の y を用いてふたたび前のように U_0 上で写像 ϕ を次のように定義する。

$\phi(u)=u+L^{-1}(y-f(u))\qquad(u\in U_0)$

このとき $\phi(x)=x$ である。また

$\phi(x+h)=x+h+L^{-1}(y-f(x+h))=x+h+L^{-1}(y-(y+k))$

$=x+h-L^{-1}(k)$

であるから、

$\phi(x+h)-\phi(x)=h-L^{-1}(k)$

よって ②より

$|h-L^{-1}(k)|=|\phi(x+h)-\phi(x)|\leqq\frac{1}{2}|h|$

を得る。$|h-L^{-1}(k)|\leqq\frac{1}{2}|h|\rightarrow|h|-|L^{-1}(k)|\leqq\frac{1}{2}|h|\rightarrow\frac{1}{2}|h|\leqq|L^{-1}(k)|$

したがって

$\lambda|h|\leqq 2\lambda|L^{-1}(k)|\leqq 2\lambda\|L^{-1}\|\,|k|=|k|\quad\cdots\quad ③$

である。

いま $(f'(x))^{-1}=M$ （$x\in U_0$ ならば $f'(x)$ は可逆だから）とおく。そうすれば

$g(y+k)-g(y)-M(k)$

$=h-M(k)$

$=-M(k)+h=-M(k)+I(h)=-M(k)+(Mf'(x))h$

$=-M(k-f'(x)h)$

$=-M(f(x+h)-f(x)-f'(x)h)$

ゆえに

$$| g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-g(\boldsymbol{y})-M(\boldsymbol{k}) | \leqq \|M\| \, | f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} |$$

これと③により

$$\frac{| g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-g(\boldsymbol{y})-M(\boldsymbol{k}) |}{|\boldsymbol{k}|} \leqq \frac{\|M\| \, | f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} |}{|\boldsymbol{k}|}$$

$$\leqq \frac{\|M\|}{\lambda}\frac{| f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} |}{|\boldsymbol{h}|}$$

そこで $|\boldsymbol{k}| \to 0$ とすれば、③により $|\boldsymbol{h}| \to 0$ であるから、上式の右辺は 0 に近づく

よって

$$\lim_{|\boldsymbol{k}|\to 0} \frac{| g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-g(\boldsymbol{y})-M(\boldsymbol{k}) |}{|\boldsymbol{k}|} = 0$$

ゆえに写像 $g : V_0 \to U_0$ は $\boldsymbol{y}$ において微分可能で $g'(\boldsymbol{y}) = M = (f'(\boldsymbol{x}))^{-1}$ である。

最後に $g' : V_0 \to \mathfrak{L}(R^n)$ が連続であることを示す。上にみたように

$$g'(\boldsymbol{y}) = (f'(\boldsymbol{x}))^{-1} = \{ f'(g(\boldsymbol{y})) \}^{-1}$$

であるが、g は微分可能であるから連続、また仮定によって f' は連続である。

そしてその逆変換を対応させる写像は P.232 定理2から連続である。ゆえに

$g' : V_0 \to \mathfrak{L}(R^n)$ は連続で、g は C^1級写像である。

(P.278　系)

W を U の任意の部分開集合とする。任意の $\boldsymbol{b} \in f(W)$ に対して $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ なる $\boldsymbol{a} \in W$ をとれば、仮定から $\boldsymbol{a} \in U_0 \subset W$ なる適当な開集合をとれば $f(U_0)$ は開集合で $\boldsymbol{b} \in f(U_0) \subset f(W)$ とすることができる。したがって、適当な半径 r をとって$B(\boldsymbol{b}\,;r) \subset f(U_0) \subset f(W)$ とすることができるので $f(W)$ は開集合である。

(P.279　線型の場合)

底を定め L の表現行列を A とすれば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

（P.280　定理1　（陰関数定理））

（証）写像 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ によって定義する。

$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{C}^1$級であるから $\boldsymbol{F}$ のすべての成分関数は $\boldsymbol{C}^1$級であるので

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_m} \\ 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ であり、$\boldsymbol{C}^1$級である。

● $\boldsymbol{F}$ について $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の可逆線型変換であることを示す。

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ であるから、$(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) \in \boldsymbol{R}^{n+m}$ に対して

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \\ k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

とおけば、$\displaystyle \lim_{|(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})| \to 0} \frac{|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})|}{|(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})|} = 0$ である。

そして $\boldsymbol{F}$ の定義から

$$F(a+h\,,\,b+k)-F(a\,,\,b)=(f(a+h\,,\,b+k)\,,\,k)=(L(h\,,\,k)+r(h\,,\,k)\,,\,k)$$

$$=\begin{pmatrix}L(h\,,\,k)+r(h\,,\,k)\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L(h\,,\,k)\\ k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r(h\,,\,k)\\ 0\end{pmatrix}=(L(h\,,\,k)\,,\,k)+(r(h\,,\,k)\,,\,0)$$

よって $(h\,,\,k)$ に $(L(h\,,\,k)\,,\,k)$ を対応させる R^{n+m} の線型変換を $\widetilde{L}$ とし、

$\widetilde{r}(h\,,\,k)=(r(h\,,\,k)\,,\,0)$ とおけば

$\widetilde{L}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$

$$F(a+h\,,\,b+k)-F(a\,,\,b)=\widetilde{L}(h\,,\,k)+\widetilde{r}(h\,,\,k)$$

$$\lim_{|(h\,,\,k)|\to 0}\frac{|\widetilde{r}(h\,,\,k)|}{|(h\,,\,k)|}=\lim_{|(h\,,\,k)|\to 0}\frac{|(r(h\,,\,k)\,,\,0)|}{|(h\,,\,k)|}=\lim_{|(h\,,\,k)|\to 0}\frac{|(r(h\,,\,k)|}{|(h\,,\,k)|}=0$$

である。ゆえに $\widetilde{L}=F\,'(a\,,\,b)$ である。そしてこの線型変換 $\widetilde{L}$ は可逆である。

なぜならば、$\widetilde{L}(h\,,\,k)=(L(h\,,\,k)\,,\,k)=(0\,,\,0)$ ならば、

$L(h\,,\,k)=0$　かつ　$k=0$

で L_x が可逆であるから $L(h\,,\,0)=L_x(h)=0$ より $h=0$ を得る。ゆえに $\widetilde{L}$ は単射であり、P.215 命題9から全単射となり、可逆線型変換である。

● U は R^{n+m} の開集合、F は U から R^{n+m} への C^1級写像であり、$(a\,,\,b)$ を U の1点とし、$F\,'(a\,,\,b)$ が可逆線型変換なので、逆関数定理を適用することができる。

よって $(a\,,\,b)$ を含む開集合 $U_0\subset U$ を適当にとれば、$F(U_0)=V_0$ は $F(a\,,\,b)=(f(a\,,\,b)\,,\,b)=(0\,,\,b)$ を含む開集合で $F:U_0\to V_0$ は全単射、かつ逆写像 $G=F^{-1}:V_0\to U_0$ は C^1級写像である。

● $(x\,,\,y)\in U_0$ ならば $M=f\,'(x\,,\,y)$ とおくとき M_x は可逆であることを示す。

$$L=f\,'(a\,,\,b)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a\,,\,b) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a\,,\,b) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(a\,,\,b) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(a\,,\,b)\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a\,,\,b) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(a\,,\,b) & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}(a\,,\,b) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_m}(a\,,\,b)\end{pmatrix}$$

$$M=f\,'(x\,,\,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x\,,\,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x\,,\,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x\,,\,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(x\,,\,y)\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x\,,\,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x\,,\,y) & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}(x\,,\,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_m}(x\,,\,y)\end{pmatrix}$$

$$L_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix}, \quad M_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

と考えてよい。また、L_x は仮定から可逆線型変換なので L_x^{-1} が存在する。

よって $\|L_x^{-1}\| = \dfrac{1}{\lambda}$ とすると $\boldsymbol{f}$ は C^1級だったのですべての成分関数も連続である。したがって M_x は上の $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を含む開集合 U_0 で連続である。よって、U_0 を十分に小さくとれば

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \in U_0$ ならば　$\| M_x - L_x \| < \lambda$

とすることができる。よって M_x は可逆線型変換である。

さて、$(0, \boldsymbol{y}) \in V_0$ となるような $\boldsymbol{y} \in R^m$ 全体の集合を W_0 とする。$\boldsymbol{b} \in W_0$ である。

● W_0 は R^m の開集合である。

任意の $\boldsymbol{y} \in W_0$ に対し $(0, \boldsymbol{y}) \in V_0$ であるから、$(0, \boldsymbol{y})$ のある開近傍

$B((0, \boldsymbol{y}); r)$ が存在して $B((0, \boldsymbol{y}); r) \subset V_0$ とできる。

そのとき、任意の $\boldsymbol{y}' \in B'(\boldsymbol{y}; r)$ に対し $|(0, \boldsymbol{y})-(0, \boldsymbol{y}')| = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'| < r$ なので

$(0, \boldsymbol{y}') \in B((0, \boldsymbol{y}); r) \subset V_0$ よって　$\boldsymbol{y}' \in W_0$　ゆえに $B'(\boldsymbol{y}; r) \subset W_0$

また $\boldsymbol{y} \in W_0$ に対し、$G(0, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の形をしている。($\boldsymbol{x}$ がどの様な値かわからないが) $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = FG(0, \boldsymbol{y}) = (0, \boldsymbol{y})$ であるから $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

もし $\boldsymbol{x}' \in R^n$ も $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \in U_0$　かつ　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = 0$ を満たすならば、

$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = (0, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$

となり、F は U_0 上で全単射であるから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ となる。すなわち、$\boldsymbol{y} \in W_0$ に対し

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U_0$　かつ　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$

となる $\boldsymbol{x} \in R^n$ は一意的に定まる。そこでこの $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ と書けば、

$G(0, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$

であるから、$\boldsymbol{g} : W_0 \to R^n$ は C^1級写像である。(G が C^1級なので、その成分関

数も C^1級である。) また $F(a, b) = (0, b)$ から $(a, b) = G(0, b) = (g(b), b)$ だから $g(b) = a$ であり、任意の $y \in W_0$ に対して $f(g(y), y) = 0$ である。

● $g'(y) = -M_x^{-1}M_y$ について

$G(0, y) = (g(y), y) = H(y)$ とおく。

$k \in R^m$ に対して

$$g(y+k)-g(y) = g'(y)(k)+r(k) \quad , \quad \lim_{|k|\to 0} \frac{|r(k)|}{|k|} = 0$$

そして H の定義から $y \in R^m$

$$H(y+k)-H(y) = (g(y+k), y+k)-(g(y), y) = (g'(y)(k)+r(k), k)$$

$$= (g'(y)(k), k)+(r(k), 0)$$

よって k に $(g'(y)(k), k)$ を対応させる R^m から R^{n+m} への線型写像を $\widetilde{N}$ とし $\widetilde{r}(k) = (r(k), 0)$ とすれば

$$H(y+k)-H(y) = (g'(y)(k), k)+\widetilde{r}(k)$$

$$\lim_{|k|\to 0} \frac{|\widetilde{r}(k)|}{|k|} = \lim_{|k|\to 0} \frac{|r(k)|}{|k|} = 0$$

ゆえに $\widetilde{N} = H'(y)$ である。よって　$H'(y)(k) = (g'(y)(k), k)$

また $f(H(y)) = f(g(y), y) = 0$

であるから、微分鎖律によって

$f'(H(y)) = f'(H(y))H'(y) = \mathbf{0}$　（ $\mathbf{0}$ は零写像 ）

よって任意の $k \in R^m$ に対して

$f'(H(y))H'(y)(k) = f'(H(y))(g'(y)(k), k) = 0$ …　※

である。ここで $g(y) = x$ とおけば $H(y) = (g(y), y) = (x, y)$ 、したがって $f'(H(y)) = f'(x, y)$ であるから、これを M と書けば、上式※は

$M(g'(y)(k), k) = 0$

$g'(y)$ は R^m から R^n への線型写像なので

$g'(y)(k) \in R^n$, $k \in R^m$, $M \in \mathfrak{L}(R^{n+m}, R^n)$ から

$$M = f'(x\ ,\ y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x\ ,\ y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x\ ,\ y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x\ ,\ y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x\ ,\ y) \\ \vdots & M_x & \vdots & \vdots & M_y & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x\ ,\ y) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x\ ,\ y) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(x\ ,\ y) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m}(x\ ,\ y) \end{pmatrix}$$

であり、これは

$$M(g'(y)(k)\ ,\ k) = M\begin{pmatrix} g'(y)(k) \\ k \end{pmatrix} = \{\ (M_x\ ,\ 0)+(0\ ,\ M_y)\ \}\begin{pmatrix} g'(y)(k) \\ k \end{pmatrix}$$

$$= (M_x g'(y))(k)+M_y(k) = 0$$

と同値である。これがすべての $k \in R^m$ に対して成り立つから

$M_x g'(y)+M_y = 0$ （０は零写像）

M_x は可逆だったので

$$g'(y) = -M_x^{-1}M_y$$

が得られる。

● $f_i(x_1\ ,\ \cdots\ ,\ x_n\ ,\ y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m) = 0$ を x を y の関数として y_k について微分すれば、$x_i = g_i(y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m)$ （$i = 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ n$）なので、微分鎖律から

$$\phi(y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m) = {}^T(g_1(y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m)\ ,\ \cdots\ ,\ g_n(y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m)\ ,\ y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(f_i(\phi(y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y_m)\ )= (\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\ ,\ \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{\partial f_i}{\partial y_m})\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial g_j}{\partial y_k}+\frac{\partial f_i}{\partial y_k} = 0 \quad (\ k = 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ m\ )$$

