（P．1 アルキメデス性）

任意の実数 z に対して $m < z < n$ を満たす整数が存在する。