（問題17．２ 問1）

U は凸集合であるから、$a\ ,\ b = a+\rho e_1$（$\rho > 0$）を $x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_n$ 座標が等しい U の2点とすれば、線分 $r(t) = a+te_1$（$0 \leqq t \leqq \rho$）は U に含まれる。

$g(t) = f(r(t))$ とおけば

$g'(t) = grad\, f(r(t)) \cdot r'(t)$　　　※ $r(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow r'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$grad\, f = \left(0 , \dfrac{\partial f}{\partial x_2} , \cdots , \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \right)$ だから

$g'(t) = 0$

よって g は定数である。ゆえに $g(0) = g(\rho)$、すなわち $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$ であり、f の値は x_1 成分に影響されない。

(P.286　定理2 (階数定理))　解析入門 II　局所関連定理

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} , \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q) \\ \vdots \\ f_m(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q) \end{pmatrix}$$

$u_1 , \cdots , u_r$ を独立変数とみて $\gamma : \boldsymbol{R}^{n+r} \rightarrow \boldsymbol{R}^r$ として次のように定める。

$$\gamma(\boldsymbol{x} , \boldsymbol{y} , \boldsymbol{u}) = \gamma(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q , u_1 , \cdots , u_r)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q , u_1 , \cdots , u_r) \\ \vdots \\ \gamma_r(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q , u_1 , \cdots , u_r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q) - u_1 \\ \vdots \\ f_r(x_1 , \cdots , x_r , y_1 , \cdots , y_q) - u_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} , \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 , \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{u}_0 \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}_0 , \boldsymbol{y}_0) \\ \vdots \\ f_r(\boldsymbol{x}_0 , \boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_0 \ \rightarrow \ \gamma(\boldsymbol{x}_0 , \boldsymbol{y}_0 , \boldsymbol{u}_0) = 0$$

② から $\dfrac{\partial (f_1 , \cdots , f_r)}{\partial (x_1 , \cdots , x_r)} = \dfrac{\partial (\gamma_1 , \cdots , \gamma_r)}{\partial (x_1 , \cdots , x_r)} \neq 0$ なので、陰関数定理から

$(\boldsymbol{y}_0 , \boldsymbol{u}_0)$ の近傍で $\boldsymbol{x}$ が $(\boldsymbol{y} , \boldsymbol{u})$ の陰関数として定められる。

すなわち C^1級の関数 $\phi_i \ (1 \leqq i \leqq r)$ が存在して

$$x_1 = \phi_1(y_1 , \cdots , y_q , u_1 , \cdots , u_r)$$
$$\vdots$$
$$x_r = \phi_1(y_1 , \cdots , y_q , u_1 , \cdots , u_r)$$

とすることができる。これらを

$v_i(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_q)$ $(1 \leqq i \leqq p)$

の $x_1, \cdots, x_r$ に代入すれば v_i は $y_1, \cdots, y_q, u_1, \cdots, u_r$ の関数となる。定理の主張は v_i が $u_1, \cdots, u_r$ のみの関数となることである。その結論を導くためには

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} = 0 \quad (1 \leqq j \leqq q)$$

を証明すればよい。

まずその前に問題17．2の問1をこの証明のために少し補強する必要がある。

（補強版）

U は凸集合であるから、$u_1, \cdots, u_r$ 座標が等しい U の2点を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とすると、線分 $r(t) = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ は U に含まれる。

$\boldsymbol{a} = (a_{u1}, \cdots, a_{ur}, a_{y1}, \cdots, a_{yq})$，$\boldsymbol{b} = (a_{u1}, \cdots, a_{ur}, b_{y1}, \cdots, b_{yq})$ とし

$g(t) = v_i(r(t))$ とおけば

$$g'(t) = grad\, v_i(r(t)) \cdot r'(t) \qquad ※\ r(t) = \begin{pmatrix} a_{u1} \\ \vdots \\ a_{ur} \\ a_{y1} + (b_{y1} - a_{y1})t \\ \vdots \\ a_{yq} + (b_{yq} - a_{yq})t \end{pmatrix} \to r'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (b_{y1} - a_{y1}) \\ \vdots \\ (b_{yq} - a_{yq}) \end{pmatrix}$$

$grad\, v_i = \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial u_1}, \cdots, \dfrac{\partial v_i}{\partial u_r}, 0, \cdots, 0 \right)$ とすれば

$g'(t) = 0$

よって g は定数である。ゆえに $g(0) = g(1)$、すなわち $v_i(\boldsymbol{a}) = v_i(\boldsymbol{b})$ であり、v_i の値は $y_1, \cdots, y_q$ 成分に影響されない。

$\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial y_j} = 0 \quad (1 \leqq j \leqq q) \right.$ の証明 $)$

$v_i = g_i(\phi_1(u_1, \cdots, y_q), \cdots, \phi_r(u_1, \cdots, y_q), y_1, \cdots, y_q)$

であるから、微分鎖律で

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial y_j} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial x_r}\frac{\partial \phi_r}{\partial y_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \quad \cdots \quad ③$$

一方

$$u_1 = f_1(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_q)$$
$$\vdots$$
$$u_r = f_r(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_q)$$

の各式を y_j で偏微分すれば、(u, y) は独立変数だから、微分鎖律から

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial y_j} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_r}\frac{\partial \phi_r}{\partial y_j} + \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial y_j} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_r}\frac{\partial \phi_r}{\partial y_j} + \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \end{aligned} \qquad \cdots ④$$

となる。

ところで上に注意したように、行列①の最初の r 行 r 列にもう1つの行および列を加えて得られる $r+1$ 次の小行列式の値は 0 であるから、$1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq q$ を満たす任意の正数 i , j に対して

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & \frac{\partial f_r}{\partial y_j} \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_r} & \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots ⑤$$

が成り立つ。⑤の行列式の第1列、$\cdots$ 、第 r 列にそれぞれ $\frac{\partial \phi_1}{\partial y_j}, \cdots, \frac{\partial \phi_r}{\partial y_j}$ を掛けて第 $r+1$ 列に加えれば、④によって第 $r+1$ 列の第1成分から第 r 成分まではすべて 0 となる。一方③によって最後の成分は $\frac{\partial v_i}{\partial y_j}$ になる。ゆえに

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & 0 \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_r} & \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \end{vmatrix} = 0 \quad 、②から \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = 0$$

とならなければならない。

（P.290　命題1）

$\boldsymbol{F}^n$ の元 $\boldsymbol{x}$ の標準基底 ε に関する座標ベクトルを $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする。

$\boldsymbol{P}$ が可逆行列であると仮定し、$\boldsymbol{F}^n$ の元 $\boldsymbol{x}$ の基底 $\alpha = \{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ に関する座標ベクトルを ${}^T(x_1', \cdots, x_n')$ とする。

そのことは定義によって、$\boldsymbol{x} = x_1'\boldsymbol{p}_1 + \cdots + x_n'\boldsymbol{p}_n$ を意味する。

$\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ を列ベクトルとする行列とすれば

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

である。つまり $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ の関係にある。$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ となる。

> 基底 $\alpha = \{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ に関して
>
> $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{p}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{p}_i \quad (1 \leqq j \leqq n)$
>
> とすれば、$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ が $\boldsymbol{L}$ の α に関する表現行列 $[\boldsymbol{L}]_\alpha$ である。

（P.291　命題2）

$[\boldsymbol{L}]_\varepsilon = \boldsymbol{A}$, $[\boldsymbol{L}]_\alpha = \boldsymbol{B}$ とする。

$$[\boldsymbol{x}]_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ [\boldsymbol{y}]_\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ [\boldsymbol{x}]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \ [\boldsymbol{y}]_\alpha = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ このに $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$ を代入すれば

$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ となり

$[\boldsymbol{L}]_\alpha = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ となる。

(P.294　定理1)

$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$とする。

そのとき、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は B の固有値である。ただし相異なるとは限らない。

い。この場合 e_j が λ_j に対する B の固有値である。実際

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。命題4によって固有値は変わらない。固有ベクトルは $p_j = Pe_j$ が λ_j に対する A の固有ベクトルだったので、$\{p_1, \cdots, p_n\}$ は一次独立であるという仮定から、$\{p_1, \cdots, p_n\}$ は F^n の基底となる。

逆に、A の固有ベクトルからなる基底 $\{p_1, \cdots, p_n\}$ が存在するならば、$P = (p_1, \cdots, p_n)$ とおくとき、P は可逆で、

$Ap_j = \lambda_j p_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$

とすれば、$p_j = Pe_j$ であるから、

$APe_j = \lambda_j Pe_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$

$P^{-1}APe_j = \lambda_j P^{-1}Pe_j = \lambda_j e_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$

$P^{-1}AP = B$ とおけば

$Be_j = \lambda_j e_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$

となる。よって B は対角行列である。

(P.298　例2)

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \to f_A(x) = (x-a)^2 + b^2 \to x = a \pm ib$

固有値 $a+ib$ に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a+ib) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} ax_1 - bx_2 = ax_1 + ibx_1 & \cdots ① \\ bx_1 + ax_2 = ax_2 + ibx_2 & \cdots ② \end{cases}$$

①から、$-bx_2 = ibx_1 \to -x_2 = ix_1$

②から、$bx_1 = ibx_2 \to x_1 = ix_2$

$\to$ 固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

固有値 $a-ib$ に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a-ib)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} ax_1 - bx_2 = ax_1 - ibx_1 & \cdots ① \\ bx_1 + ax_2 = ax_2 - ibx_2 & \cdots ② \end{cases}$$

①から、$-bx_2 = -ibx_1 \to x_2 = ix_1$

②から、$bx_1 = -ibx_2 \to x_1 = ix_2$

$\to$ 固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

そこで $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1} = \dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

この位置の余因子がここに行く！

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-ai^2+a+2bi}{2} & \dfrac{ai^2+a}{2} \\ \dfrac{ai^2+a}{2} & \dfrac{-ai^2+a-2bi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

（P.300　定理5（代数学の基本定理））

もし $g(0) \neq 0$ ならば、補題1から $|g(w_0)| < |g(0)|$ となる $w_0 \in C$ が存在するはずだが、全ての $w \in C$ に対して $|g(0)| \leqq |g(w)|$ なので、そのような w_0 は存在しない。したがって $g(0) = 0$ でなければならない。

（P.301　系2）

任意の $z \in C$ に対し

$f(z) = c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ と分解されるのであれば

$\overline{f(z)} = \overline{c}(\overline{z}-\overline{\alpha_1})(\overline{z}-\overline{\alpha_2})\cdots(\overline{z}-\overline{\alpha_n})$

また $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ だったので

$\overline{f(z)} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z}^n$

ここで、$\overline{z} = w$ おけば

$\overline{c}(w-\overline{\alpha_1})(w-\overline{\alpha_2})\cdots(w-\overline{\alpha_n}) = \overline{a_0} + \overline{a_1}w + \cdots + \overline{a_n}w^n$

よって $\overline{f}(w)=\overline{a_0}+\overline{a_1}w+\cdots+\overline{a_n}w^n$ とすれば

$\overline{f}(w)=\overline{c}(w-\overline{\alpha_1})(w-\overline{\alpha_2})\cdots(w-\overline{\alpha_n})$

と表すことができる。z がすべての C 内を動くとき w もすべての C 内を動くので

$\overline{f}(z)=\overline{c}(z-\overline{\alpha_1})(z-\overline{\alpha_2})\cdots(z-\overline{\alpha_n})$

と表しても良いことになる。

（P.302　問題18．2 の問4）

$L(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ とおけば

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ としたとき

成分を比べてみればわかるが

$(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{c})=A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=A\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$

P.259 の公式から $det\ A$ 倍となる。

（P.304　シュバルツの不等式の証明）

$|\alpha|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+\alpha\overline{\beta}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\beta\overline{\alpha}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+|\beta|^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\geqq 0$

$\alpha=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$, $\beta=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ とおけば

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\geqq 0$

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\geqq 0$

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\geqq 0$

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\geqq 0$

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})>0$ であるから

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\geqq 0\ \rightarrow\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\geqq|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$

（注）・$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\neq|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$ である。

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=x+iy\ \rightarrow\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(x+iy)^2=x^2+2ixy-y^2$

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\overline{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}=x^2-y^2$

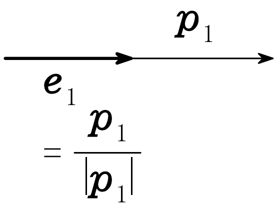
・$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^2 = |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}|^2$ である。

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$ なので実数である。したがって $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) = x$ とすれば

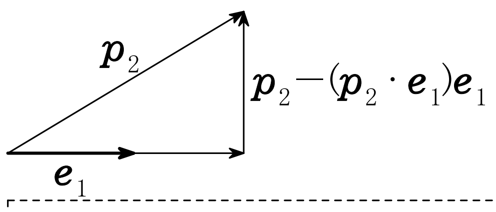
$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^2 = x^2$

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\overline{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})} = x^2$

（P.305　命題5（シュミットの直交化法））



⇒



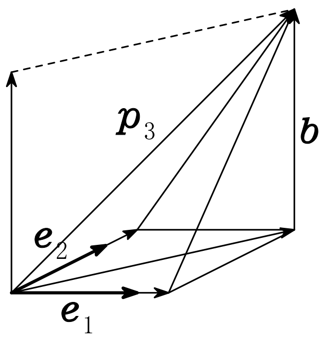
$(\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{p}_2-(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1))$

$= (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)-(\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1)$

$= (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)-\overline{(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)}|\boldsymbol{e}_1|^2 = 0$

$\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{p}_2-(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{p}_2-(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1|}$ とすれば

$\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$



⇐

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}_3-(\boldsymbol{p}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{p}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$

$(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{p}_3)-(\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{p}_3\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i)$

$= (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{p}_3)-\overline{(\boldsymbol{p}_3\cdot\boldsymbol{e}_i)}|\boldsymbol{e}_i|^2 = 0 \quad (i = 1, 2)$

$\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ とすれば、 $\boldsymbol{e}_3 \perp \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \perp \boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}_k-(\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2\cdots-(\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{e}_{k-1})\boldsymbol{e}_{k-1}$ とすれば

$(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{p}_k)-(\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i)$

$= (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{p}_k)-\overline{(\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{e}_i)}|\boldsymbol{e}_i|^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, k-1)$

$\boldsymbol{e}_k = \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$ とすればよい。

（P.308　系）

$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ については、$V^{\perp} = W$ としてみれば、V の任意の元 x は W のすべての元と直交するので $W^{\perp}$ に含まれる。すなわち $x \in W^{\perp} = (V^{\perp})^{\perp}$ となる。

● $W \subset V$ で $dim\ W = dim\ V$ ならば $W = V$（線型代数学　佐武一郎　P.101）

（準備）

① $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$　　② $\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$　　③ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

①は明らかである。

② $A^{-1}A = I \;\to\; \overline{A^{-1}}\,\overline{A} = I \;\to\; (\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$

③ $A^{-1}A = I \;\to\; A^T(A^{-1})^T = I \;\to\; (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

（P.309　定理1）

$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_1 = P\boldsymbol{e}_1$ だから $B\boldsymbol{e}_1 = P^{-1}AP\boldsymbol{e}_1 = P^{-1}A\boldsymbol{p}_1 = P^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{p}_1)$

$= \lambda_1(P^{-1}\boldsymbol{p}_1) = \lambda_1\boldsymbol{e}_1$　$\leftarrow$ $P^{-1}P = P^{-1}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = I$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{Q_1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$ とすると $$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{Q_1^{-1}} \\ 0 & \end{pmatrix}$$ である。

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{Q_1^{-1}} \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{B_1} \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{Q_1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{Q_1^{-1}B_1Q} \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

（ブロック分割による積）

$$A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,m_1} & a_{i,m_1+1} & \cdots & a_{i,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n_1+1,1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1} & a_{n_1+1,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1+n_2,1} & \cdots & a_{n_1+n_2,m_1} & a_{n_1+n_2,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+n_2,m_1+m_2} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & j & & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1,\ell_1+1} & \cdots & b_{1,\ell_1+\ell_2} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & b_{m_1,k} & \cdots & b_{m_1,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1,\ell_1+\ell_2} \\ \hline \cdots & b_{m_1+1,k} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1+\ell_2} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & b_{m_1+m_2,k} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1+\ell_2} \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

① $1 \leqq i \leqq n_1$, $1 \leqq k \leqq \ell_1$ の場合

$$(AB\ \text{の}\ (i\ ,\ k)\ \text{成分}) = \sum_{j=1}^{m_1+m_2} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{m_1} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{m_2} a_{i,m_1+j}b_{m_1+j,k}$$

$$= (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{i,m_1}b_{m_1,k})$$

$$+ (a_{i,m_1+1}b_{m_1+1,k} + a_{i,m_1+2}b_{m_1+2,k} + \cdots + a_{i,m_1+m_2}b_{m_1+m_2,k})$$

$$= \sum_{j=1}^{m_1} (\ A_{11}\ \text{の}\ (i\ ,\ j)\ \text{成分}\ )(\ B_{11}\ \text{の}\ (j\ ,\ k)\ \text{成分}\ )$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_2} (\ A_{12}\ \text{の}\ (i\ ,\ j)\ \text{成分}\ )(\ B_{21}\ \text{の}\ (j\ ,\ k)\ \text{成分}\ )$$

$$= (\ (\ A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}\ )\ \text{の}\ (i\ ,\ k)\ \text{成分}\ )$$

$$\boxed{AB = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}}$$

② $1 \leqq i \leqq n_1$, $\ell_1 + 1 \leqq k \leqq \ell_1 + \ell_2$ の場合

$$A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,m_1} & a_{i,m_1+1} & \cdots & a_{i,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n_1+1,1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1} & a_{n_1+1,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1+n_2,1} & \cdots & a_{n_1+n_2,m_1} & a_{n_1+n_2,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+n_2,m_1+m_2} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\ B = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \cdots & b_{1,\ell_1} & \cdots & b_{1,\ell_1+k} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ b_{m_1,1} & \cdots & b_{m_1,\ell_1} & \cdots & b_{m_1,\ell_1+k} & \cdots \\ \hline b_{m_1+1,1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1+k} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ b_{m_1+m_2,1} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1+k} & \cdots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(AB\ \text{の}\ (i\ ,\ \ell_1+k)\ \text{成分}) = \sum_{j=1}^{m_1+m_2} a_{ij}b_{j,\ell_1+k} = \sum_{j=1}^{m_1} a_{ij}b_{j,\ell_1+k} + \sum_{j=1}^{m_2} a_{i,m_1+j}b_{m_1+j,\ell_1+k}$$

$$= (a_{i1}b_{1,\ell_1+k} + a_{i2}b_{2,\ell_1+k} + \cdots + a_{i,m_1}b_{m_1,\ell_1+k})$$

$$+ (a_{i,m_1+1}b_{m_1+1,\ell_1+k} + a_{i,m_1+2}b_{m_1+2,\ell_1+k} + \cdots + a_{i,m_1+m_2}b_{m_1+m_2,\ell_1+k})$$

$$= \sum_{j=1}^{m_1} (\ A_{11}\ \text{の}\ (i\ ,\ j)\ \text{成分}\ )(\ B_{12}\ \text{の}\ (j\ ,\ k)\ \text{成分}\ )$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_1} (\ A_{12}\ \text{の}\ (i\ ,\ j)\ \text{成分}\ )(\ B_{22}\ \text{の}\ (j\ ,\ k)\ \text{成分}\ )$$

$$= (\ (\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}\ )\ \text{の}\ (i\ ,\ k)\ \text{成分}\ )$$

相対的成分

$$\boxed{AB = C = \begin{array}{c} \xrightarrow{\ \ell_1\ } \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \end{array}}$$

③ $n_1+1 \leqq i \leqq n_1+n_2$, $1 \leqq k \leqq \ell_1$ の場合

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,m_1} & a_{1,m_1+1} & \cdots & a_{1,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1+1,1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1} & a_{n_1+1,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1+m_2} \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1+i,1} & \cdots & a_{n_1+i,m_1} & a_{n_1+i,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+i,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & j & \quad \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1,\ell_1+1} & \cdots & b_{1,\ell_1+\ell_2} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & b_{m_1,k} & \cdots & b_{m_1,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1,\ell_1+\ell_2} \\ \hline \cdots & b_{m_1+1,k} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1+\ell_2} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & b_{m_1+m_2,k} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1+\ell_2} \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$(AB \text{ の } (n_1+i\ ,\ k) \text{ 成分}) = \sum_{j=1}^{m_1+m_2} a_{n_1+i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{m_1} a_{n_1+i,j} b_{j,k} + \sum_{j=1}^{m_2} a_{n_1+i,m_1+j} b_{m_1+j,k}$$

$$= (a_{n_1+i,1} b_{1,k} + a_{n_1+i,2} b_{2,k} + \cdots + a_{n_1+i,m_1} b_{m_1,k})$$

$$+ (a_{n_1+i,m_1+1} b_{m_1+1,k} + a_{n_1+i,m_1+2} b_{m_1+2,k} + \cdots + a_{n_1+i,m_1+m_2} b_{m_1+m_2,k})$$

$$= \sum_{j=1}^{m_1} (\ A_{21} \text{ の } (i\ ,\ j) \text{ 成分 })(\ B_{11} \text{ の } (j\ ,\ k) \text{ 成分 })$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_1} (\ A_{22} \text{ の } (i\ ,\ j) \text{ 成分 })(\ B_{21} \text{ の } (j\ ,\ k) \text{ 成分 })$$

$$= (\ (\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}\ ) \text{ の } (i\ ,\ k) \text{ 成分 })$$

$$\boxed{AB = C = \overset{n_1}{\downarrow}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}}$$

③ $n_1+1 \leqq i \leqq n_1+n_2$, $\ell_1+1 \leqq k \leqq \ell_1+\ell_2$ の場合

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,m_1} & a_{1,m_1+1} & \cdots & a_{1,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1+1,1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1} & a_{n_1+1,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1+m_2} \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1+i,1} & \cdots & a_{n_1+i,m_1} & a_{n_1+i,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+i,m_1+m_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \quad & \quad & \quad & \quad & j & \quad \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \cdots & b_{1,\ell_1} & \cdots & b_{1,\ell_1+k} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ b_{m_1,1} & \cdots & b_{m_1,\ell_1} & \cdots & b_{m_1,\ell_1+k} & \cdots \\ \hline b_{m_1+1,1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1+k} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ b_{m_1+m_2,1} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1} & \cdots & b_{m_1+m_2,\ell_1+k} & \cdots \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

(AB の $(n_1+i\ ,\ \ell_1+k)$ 成分)

$$= \sum_{j=1}^{m_1+m_2} a_{n_1+i,j}b_{j,\ell_1+k} = \sum_{j=1}^{m_1} a_{n_1+i,j}b_{j,\ell_1+k} + \sum_{j=1}^{m_2} a_{n_1+i,m_1+j}b_{m_1+j,\ell_1+k}$$

$$= (a_{n_1+i,1}b_{1,\ell_1+k} + a_{n_1+i,2}b_{2,\ell_1+k} + \cdots + a_{n_1+i,m_1}b_{m_1,\ell_1+k})$$

$$+ (a_{n_1+i,m_1+1}b_{m_1+1,\ell_1+k} + a_{n_1+i,m_1+2}b_{m_1+2,\ell_1+k} + \cdots + a_{n_1+i,m_1+m_2}b_{m_1+m_2,\ell_1+k})$$

$= \sum_{j=1}^{m_1}$ (A_{21} の $(i\ ,\ j)$ 成分)(B_{12} の $(j\ ,\ k)$ 成分)

$+ \sum_{j=1}^{m_1}$ (A_{22} の $(i\ ,\ j)$ 成分)(B_{22} の $(j\ ,\ k)$ 成分)

$=$ (($A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$) の $(i\ ,\ k)$ 成分)

$$\boxed{AB = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}} \downarrow n_1 \qquad \xrightarrow{\ \ell_1\ }$$

以上により

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$ が成り立つ。

特に A , B が正方行列で次のような場合は

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

● $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+C_{12}D_{21} & A_{11}D_{12}+C_{12}D_{22} \\ C_{21}B_{11}+C_{22}D_{21} & C_{21}D_{12}+C_{22}D_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} & A_{11}\begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} B_{11} + \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}B_{11} + \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}$$

$$A_{11}\begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} B_{11} + \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}+A_{23}B_{33} \\ A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32} & A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}+A_{23}B_{33} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32} & A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33} \end{pmatrix}$$

$AB=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$ を根拠に分割が増えても積が定義できれば、上記のように普通の行列の成分の積のように計算できる。

(P.311　2次形式・エルミート形式)

(2次形式)

$Q(x\,,y\,,z\,,w)$

$=ax^2+by^2+cz^2+dw^2+2exy+2fxz+2gxw+2hyz+2kyw+2mzw$

$$=\begin{pmatrix}x & y & z & w\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x & y & z & w\end{array}\\ \begin{pmatrix}a & e & f & g\\ e & b & h & k\\ f & h & c & m\\ g & k & m & d\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$$

(エルミート形式)

$Q(x\,,y\,,z\,,w)$

$$=\begin{pmatrix}x & y & z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \overline{e} & \overline{f} & \overline{g}\\ e & b & \overline{h} & \overline{k}\\ f & h & c & \overline{m}\\ g & k & m & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\\ \overline{w}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x & y & z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\overline{x}+\overline{e}\,\overline{y}+\overline{f}\,\overline{z}+\overline{g}\,\overline{w}\\ e\overline{x}+b\overline{y}+\overline{h}\,\overline{z}+\overline{k}\,\overline{w}\\ f\overline{x}+h\overline{y}+c\overline{z}+\overline{m}\,\overline{w}\\ g\overline{x}+k\overline{y}+m\overline{z}+d\overline{w}\end{pmatrix}$$

$=ax\overline{x}+\overline{e}x\overline{y}+\overline{f}x\overline{z}+\overline{g}x\overline{w}+ey\overline{x}+by\overline{y}+\overline{h}y\overline{z}+\overline{k}y\overline{w}+fz\overline{x}+hz\overline{y}+cz\overline{z}$
$+\overline{m}z\overline{w}+gw\overline{x}+kw\overline{y}+mw\overline{z}+dw\overline{w}$

$=ax\overline{x}+by\overline{y}+cz\overline{z}+dw\overline{w}+\overline{e}x\overline{y}+ey\overline{x}+\overline{f}x\overline{z}+fz\overline{x}+\overline{g}x\overline{w}+gw\overline{x}$
$+\overline{h}y\overline{z}+hz\overline{y}+\overline{k}y\overline{w}+kw\overline{y}+\overline{m}z\overline{w}+mw\overline{z}$

$=ax\overline{x}+by\overline{y}+cz\overline{z}+dw\overline{w}+2\mathcal{R}\left(\overline{e}x\overline{y}\right)+2\mathcal{R}\left(\overline{f}x\overline{z}\right)+2\mathcal{R}\left(\overline{g}x\overline{w}\right)+2\mathcal{R}\left(\overline{h}y\overline{z}\right)$
$+2\mathcal{R}\left(\overline{k}y\overline{w}\right)+2\mathcal{R}\left(\overline{m}z\overline{w}\right)$

（P.314　定理3）

（注意）

● $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&0\\1&0&3-\lambda\end{vmatrix}$

$\to (1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\0&3-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2-\lambda\\1&0\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-(2-\lambda)$

$\to\ (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-(2-\lambda)=(2-\lambda)\{(1-\lambda)(3-\lambda)-1)$

$\to -(\lambda-2)((\lambda-1)(\lambda-3)-1)=0\ \to -(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)=0$

$\to\ \lambda=2\ ,\ \lambda=2\pm\sqrt{2}$

● $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\ \to \begin{vmatrix}1-\lambda&0\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=0\ \to\ \lambda=1\ ,\ 2$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{n-1,1}&\cdots&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{pmatrix}$$

◎ 基本的に、$\boldsymbol{A}$ の固有値と $\boldsymbol{A}_{n-1}$ の固有値はまったく関係がない。

後半の背理法については、$\boldsymbol{A}$ が正でないと仮定したから、$det\,\boldsymbol{A}>0$ から $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ のうちに 0 はない。しかし負の数は偶数個存在するはずである。

その中の2つを λ_i, λ_j, $i\neq j$ として、この i, j に対して、少なくとも1つは 0 でない c_i, $c_j\in\boldsymbol{F}$ を

$\boldsymbol{x}=c_i\boldsymbol{u}_i+c_j\boldsymbol{u}_j$

の第 n 成分が 0 となるように選ぶ。

つまり、$\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_j$ の第 n 成分が 0 ならば、c_i, c_j はどちらか 0 でなければよいし、どちらか一方の第 n 成分が 0 ならば、逆の c_* を 0 にすればよい。両方 0 でない場合は、$ac_i+bc_j=0$ となる c_i, c_j を選べばよい。

（P.315　例）

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

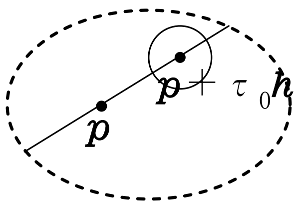
$= 12-1+(-7)-3 = 1 > 0$

（P.318　補題）

$\gamma(\tau) = \boldsymbol{p} + \tau\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{U}$となる $\tau \in \boldsymbol{R}$ の集合は 0 を含む1つの開区間である。なぜなら、その区間を $\boldsymbol{I}$ とすれば、$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{U}$ で $\boldsymbol{U}$ は凸開集合であるから、ある $\boldsymbol{r} > 0$ が存在して、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}\,;\boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{U}$とすることができる。したがって、$|\tau\boldsymbol{h}| < \boldsymbol{r}$ となるように τ を十分小さくすれば、$\boldsymbol{p} + \tau\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{U}$となる。また、当然 $0 \in \boldsymbol{I}$ である。

開集合であることは、任意の $\tau_0 \in \boldsymbol{I}$ に対し

$\gamma(\tau) = \boldsymbol{p} + \tau_0\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{U}$ であるから、ある $\boldsymbol{r} > 0$ が存在して $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p} + \tau_0\boldsymbol{h}\,;\boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{U}$とできる。



そこで $|\tau - \tau_0| < \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{h}|}$ とすれば

$|\boldsymbol{p} + \tau\boldsymbol{h} - (\boldsymbol{p} + \tau_0\boldsymbol{h})| = |(\tau - \tau_0)\boldsymbol{h}| = |\tau - \tau_0|\,|\boldsymbol{h}| < \boldsymbol{r}$

よって $\boldsymbol{p} + \tau\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{p} + \tau_0\boldsymbol{h}\,;\boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{U}$となるので $\tau \in \boldsymbol{I}$ となる。ゆえに $\boldsymbol{I}$ は開集合である。

区間であることについては、任意の $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}$ に対して、$\boldsymbol{s} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{t}$ を満たす任意の $\boldsymbol{c}$ に対して $\gamma(\boldsymbol{c}) \notin \boldsymbol{U}$ だとしたら、$\boldsymbol{U}$ が凸集合であることに反するので、$\gamma(\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{U}$、つまり $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{I}$ となり、$\boldsymbol{I}$ は中間値性質をもつので区間である。

● $\gamma(a) = \boldsymbol{p} + a\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a}$, $\gamma(b) = \boldsymbol{p} + b\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b}$ のとき

$\gamma((1-t)a + tb) = \boldsymbol{p} + ((1-t)a + tb)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{p} + a\boldsymbol{h} - ta\boldsymbol{h} + tb\boldsymbol{h}$

$= \boldsymbol{p} - t\boldsymbol{p} + a\boldsymbol{h} - ta\boldsymbol{h} + t\boldsymbol{p} + tb\boldsymbol{h} = (1-t)(\boldsymbol{p} + a\boldsymbol{h}) + t(\boldsymbol{p} + b\boldsymbol{h})$

$= (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$

（P.319　定理5）

$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \gamma(b) - \gamma(a) = \boldsymbol{p} + b\boldsymbol{h} - (\boldsymbol{p} + a\boldsymbol{h}) = (b-a)\boldsymbol{h}$

(P.321　定理6)

f を第2次までの偏導関数が存在する関数と仮定しているが、C^2級の間違えではないだろうか。なぜなら、$H_f(x)$ が対称行列にならないからである。

(注意)「このことは行列式が成分の連続関数であることと・・・」「が」と「の」が反対であると思う。

(P.327　三角多項式)

$$P(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \cdots \quad ①$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\ ,\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{-(e^{-inx} - e^{inx})}{2i}$$

$$= \frac{i(e^{-inx} - e^{inx})}{2}$$

これらを①に代入すると

$$P(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{ie^{-inx} - ie^{inx}}{2})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n e^{inx} + a_n e^{-inx} + ib_n e^{-inx} - ib_n e^{inx}}{2})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n e^{inx} - ib_n e^{inx} + a_n e^{-inx} + ib_n e^{-inx}}{2})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n - ib_n}{2}) e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n + ib_n}{2}) e^{-inx}$$

$e^{in\times 0} = 1$ に注意して $a_0 = c_0 e^{in\times 0}$ と考えれば

$$= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \quad \cdots \quad ②$$

ただし、$c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$　$(1 \leqq n \leqq N)$ である。

逆に②の形の式が与えられたとき、

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = c_0 e^{i0x} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(\cos nx - i \sin nx) + \sum_{n=1}^{N} c_n(\cos nx + i \sin nx)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} \{ c_{-n}(\cos nx - i \sin nx) + c_n(\cos nx + i \sin nx) \}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} \{ (c_{-n} + c_n)\cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx \}$$

$a_0 = c_0$, $a_n = c_{-n} + c_n$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ $(1 \leqq n \leqq N)$

とすれば、②は①の形になる。

（P.329　実変数の複素数値関数の積分）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$$

$$\int_a^b \overline{f(x)}dx = \int_a^b u(x)dx - i\int_a^b v(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

（P.329　三角多項式と c_n の関係）

$n \in Z$, $n \neq 0$ ならば $e^{inx} = \left(\dfrac{e^{inx}}{in}\right)'$ で、これは周期 2π の関数である。よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

である。ゆえに $n \in Z$ に対し

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \text{ のとき} \\ 0 & , \quad n \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。

このことから、三角多項式

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

の係数 c_n は、$P(x)$ から積分

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)e^{-inx}dx$$

によって決定されることがわかる。実際、上式の右辺を計算してみると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-N}^{N} c_m e^{imx}\right)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-N}^{N} c_m e^{i(m-n)x}\right)dx$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} c_m\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx\right) = c_n \quad (0 \leqq n \leqq N)$$

$n > N$ または $n < -N$ の場合は $c_n = 0$ となる。

（P.330　フーリエ級数）

周期 2π で区間 [−π，π] で積分可能な複素数値関数 f が与えられたとき

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

によって定められる数 c_n を f のフーリエ係数と呼び、この数 c_n を用いて作られる三角級数

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

を f のフーリエ級数という。

問題点は3つ

① 関数 f のフーリエ係数は収束するか？

② 収束するとしてそれは関数 f に等しいか？

③ f のフーリエ係数はいかなる意味においてもとの関数 f を表すか？

（P.331　$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ のチェック）

1）$\overline{(g, f)} = \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}dx} = \int_a^b \overline{g(x)}f(x)dx = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = (f, g)$

4）任意の $f \in V$ に対し $(f, f) \geqq 0$

$$(f, f) = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geqq 0$$

しかし、$(f, f) = 0$ であっても $f = 0$ はいえない。(”半正”の内積と呼ぶ)

● f が連続である場合は $f = u + iv$ とした場合 u, v も連続なので u^2, v^2 も連続であるから $|f|^2 = u^2 + v^2$ は連続である。したがって、積分の強単調性から $f = 0$ となる。詳しくは

f が a で連続ならば、任意の ε > 0 に対して、ある δ > 0 が存在して

$|a - x| < \delta$ ならば $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$

が成り立つ。$f=u+iv$ とすれば

$(u(a)-u(x))^2 \leqq (u(a)-u(x))^2+(v(a)-v(x))^2$

右辺は $|f(a)-f(z)|^2$ であるから $|u(a)-u(x)|<\varepsilon$ となる。よって u は連続であり、u^2 も連続である。v^2 についても同様である。

次に $\int_a^b u(x)^2dx=0$ ならば $u=0$ については背理法で証明する。

（証）仮に $[a, b]$ 内の一点 ξ で $u(\xi)\neq 0$ とすれば、$u(x)$ の連続性から、正数 ε, δ を適当にとれば、$[\xi-\delta, \xi+\delta]$ において $u(x)^2>\varepsilon>0$ となるようにすることができる。よって

$$\int_a^b u(x)^2dx \geqq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} u(x)^2dx > \varepsilon\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} dx = 2\delta\varepsilon>0$$

これは仮定に反する。この証明では u の連続性を仮定しているので u が連続でなければ証明できない。（微分積分学　第一巻　藤原松三郎 著　P.312）

$|f|^2=u^2+v^2$ から $f=0$ となる。

（P.332　命題1（シュバァルツの不等式））

$\|\alpha f+\beta g\|=|\alpha|^2\|f\|^2+\alpha\overline{\beta}(f, g)+\overline{\alpha}\beta(g, f)+|\beta|^2\|g\|^2$

$=|\alpha|^2\|f\|^2+2\mathcal{R}\left(\alpha\overline{\beta}(f, g)\right)+|\beta|^2\|g\|^2 \geqq 0$

・ $\|g\|>0$ ならば、$\alpha=\|g\|^2$，$\beta=-(f, g)$ とおけば $\overline{\beta}=-\overline{(f, g)}$ から

$\|g\|^4\|f\|^2-2\mathcal{R}\left(\|g\|^2|(f, g)|^2\right)+|(f, g)|^2\|g\|^2 \geqq 0$

$\|g\|^4\|f\|^2-2\|g\|^2|(f, g)|^2+|(f, g)|^2\|g\|^2 \geqq 0$

$\|g\|^4\|f\|^2-\|g\|^2|(f, g)|^2 \geqq 0$

・ $\|g\|=0$ ならば、$\beta=-(f, g)$ とおけば

$|\alpha|^2\|f\|^2-2\mathcal{R}\left(\alpha|(f, g)|^2\right) \geqq 0$

ここで $\alpha\in\boldsymbol{R}$ とすれば、α の二次関数と見て

$\alpha^2\|f\|^2-2\alpha|(f, g)|^2 \geqq 0 \to D=4|(f, g)|^4 \leqq 0 \to (f, g)=0$

（P.334　命題2）

$(\sum_{m=1}^{N}\alpha_m\phi_m,\sum_{m=1}^{N}\alpha_m\phi_m)$

$=(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2+\cdots+\alpha_N\phi_N,\ \alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2+\cdots+\alpha_N\phi_N)$

$=|\alpha_1|^2\|\phi_1\|^2+|\alpha_2|^2\|\phi_2\|^2+\cdots+|\alpha_N|^2\|\phi_N\|^2$

（P.335　命題3）

確認

$[a,b]$ 上で積分可能な関数全体の集合を V とする。V の正規直交系を (ϕ_n)

$(n=1,2,\cdots)$ とする。

$f\in V$ に対し、

$c_n=(f,\ \phi_n)=\int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}dx$

とする。f , $\overline{\phi_n}$ は積分可能であるので、その積は積分可能であるから c_n は確定する。そこで第 n 部分和

$s_N(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n\phi_n(x)$

が確定する。これと任意の $\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\phi_n(x)$ $(\gamma_n\in C)$ を比べた結果が命題3の内容である。

（P.336　系3）

$|f|^2$ は可積分なので $\int_a^b|f|^2dx$ が定まるので、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ が収束することがわかる。

（P.337　正規直交系の存在）

関数列 $1, x, x^2$ は一次独立であるので、それを正規直交化してみる。

$\tilde{u}_1=1$, $\|1\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}dx}=\sqrt{2}$ $\to$ $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tilde{u}_2=x-(x,\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}=x-\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}xdx)=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0$

$=x-0=x$, $\|\tilde{u}_2\|=\|x\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2dx}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\to$ $u_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_3 = x^2-(x^2,\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}-(x^2,\sqrt{\frac{3}{2}}x)\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$= x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}x^2dx)-\sqrt{\frac{3}{2}}x(\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}x^3dx)$$

$$= x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3} = x^2-\frac{1}{3}$$

$$,\|\tilde{\boldsymbol{u}}_3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9})dx}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{18-20+10}{45}} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3})$$

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x,\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3}))$$

直交しているか確認してみる。

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2) = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{4}xdx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}xdx = 0$$

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_3) = \int_{-1}^{1}(\frac{3\sqrt{5}}{4}x^2-\frac{\sqrt{5}}{4})dx = \frac{3\sqrt{5}}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}-\frac{\sqrt{5}}{4}[x]_{-1}^{1} = \frac{3\sqrt{5}}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{4}\times 2$$

$$= 0$$

$$(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3) = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}x(\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3}))dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(\frac{3\sqrt{15}}{4}x^3-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\frac{1}{3}x)dx = \int_{-1}^{1}(\frac{3\sqrt{15}}{4}x^3-\frac{\sqrt{15}}{4}x)dx = 0$$

(P.339　ここからが本来のフーリエ係数)

① $[-\pi\ ,\ \pi]$ で可積分で周期 2π をもつ関数全体の集合を $\boldsymbol{V}$ とする。

② $\boldsymbol{V}$ での内積は次のように定める。$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{V}$ に対し

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

③ $\phi_n(x) = e^{inx}$ （$n = 0,\pm1,\pm2,\cdots$）は正規直交系であり、

$$c_n=(f,\phi_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx$$

④ $f(x)$ のフーリエ級数を $\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$ と定める。

（注意）可積分関数の積は可積分なので c_n は定まる。よって、f から $\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$ は定まる。したがって $f\ \to\ \sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$ でしかない。

（P.341　定理1　$n=1,\cdots,N\to n=0,\pm1,\cdots,\pm N$）

(a)　$t_N=\sum_{-N}^{N}\gamma_ne^{inx}$ とする。$s_N=\sum_{-N}^{N}c_n\phi_n$ なので

$$(f-s_N,\phi_n)=(f-\sum_{-N}^{N}c_m\phi_m,\phi_n)=(f,\phi_n)-\sum_{-N}^{N}c_m(\phi_m,\phi_n)=c_n-c_n=0$$

残りは同様にしてわかる。

(c)　$c_n\to0$（$n\to\pm\infty$）から $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$ なので

$a_n\to0$, $b_n\to0$（$n\to\infty$）

（P.342　命題4（ディリクレの核））

$D_N(x)=\sum_{-N}^{N}e^{inx}$（ディリクレの核）としたとき

$$s_N(x)=\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}=\sum_{-N}^{N}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt)e^{inx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{in(x-t)}dt)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\{\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-iN(x-t)}dt+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-i(N-1)(x-t)}dt+\cdots+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{iN(x-t)}dt\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\sum_{-N}^{N}(e^{in(x-t)})dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_N(x-t)dt$$

ここで $y=x-t$ とすれば $\frac{dy}{dt}=-1\to dt=-dy$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi}f(x-y)D_N(x-y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-y)D_N(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)D_N(t)dt$$

上巻P.295 問題8．2 ※ P.338 下から 5 ～ 4 行 参照

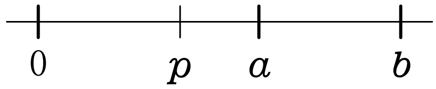
(2) u は $(-\infty, \infty)$ に含まれる任意の閉区間で可積分かつ周期 p $(p > 0)$ をもつ周期関数とする。そのとき、$b-a=p$ を満たす任意の a , b に対して

$$\int_a^b u(x)dx = \int_0^p u(x)dx$$

である。

(証) 上巻P.240 定理1(b) から、u は可積分であり

$$\int_a^b u = \int_a^{a+p} u = \int_0^p u - \int_0^a u + \int_p^{a+p} u$$



そこで、$-\int_0^a u + \int_p^{a+p} u$ については

$0 \leqq x \leqq a$ において $u(x) = u(x+p)$ であるから 0 になる。

f および D は任意の閉区間で可積分かつ周期 2π の周期関数なので

$f(x+T) = u(x+T) + i\,v(x+T) = f(x) = u(x) + i\,v(x)$

よって $u(x+T) = u(x)$, $v(x+T) = v(x)$ であり、同じ周期をもつ。D についても同様で $f \circ D$ の実部、虚部も同じ周期をもつことになる。

$g(t) = f \circ D(t) = u(t) + i\,v(t)$ と考えれば、定義から

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} g(t)dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} u(t)dt + i\int_{x-\pi}^{x+\pi} v(t)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt + i\int_{-\pi}^{\pi} v(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)D_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)D_N(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt$$

（P.342　ディリクレの核の変形）

$$D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx} + e^{-i(N-1)x} + \cdots + e^{-ix} + e^{i0x} + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{iNx}$$

$= e^{-iNx}(1+e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{i(2N)x})$

したがって $s = 1+e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{i(2N)x}$ とすれば

$e^{ix}s = e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{i(2N)x}+e^{i(2N+1)x}$

$s(e^{ix}-1) = e^{i(2N+1)x}-1 \ \rightarrow\ s = \dfrac{e^{i(2N+1)x}-1}{e^{ix}-1}$

よって

$$D_N(x) = \frac{e^{-iNx}(\,e^{i(2N+1)x}-1\,)}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(N+1)x}-e^{-iNx}}{e^{ix}-1}$$

分母・分子に $e^{-\frac{ix}{2}}$ を掛けて、$\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ に注意すれば

$$D_N(x) = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x}-e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \quad \cdots \quad ①$$

$D_N(0) = \sum_{-N}^{N} e^{in0} = e^{-iN0}+e^{-i(N-1)0}+\cdots+e^{-i0}+e^{i0}+e^{i0}+e^{i20}+\cdots+e^{iN0}$ から

$D_N(0) = 2N+1$ である。ロピタルの定理からも

$$\frac{(\sin(N+\frac{1}{2})x)'}{(\sin\frac{x}{2})'} = \frac{(N+\frac{1}{2})\cos(N+\frac{1}{2})x}{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}} \rightarrow 2N+1 \quad (\,x\rightarrow 0\,)$$

また

$$D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx}+e^{-i(N-1)x}+\cdots+e^{-ix}+1+e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{iNx}$$

P.329 の公式から

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1 \quad \cdots \quad ②$$

(P.343　命題5)

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n(x)$$

$$= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, K_n(t)dt$$

（P.344 フェイエールの核の変形）

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x\,\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

ここで、$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$ であるから、分子は

$$\sin(n+\frac{1}{2})x\,\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\{\cos nx-\cos(n+1)x\}$$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ で、分母は

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$$

よって

$$D_n(x) = \frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{1-\cos x}$$

$$\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{1-\cos x}\{(1-\cos x)+(\cos x-\cos 2x)+(\cos 2x-\cos 3x)+\cdots$$

$$+(\cos Nx-\cos(N+1)x)\}$$

$$= \frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x}$$

したがって

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x} \quad （フェイエールの核）\quad \cdots \quad ③$$

$x = 0$ のときは $D_n(0) = 2n+1$ なので

$\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = 1+3+5+\cdots+(2N+1) = (N+1)^2$ から $K_N(0) = N+1$ である。

③から、すべての x に対して $K_N(x) \geqq 0$ である。

②から

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}(\sum_{n=0}^{N} D_n(x))dx$$

$$= \frac{1}{N+1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=0}^{N} D_n(x))dx = \frac{1}{N+1}(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx) = 1 \quad \cdots \quad ④$$

（P.344　定理2　（フェイエールの定理））

（証）④から

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_N(t)dt$$

これと命題5から $\sigma_N(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_n(t)dt$ なので

$$\sigma_N(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x-t)-f(x)\}K_n(t)dt$$

この差を評価するのが目標である。

上式から

$$|\sigma_N(x)-f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x-t)-f(x)\}K_n(t)dt\right|$$

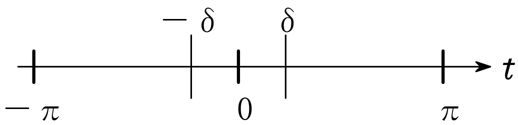
$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \quad \leftarrow K_n(t) \geqq 0 \quad \cdots \quad ⑤$$

f は周期 2π の連続関数、したがって閉区間 $[-\pi, \pi]$ で一様連続であるから全区間で一様連続である。したがって、$\varepsilon > 0$ に対して適当に $\delta > 0$ をとれば、x に無関係（$x \notin [-\pi, \pi]$ でもよい）に

$|x-t-x| = |t| < \delta$　ならば　$|f(x-t)-f(x)| < \varepsilon$　が成り立つ。

δ はもちろん $\delta < \pi$ と仮定してよい。そこで⑤の右辺の積分を3つのに分けると

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)$$



中央の項については

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt = \varepsilon \quad \cdots \quad ⑥$$

また、左右の区間 $-\pi \leqq t \leqq -\delta$, $\delta \leqq t \leqq \pi$ については

$-1 \leqq \cos(-\pi) = \cos\pi \leqq \cos t \leqq \cos\delta = \cos(-\delta) < 1$ から

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{1-\cos(N+1)t}{1-\cos t} \leqq \frac{1}{N+1}\frac{2}{1-\cos\ \delta}$$

であるから、$[-\pi\ ,\ \pi]$ における $|f(x)|$ の上限を M とすれば、

$$|f(x-t)-f(x)| \leqq |f(x-t)|+|f(x)| \leqq 2M$$

$$|f(x-t)-f(x)|K_n(t) \leqq \frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}$$

(左) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}\int_{-\pi}^{-\delta}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}(\pi-\delta)$$

(右) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}\int_{\delta}^{\pi}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}(\pi-\delta)$$

(左)+(右)は

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}(2\pi-2\delta)$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}2\pi = \frac{1}{N+1}\frac{4M}{1-\cos\ \delta}$$

よって N_0 を十分大きくとれば、$N \geqq N_0$ を満たすすべての N に対して

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) < \varepsilon \quad \cdots \quad ⑦$$

ゆえに、$N \geqq N_0$ ならば、すべての $x \in [-\pi\ ,\ \pi]$ に対して ⑥、⑦ から

$$|\sigma_N(x)-f(x)| < 2\varepsilon$$

すなわち $\sigma_N(x)$ は $f(x)$ に一様収束する。

（P.346　定理3 （パーセブァル））

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n(x) \ , \ s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \text{ から}$$

$$\sum_{n=0}^{N} s_n(x) = s_0(x) + s_1(x) + s_2(x) + \cdots + s_N(x)$$

$$= c_0 + (c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix}) + (c_{-2}e^{-i2x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{-i2x}) + \cdots$$

$$+ (c_{-N}e^{-iNx} + \cdots + c_{-2}e^{-i2x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{-i2x} + \cdots + c_N e^{iNx})$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx} \ \leftarrow N \text{ 次三角多項式}(\ d_{-N} = c_{-N}\ ,\ \cdots\ ,\ d_0 = (N+1)c_0\ ,\ \cdots\ ,\ d_N = c_N\ )$$

（P.347　定理4）

上巻 P.308 定理5と定理3から

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f - s|^2 dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f - s_N|^2 dx = 0$$

（P.348　定理5）

まず f が $[-\pi\ ,\ \pi]$ で滑らかとしている。

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$\int hg' = hg - \int h'g \ \text{ から } \ h = f\ ,\ g' = e^{-inx} \ \rightarrow h' = f'\ ,\ g = \frac{e^{-inx}}{-in}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left\{ \left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx \right\}$$

ここで

$$\left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} = f(\pi)\frac{e^{-in\pi}}{-in} - f(-\pi)\frac{e^{in\pi}}{-in} = f(\pi)\frac{e^{-in\pi}}{-in} + f(\pi)\frac{e^{in\pi}}{in}$$

$$= f(\pi)\frac{(e^{i\pi})^n - (e^{i\pi})^{-n}}{in} = f(\pi)\frac{(-1)^n - (-1)^{-n}}{in} = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx$$

次に仮に $[-\pi\ ,\ \pi]$ の間に分点 a が1つあったとして、$[-\pi\ ,a]$, $[a\ ,\ \pi]$ で区分的に滑らかであったとすれば。

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{a}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{a}f'(x)e^{-inx}dx\right\}$$

$$+c_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{a}^{\pi}+\frac{1}{in}\int_{a}^{\pi}f'(x)e^{-inx}dx\right\}$$

$f(x)$ は a で連続(つながっている)なので

$$\left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{a}+\left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{a}^{\pi}=0$$

よって

$$c_n=\frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-inx}dx$$

この結果は分点が有限個であれば増えても同じである。また f' の周期は

$$f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h+T)-f(x+T)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

から $f'(x)$ も同じ周期 2π をもつ。

ゆえに f' のフーリエ係数を c_n' とすれば、$c_n=\dfrac{c_n'}{in}$ である。これより

$$|c_n|=\frac{|c_n'|}{n}$$

ここで $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{n})^2=\frac{1}{2}(x^2-\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2})\geqq 0 \ \to\ \frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{n^2})\geqq\frac{x}{n}$ なので

$$|c_n|=\frac{|c_n'|}{n}\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|c_n'|^2\right)$$

を得る。級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する。(上巻P.87 定理7) ゆえに $\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{n^2}$ も収束する。

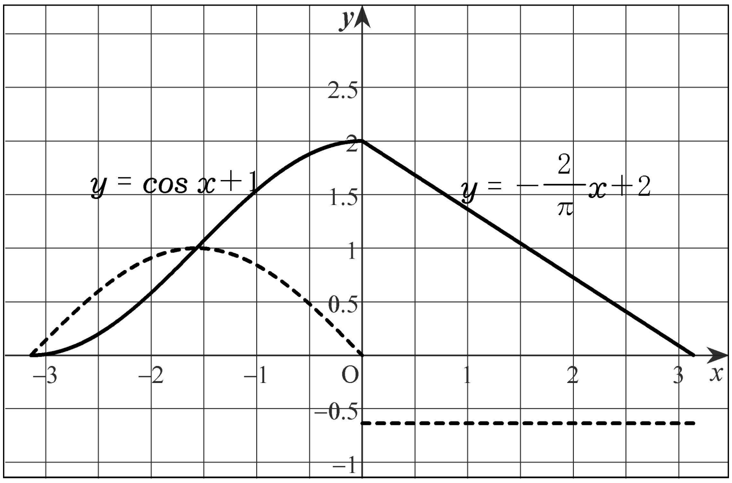
f' が積分可能であることは、下巻 P.206 補題ではっきりする。したがって、定理1の (c) から、$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n'|^2$ は収束する。よって $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ は上巻P.83 定理6から収束する。

そして $|c_ne^{inx}|=|c_n|$ なので上巻P.305 定理2から、$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ は一様かつ絶対収束する。ゆえに定理4によって、この級数の和は $f(x)$ に等しい。

つまり、f が $[-\pi\ ,\ \pi]$ で C^1級ならばフーリエ展開可能である。

（P.349　注意）

注意は右図のような場合を示している。
点線が $f'(x)$ のグラフである。
$f'(-\pi)=0\ ,\ f'(\pi)=-\dfrac{2}{\pi}$
であるが、$f'(\pi)=0$ とすればよい。



（P.350　補題のための準備）

（上積分の区間に関する加法性について）

f が区間 $[a\ ,\ b]$ で有界で $[a\ ,\ b]$ の内点を c とする。そのとき

$$\overline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^c} f+\overline{\int_c^b} f$$

（証）区間 $[a\ ,\ b]$ における上方和を U_a^b と記すことにする。

上巻 P.234 定理6から、任意の $\varepsilon>0$ に対して、適当に $\delta_1>0$ をとれば $d(Q_1)<\delta_1$ を満たす任意の分割 Q_1 に対して

$$0\leqq U_a^c(Q_1\ ,f)-\overline{\int_a^c} f<\varepsilon \quad\cdots\quad ①$$

また同じ $\varepsilon>0$ に対し、適当に $\delta_2>0$ をとれば $d(Q_2)<\delta_2$ を満たす任意の分割 Q_2 に対して

$$0\leqq U_c^b(Q_2\ ,f)-\overline{\int_c^b} f<\varepsilon \quad\cdots\quad ②$$

$\delta=min\{\delta_1\ ,\ \delta_2\}$ とすれば、$d(Q_1)\ ,d(Q_2)<\delta$ を満たす任意の $Q_1\ ,\ Q_2$ に対して①、②が成り立つので、$P=Q_1\cup Q_2$ とすれば P は $[a\ ,\ b]$ の分割であり

$$0\leqq U_a^c(Q_1\ ,f)+U_c^b(Q_2\ ,f)-\left(\overline{\int_a^c} f+\overline{\int_c^b} f\right)<2\varepsilon$$

$$0\leqq U_a^b(P\ ,f)-\left(\overline{\int_a^c} f+\overline{\int_c^b} f\right)<2\varepsilon$$

また同じ $\varepsilon > 0$ に対し、適当に $\delta' > 0$ をとれば、$d(P') < \delta'$ を満たす任意の分割 P' に対して

$$0 \leqq U_a^b(P', f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

そこで $d(P) = d(Q_1 \cup Q_2)$ だったので、δ_1, δ_2 をより小さくすれば $d(P) < \delta'$ とすることができるので

$$0 \leqq U_a^b(P, f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon \quad \cdots \quad ③$$

①、②、③から

$$\left| \overline{\int_a^b} f - \left(\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f\right) \right| = \left| \overline{\int_a^b} f - U_a^b(P, f) + U_a^b(P, f) - \left(\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f\right) \right|$$

$$\leqq \left| \overline{\int_a^b} f - U_a^b(P, f) \right| + \left| U_a^b(P, f) - \left(\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f\right) \right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

ε は任意なので

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$$

が成り立つ。

下積分の区間に関する加法性についても同様である。

（P.350　補題）

上の準備から

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^{a+\varepsilon}} f + \overline{\int_{a+\varepsilon}^b} f \ , \ \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^{a+\varepsilon}} f + \underline{\int_{a+\varepsilon}^b} f$$

f が $[a, a+\varepsilon]$ で可積分であるから $\overline{\int_a^{a+\varepsilon}} f = \underline{\int_a^{a+\varepsilon}} f$ である。

$$\overline{\int_a^b} f - \overline{\int_{a+\varepsilon}^b} f = \underline{\int_a^b} f - \underline{\int_{a+\varepsilon}^b} f \ \rightarrow \ \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_{a+\varepsilon}^b} f - \underline{\int_{a+\varepsilon}^b} f$$

仮定により $[a, b]$ で $|f(x)| \leqq M$ となる定数 $M > 0$ が存在するから、

$$\overline{\int_{a+\varepsilon}^b} f \leqq M\varepsilon \ , \ -M\varepsilon \leqq \underline{\int_{a+\varepsilon}^b} f$$

であるから、$0 \leqq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqq 2M\varepsilon$

（P.351　定理1）

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \quad , \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$$

右の式から $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(x)dx$ であるから、19.1 節の命題4によって

$$s_n(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{ f(x-t)-f(x) \}D_N(t)dt$$

そこで、区間 $[-\pi , \pi]$ で関数 $g(t)$ を次のように定義する。

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x-t)-f(x)}{\sin\dfrac{t}{2}} & (0 < |t| \leqq \pi) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

$g(t)\sin(N+\frac{1}{2})t$ は $0 < |t| \leqq \pi$ のとき $\{ f(x-t)-f(x) \}D_N(t)$ に等しい。

$t = 0$ のときは $g(t)\sin(N+\frac{1}{2})t = \{ f(x-t)-f(x) \}D_N(t) = 0$ から

$$s_n(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(N+\frac{1}{2})t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\{ \sin Nt \cos\frac{1}{2}t + \cos Nt \sin\frac{1}{2}t \}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(t)\cos\frac{1}{2}t)\sin Nt\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(t)\sin\frac{1}{2}t)\cos Nt\, dt$$

となる。ここで t の関数

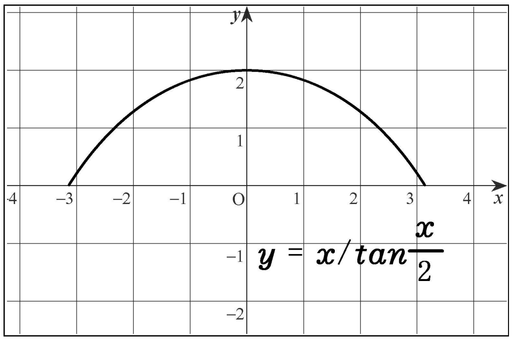
$$g(t)\sin\frac{1}{2}t = f(x-t)-f(x)$$

可積分であり、

$$f(x-(t+2\pi))-f(x) = f(x-t-2\pi)-f(x) = f(x-t)-f(x)$$

なので周期 2π である。

また



$$g(t)cos\frac{1}{2}t = \frac{f(x-t)-f(x)}{tan\frac{t}{2}}$$

$$tan\frac{t+2\pi}{2} = \frac{sin(\frac{t}{2}+\pi)}{cos(\frac{t}{2}+\pi)}$$

$$= \frac{sin\frac{t}{2}cos\pi - cos\frac{t}{2}sin\pi}{cos\frac{t}{2}cos\pi - sin\frac{t}{2}sin\pi} = \frac{-sin\frac{t}{2}}{-cos\frac{t}{2}} = tan\frac{t}{2}$$

なので周期 2π である。また、$\frac{x}{tan\frac{x}{2}}$ は $\frac{-x}{tan\frac{(-x)}{2}} = \frac{x}{tan\frac{x}{2}}$ から偶感数で

$x = \pm\pi$ で 0 である。そして上のグラフのように $x = 0$ で最大値 2 をとる。それは

$$\frac{x}{tan\frac{x}{2}} = \frac{x}{sin\frac{x}{2}}cos\frac{x}{2} = 2\frac{\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}cos\frac{x}{2} \to 2 \quad (x \to 0)$$

からわかる。仮定により $|t| \leqq \delta$ ならば

$$|\,g(t)cos\frac{1}{2}t\,| \leqq \frac{M|t|}{|tan\frac{t}{2}|} \leqq 2M$$

であるから、区間 $[-\delta\ ,\ \delta]$ で有界である。

次に $[0\ ,\ \pi]$ で有界であることを示す。

$$g(t) = \frac{f(x-t)-f(x)}{sin\frac{t}{2}} = (\,f(x-t)-f(x)\,)\times\frac{1}{sin\frac{t}{2}}$$

$g(t)$ の分子は可積分であるので有界であり、分母は $[\,\delta\ ,\ \pi\,]$ で $\neq 0$ で連続であるからその逆数も閉区間 $[\,\delta\ ,\ \pi\,]$ で連続なので有界である。したがって、それらの積である $g(t)$ は有界である。ゆえに $g(t)cos\frac{1}{2}t$ は $[0\ ,\ \pi]$ で有界である。

同様に $g(t)cos\frac{1}{2}t$ は $[-\pi\ ,0]$ においても有界であることがわかる。

次に $0<\varepsilon<\delta$ となる ε をとる。区間 $[\varepsilon\ ,\ \pi]$ において $g(t)cos\frac{1}{2}t$ が可積分であることを示す。

$(tan\frac{t}{2})^{-1}$ は $[\varepsilon\ ,\ \pi]$ において単調減少関数なので上巻 P.232 定理4から可積分である。$f(x-t)-f(x)$ も可積分なので、上巻 P.242 系からそれらの積である $g(t)cos\frac{1}{2}t$ も $[\varepsilon\ ,\ \pi]$ において可積分である。よって補題から $g(t)cos\frac{1}{2}t$ は $[0\ ,\ \pi]$ で可積分である。

ここで補題の仮定を $[a\ ,b-\varepsilon]$ で可積分に変更しても $[a\ ,b]$ で可積分である結論を得ることができることを示す。

$$\overline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^{b-\varepsilon}} f+\overline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f\ ,\quad \underline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^{b-\varepsilon}} f+\underline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f$$

f が $[a\ ,b-\varepsilon]$ で可積分であるから $\overline{\int_a^{b-\varepsilon}} f=\underline{\int_a^{b-\varepsilon}} f$ である。

$$\overline{\int_a^b} f-\overline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f=\underline{\int_a^b} f-\underline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f \ \rightarrow\ \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f-\underline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f$$

仮定により $[a\ ,b]$ で $|f(x)|\leqq M$ となる定数 $M>0$ が存在するから、

$$\overline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f\leqq M\varepsilon\ ,\quad -M\varepsilon\leqq\underline{\int_{b-\varepsilon}^{b}} f$$

であるから、$0\leqq\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\leqq 2M\varepsilon$

$g(t)cos\frac{1}{2}t$ は $[-\pi\ ,0]$ においても有界であったので、上とほぼ同様な理由から $[-\pi\ ,-\varepsilon]$ で可積分であり、$[-\pi\ ,0]$ で可積分であることがわかる。
ゆえに $g(t)cos\frac{1}{2}t$ は $[-\pi\ ,\ \pi]$ において可積分である。

最後に 19.1 節の定理1(リーマン・ルベーグの定理)によって

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)cos\frac{1}{2}t\right)sinNt\,dt=0$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(t)\sin\frac{1}{2}t\right)\cos Nt\,dt=0$$

となる。ゆえに $\lim_{N\to\infty} s_N(x)=f(x)$ である。

（注意）有界閉区間 I の長さが >0 ならば、I で可積分な関数 f は I 上有界である。（解析入門 I　杉浦光夫 著 P.211 問2）を使ったが、残念ながらこの本の中にはない。

（P.352　系1）

定理1では、$x\in[-\pi\ ,\ \pi]$ として、ある $\delta>0$ と 定数 $M>0$ が存在して、$|t|<\delta$ を満たすすべての t に対して $|f(x-t)-f(x)|\leqq M|t|$ が成り立つ必要があった。この場合の δ は定点 x に対して定まれば良かった。

I は開区間なので、任意の $x\in I$ に対してある δ が存在して $B(x\ ;\ \delta)\subset I$ とすることができる。つまり $|t|<\delta$ であるならば $x-t\in I$ とすることができる。よって $|f(x-t)-f(x)|=0$　つまり M は正であれば何でもよく、当然 $|t|<\delta$ なるすべての t で $|f(x-t)-f(x)|\leqq M|t|$ を満たすことになる。よって点 x において $\lim_{N\to\infty} s_N(x)=f(x)=0$ となる。

x は I の任意の点であるので、その都度 δ は変化するかもしれないが、定理の結論が言えることになる。

（P.354　定理2　特別な三角級数）

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \qquad (n=0\ ,\ \pm1\ ,\ \pm2\ ,\ \cdots\ ,\ \pm N)$$

だったので

$$\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}=\sum_{-N}^{N}c_n\{\cos nx+i\sin nx\}$$

$$=c_{-N}\{\cos Nx-i\sin Nx\}+\cdots+c_{-1}\{\cos x-i\sin x\}+c_0+c_1\{\cos x+i\sin x\}$$

$$+\cdots+c_N\{\cos Nx+i\sin Nx\}$$

$$=c_0+c_{-N}\cos Nx+c_N\cos Nx+\cdots+c_{-1}\cos x+c_1\cos x+c_1 i\sin x-c_{-1}i\sin x$$

$+\cdots+c_N i\sin Nx-c_{-N} i\sin Nx$

$=c_0+(c_{-N}+c_N)\cos Nx+\cdots+(c_{-1}+c_1)\cos x+i(c_1-c_{-1})\sin x+\cdots$

$+i(c_N-c_{-N})\sin Nx$

$=c_0+(c_{-1}+c_1)\cos x+\cdots+(c_{-N}+c_N)\cos Nx+i(c_1-c_{-1})\sin x+\cdots$

$+i(c_N-c_{-N})\sin Nx$

ここで $a_0=c_0$, $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$ とすれば

$=c_0+a_1\cos x+\cdots+a_N\cos Nx+b_1\sin x+\cdots+b_N\sin Nx$

$=c_0+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{N} b_n\sin nx$

$$a_n=c_n+c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{e^{-inx}+e^{inx}\}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{2\cos nx\}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,2,\cdots,N)$$

$$b_n=i(c_n-c_{-n})=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx-\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{e^{-inx}-e^{inx}\}dx=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{-2i\sin nx\}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,\cdots,N)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$\int fg'=fg-\int f'g$ なので $f=x$, $g'=\sin nx$ → $f'=1$, $g=-\frac{1}{n}\cos nx$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}[\sin nx]_0^{\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\times\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)$$

$$=\frac{2}{n}\times\cos n\pi=\frac{2}{n}\times(-1)^{n-1}$$

したがって G のフーリエ級数は $a_0=c_0=0$ だったので

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\times(-1)^{n-1}\times\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)$$

この級数は区間 $(-\pi,\pi)$ 上では $G(x)$ に収束する。なぜなら

$x\in(-\pi,\pi)$ ならば、開区間なのである $\delta>0$ が存在して $|t|<\delta$ ならば

$x-t\in(-\pi,\pi)$ から

$|G(x-t)-G(X)|=|x-t-x|=|t|\leqq 2|t|$

であるから、定理1から $G(x)$ に収束する。$x=\pm\pi$ においても $G(\pm\pi)$ に等しい

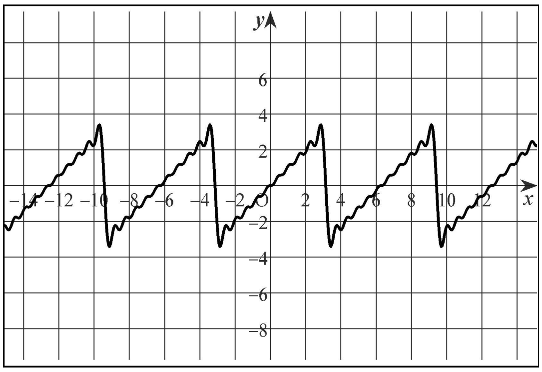
ゆえに、定理2の結論が言えることになる。

また、$(-\pi,\pi)$ に含まれる任意の閉区間で一様収束するので連続である。

右のグラフは

$$y=2\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

である。



（P.354 $g_a(x)$ について）

$$g_a(x)=G(x-a-\pi)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n(x-a-\pi)}{n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n(x-a)-n\pi)}{n}$$

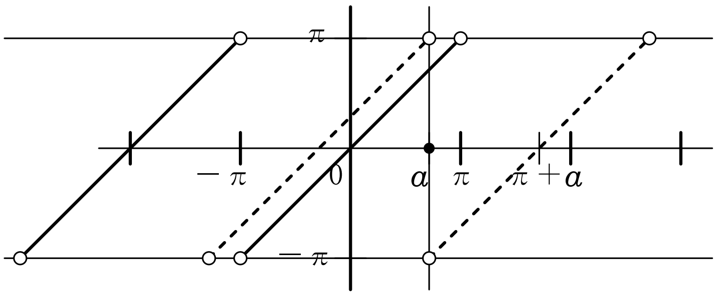
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\{\sin(n(x-a))\cos n\pi-\cos(n(x-a))\sin n\pi\}}{n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n(x-a))\cos n\pi}{n}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(x-a))}{n}$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cos na-\cos nx\sin na}{n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n}\cos nx-\frac{\cos na}{n}\sin nx\right)$$

グラフは $a+\pi$ 右にずれるので点線のグラフのフーリエ級数となる。($g_a(a)=0$ に注意)



（P.355　不連続性の解消について）

a を f の第一種不連続点とする。f の a における「跳び」を

$h=f(a+)-f(a-)$

とする。次に関数 F を次のように定義する。

$$F(x)=\begin{cases} f(x)+\dfrac{h}{2\pi}g_a(x) & (x\neq a \text{ のとき}) \\ \dfrac{f(a+)+f(a-)}{2} & (x=a \text{ のとき}) \end{cases}$$

$g_a(a+)=-\pi$, $g_a(a-)=\pi$ だから

$$F(a+)=f(a+)+\frac{h}{2\pi}g_a(a+)=f(a+)-\frac{f(a+)-f(a-)}{2}=\frac{f(a+)+f(a-)}{2}$$

$=F(a)$

$$F(a-)=f(a-)+\frac{h}{2\pi}g_a(a-)=f(a-)+\frac{f(a+)-f(a-)}{2}=\frac{f(a+)+f(a-)}{2}$$

$=F(a)$

となって、F は a で連続である。

（P.355　定理3）

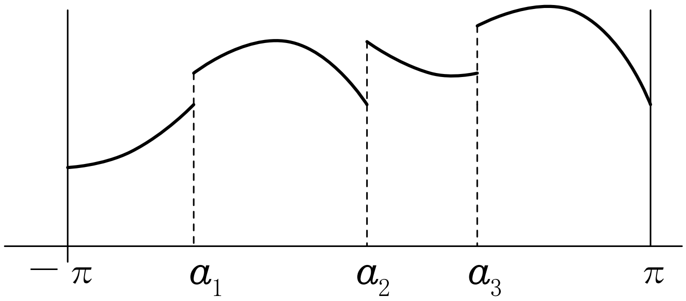
（証）一般性は失われないので

$p=3$ とする。

不連続点 a_1 , a_2 , a_3 における

f の「跳び」を

$h_i=f(a_i+)-f(a_i-)$ とする。



区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$ で関数 F を次のように定義する。

$$F(x)=\begin{cases} f(x)+\sum_{k=1}^{3}\dfrac{h_k}{2\pi}g_{a_k}(x) & (f\text{ の不連続点以外}) \\ \dfrac{f(a_i+)+f(a_i-)}{2}+\sum_{k=1}^{3}\dfrac{h_k}{2\pi}g_{a_k}(a_i) & (x=a_i\ f\text{ の不連続点}) \end{cases}$$

さらに周期性 2π を用いてこの定義を $\boldsymbol{R}$ 全体まで拡大する。

そのとき f および g_{a_k}（下巻 P.139 参照から）が区分的に滑らかであるから $\boldsymbol{F}$ も区分的に滑らかである。また区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$ で $\boldsymbol{F}$ は a_1 , a_2 , a_3 を除いて連続で、まず a_1 においは

$$\boldsymbol{F}(a_1+)=f(a_1+)+\frac{h_1}{2\pi}g_{a_1}(a_1+)+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1+)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1+)$$

$$=f(a_1+)+\frac{h_1}{2\pi}(-\pi)+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

$$=f(a_1+)-\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

$$=\frac{f(a_1+)+f(a_1-)}{2}+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

ここで $g_{a_1}(a_1)=0$ なので

$$=\frac{f(a_1+)+f(a_1-)}{2}+\frac{h_1}{2\pi}g_{a_1}(a_1)+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

$$=\frac{f(a_1+)+f(a_1-)}{2}+\sum_{k=1}^{3}\frac{h_k}{2\pi}g_{a_k}(a_1)=\boldsymbol{F}(a_1)$$

他の a_2 , a_3 についても同様である。

$$\boldsymbol{F}(a_1-)=f(a_1-)+\frac{h_1}{2\pi}g_{a_1}(a_1-)+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1-)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1-)$$

$$=f(a_1-)+\frac{h_1}{2\pi}(\pi)+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

$$=f(a_1-)+\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

$$=\frac{f(a_1+)+f(a_1-)}{2}+\frac{h_2}{2\pi}g_{a_2}(a_1)+\frac{h_3}{2\pi}g_{a_3}(a_1)$$

ここで $g_{a_1}(a_1)=0$ なので

$$= \frac{f(a_1+)+f(a_1-)}{2} + \frac{h_1}{2\pi} g_{a_1}(a_1) + \frac{h_2}{2\pi} g_{a_2}(a_1) + \frac{h_3}{2\pi} g_{a_3}(a_1)$$

$$= \frac{f(a_1+)+f(a_1-)}{2} + \sum_{k=1}^{3} \frac{h_k}{2\pi} g_{a_k}(a_1) = F(a_1)$$

他の a_2 , a_3 についても同様である。

よって F は a_1 , a_2 , a_3 で連続である。ゆえに F は $[-\pi\ ,\ \pi]$ で連続で周期 2π の、区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$ で区分的に滑らかな関数である。

したがって、19．1節の定理5により F はフーリエ級数に展開される。各 g_{a_k} もフーリエ級数に展開されるから $f(x)=F(x)-\sum_{k=1}^{p}\frac{h_k}{2\pi}g_{a_k}(x)$ から、f もフーリエ級数に展開される。

ただし、不連続点 a_i においては、

$$\lim_{N\to\infty} s_N(F\,;\,a_i) = F(a_i) = \frac{f(a_i+)+f(a_i-)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{h_k}{2\pi} g_{a_k}(a_i)$$

であるから、

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f\,;\,a_i) = \frac{f(a_i+)+f(a_i-)}{2}$$

である。

（P.357　補題2）

「f が $[a\ ,b]$ ($b-a \geqq 0$) で可積分ならば $[a\ ,b]$ で有界である。」という定理がほしかった。

● 区間 $[x_{i-1}\ ,x_i\ ]$ において $|\,f(x)-h(x)\,| \leqq M_i-m_i$ について

$f(x_{i-1}) \leqq f(x_i)$ とすれば $h(x)$ は $(x_{i-1}\ ,f(x_{i-1}))$ と $(x_i\ ,f(x_i))$ を結ぶ正の傾きの直線なので、 $\sup_{x_{i-1}\leqq x\leqq x_i} h(x)=f(x_i)$, $\inf_{x_{i-1}\leqq x\leqq x_i} h(x)=f(x_{i-1})$ である。

したがって $m_i \leqq f(x_{i-1}) \leqq h(x) \leqq f(x_i) \leqq M_i$ である。よって

$m_i \leqq f(x) \leqq M_i$

$m_i \leqq h(x) \leqq M_i$

● $a \leqq c \leqq b\,,\, a \leqq d \leqq b \;\to\; |c-d| \leqq b-a$

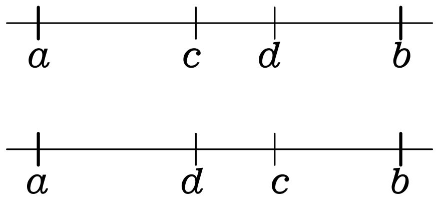
$c \leqq d$ の場合

$d-c \leqq d-a \leqq b-a$

$d \leqq c$ の場合

$c-d \leqq c-a \leqq b-a$

よって $|c-d| \leqq b-a$



よって $|f(x)-h(x)| \leqq M_i-m_i$ となる。

一般の場合は、適当な $K>0$ を f にかけて Kf について $M-m \leqq 1$ が成り立つようにする。また

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i < (K\varepsilon)^2$$

が成り立つような分割 P を選べば、区間 $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ において

$$|Kf(x)-Kh(x)| \leqq M_i-m_i$$

であり、同様に $\|Kf-Kh\| \leqq K\varepsilon$ を得る。

（注意）$f(a)=f(b)$ ならば、区間 $[a\,,\,x_1]$ において

$$h(x)=f(a)+\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}(x-a) \;\to\; h(a)=f(a)$$

区間 $[x_{n-1}\,,\,b]$ において

$$h(x)=f(x_{n-1})+\frac{f(b)-f(x_{n-1})}{b-x_{n-1}}(x-x_{n-1}) \;\to\; h(b)=f(b)$$

よって $h(a)=h(b)$ となる。

（P.359　定理4（パーセブァル））

$\|s_N(h)-s_N(f)\|=\|s_N(h-f)\|$ について

$$s_N(h-f)=\sum_{-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(t)-f(t))e^{-int}\,dt\right)e^{inx}$$

$$=\sum_{-N}^{N}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)e^{-int}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt\right\}e^{inx}$$

$$=\sum_{-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx}-\sum_{-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx}$$

$= s_N(h) - s_N(f)$

（P.360　例1）

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0 \quad \text{（奇関数）}$$

$\int f'g = fg - \int fg'$ から $f' = \sin nx$, $g = x \rightarrow f = -\frac{1}{n}\cos nx$, $g' = 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}[\sin nx]_{-\pi}^{\pi}\right\} = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \; , \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad (1 \leqq n \leqq N) \text{ であるから}$$

$$\sum_{-N}^{N} |c_n|^2 = a_0^2 + \sum_{n=-N}^{-1} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \{|c_{-n}|^2 + |c_n|^2\}$$

$$= |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left\{\frac{a_n^2 + b_n^2}{4} + \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}\right\} = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

よって パーセブァルの定理により

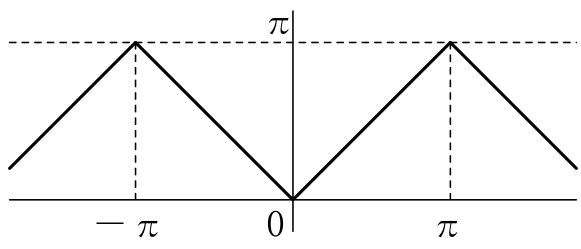
$$\|f\|^2 = \frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

（P.361　例2）

$f(x) = |x|$, 区間 $[-\pi \, , \, \pi]$

偶関数なので $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{\pi}{2}$$



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$\int f'g=fg-\int fg'$ から $f'=\cos nx$, $g=x$ → $f=\frac{1}{n}\sin nx$, $g'=1$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}[\cos nx]_0^{\pi}\right\}=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & (n\text{ が奇数})\\ 0 & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

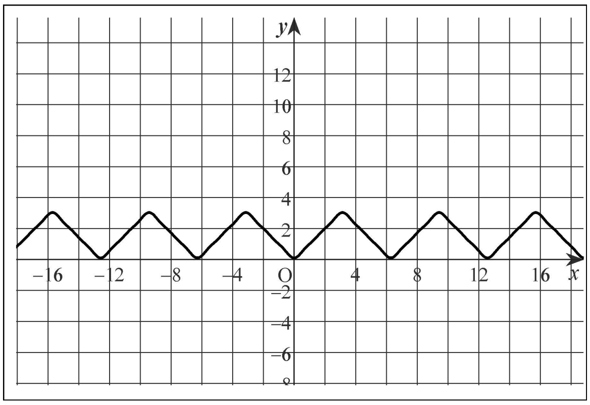
したがって、$[-\pi , \pi]$ で

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n^2\pi}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

右図は

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}\right)$$

のグラフである。



（P.362　例3）

$f(x)=x$, 区間 $[0 , 2\pi]$

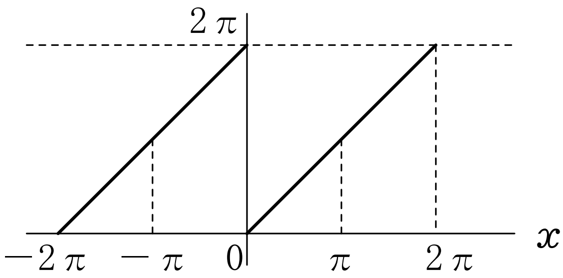
一次変換をすると

$0=-\pi c+d$

$\rightarrow d=\pi$, $c=1$

$2\pi=\pi c+d$

$x=y+\pi$, 区間 $[-\pi , \pi]$



$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(y+\pi)dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{2\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(y+\pi)\cos n(y+\pi)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx$$

例2から

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(y+\pi)\sin n(y+\pi)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx$$

例1から

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\frac{2}{n}$$

よって y の区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$ で

$$y+\pi = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin (y+x)n}{n}$$

すなわち x の区間 $[0\ ,\ 2\pi]$ で

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$$

区間 $(0\ ,\ \pi)$ での例1の展開式は

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$$

よって辺々を加えると

$$2x = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\cdots\right)$$

$$+2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 6x}{6} + \cdots\right)$$

$$= \pi - 2\sin x - \sin 2x - \frac{2\sin 3x}{3} - \frac{2\sin 4x}{4} - \frac{2\sin 5x}{5} - \cdots$$

$$+2\sin x - \sin 2x + \frac{2\sin 3x}{3} - \frac{2\sin 4x}{4} + \frac{2\sin 5x}{5} - \frac{2\sin 6x}{6} + \cdots$$

$$= \pi - 2\sin 2x - \frac{4\sin 4x}{4} - \frac{4\sin 6x}{6} - \frac{4\sin 8x}{8} - \cdots$$

よって

$$2x = \pi - 2\sin 2x - \frac{4\sin 4x}{4} - \frac{4\sin 6x}{6} - \frac{4\sin 8x}{8} - \cdots$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\frac{2\sin 4x}{4}+\frac{2\sin 6x}{6}+\frac{2\sin 8x}{8}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 8x}{8}+\cdots\right)$$

辺々を引けば

$$0=\pi-2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\cdots\right)$$

$$-2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}-\frac{\sin 6x}{6}+\cdots\right)$$

$$=\pi-2\sin x-\frac{2\sin 2x}{2}-\frac{2\sin 3x}{3}-\frac{2\sin 4x}{4}-\frac{2\sin 5x}{5}-\cdots$$

$$-2\sin x+\frac{2\sin 2x}{2}-\frac{2\sin 3x}{3}+\frac{2\sin 4x}{4}-\frac{2\sin 5x}{5}+\frac{2\sin 6x}{6}-\cdots$$

$$=\pi-4\sin x-\frac{4\sin 3x}{3}-\frac{4\sin 5x}{5}-\cdots$$

よって

$$0=\pi-4\sin x-\frac{4\sin 3x}{3}-\frac{4\sin 5x}{5}-\cdots$$

$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots$$

$x=\frac{\pi}{2}$ として代入してみると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{3}+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5}+\frac{\sin\left(\frac{7}{2}\pi\right)}{7}+\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi\right)}{9}+\frac{\sin\left(\frac{11}{2}\pi\right)}{11}+\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi\right)}{13}+\frac{\sin\left(\frac{15}{2}\pi\right)}{15}$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{17}{2}\pi\right)}{17}+\frac{\sin\left(\frac{19}{2}\pi\right)}{19}+\frac{\sin\left(\frac{21}{2}\pi\right)}{21}+\frac{\sin\left(\frac{23}{2}\pi\right)}{23}+\frac{\sin\left(\frac{25}{2}\pi\right)}{25}+\frac{\sin\left(\frac{27}{2}\pi\right)}{27}-\frac{\pi}{4}$$

$=-0.0178345089526516$

（P.362　例4）

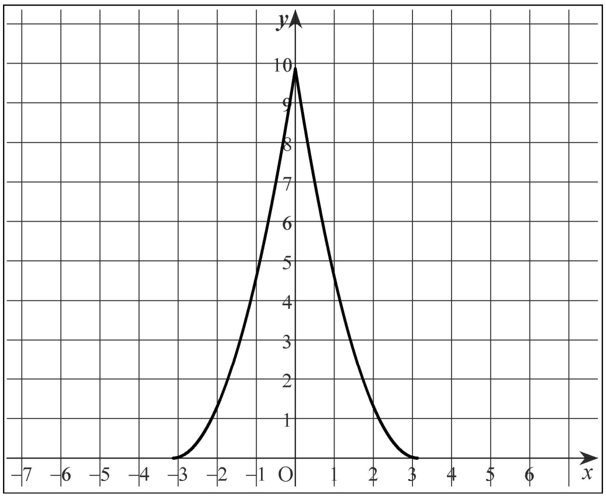
$f(x)=(\pi-|x|)^2$，区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$

この関数は偶関数だから $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-|x|)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-2\pi x+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi^3 - \pi^3 + \frac{\pi^3}{3}) = \frac{\pi^2}{3}$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos nx\, dx$$

$t = \pi - x$ とすれば

$$\frac{dt}{dx} = -1 \ \rightarrow\ dx = -dt$$

$$\cos(n\pi - nt) = \cos n\pi \cos nt + \sin n\pi \sin nt = (-1)^n \cos nt$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1)^n\int_{\pi}^{0} t^2 \cos nt\, dt = (-1)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt\, dt$$

$\int f' g = fg - \int fg'$ から $f' = \cos nt$, $g = t^2 \ \rightarrow\ f = \frac{1}{n}\sin nt$, $g' = 2t$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int t^2 \cos nt\, dt = \frac{t^2}{n}\sin nt - \frac{2}{n}\int t \sin nt\, dt \\ &= \frac{t^2}{n}\sin nt - \frac{2}{n}(-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt) \\ &= \frac{t^2}{n}\sin nt + \frac{2t}{n^2}\cos nt - \frac{2}{n^3}\sin nt \end{aligned}}$$

$$= (-1)^n \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{n}\sin nt + \frac{2t}{n^2}\cos nt - \frac{2}{n^3}\sin nt\right]_0^{\pi} = (-1)^n \frac{2}{\pi}\ (\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n)$$

$$= \frac{4}{n^2}$$

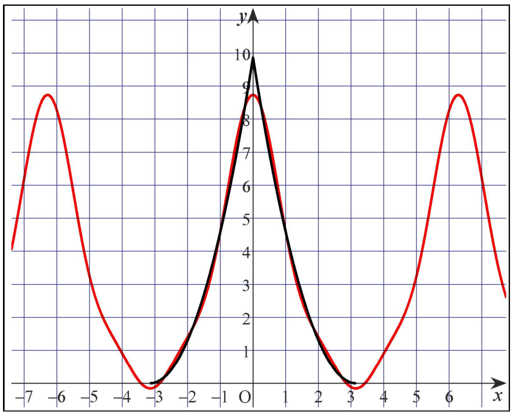
したがってフーリエ展開は

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4(\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots)$$

$$y=\frac{\pi^2}{3}+4\left(\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}\right)$$

が右図のグラフ(赤線)である。



また

$$\|f\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-|x|)^4dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^4dx$$

$t=\pi-x$ とおけば $\dfrac{dt}{dx}=-1\ \rightarrow\ dx=-dt$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}t^4dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^4dt=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^5}{5}=\frac{\pi^4}{5}$$

一方

$$a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=\frac{\pi^4}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

パーセブァルの定理から

$$\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{5}\ \rightarrow\ 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{5}-\frac{\pi^4}{9}=\frac{4\pi^4}{45}\ \rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

(P.363　例5)

$f(x)=e^{iax}$, 区間 $(-\pi\ ,\ \pi)$　　(ただし、a は整数ではない実数)

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iax}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(a-n)x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi i(a-n)}\left(e^{i(a-n)\pi}-e^{-i(a-n)\pi}\right)$$

ここで

$(-1)^{-n}=(-1)^n$
↓

$$e^{i(a-n)\pi}=e^{ia\pi-in\pi}=e^{ia\pi}\times(-1)^n\ ,\ e^{-i(a-n)\pi}=e^{-ia\pi+in\pi}=e^{-ia\pi}\times(-1)^n$$

$$=\frac{(-1)^n}{2\pi i(a-n)}\left(e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}\right)=\frac{(-1)^n}{2\pi i(a-n)}2i\sin a\pi$$ ← $e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}=2i\sin a\pi$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi(a-n)}\sin a\pi=\frac{\sin a\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{a-n}$$

したがって、区間$(-\pi, \pi)$で

$$e^{inx} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}e^{inx}$$

$x=\pi$, $x=-\pi$ のとき右辺は、$e^{in\pi}=(-1)^n=(-1)^{-n}=e^{-in\pi}$ だから

$$\frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a-n} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}\right\}$$

で、これは19．2節の定理3から

$$\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = \frac{e^{ia\pi}+e^{-ia\pi}}{2} = \cos a\pi$$

に収束する。これより

$$\cos\ a\pi = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}\right\}$$

両辺に $\dfrac{\pi}{\sin a\pi}$ を掛けて

$$\pi\cot a\pi = \frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}$$

を得る。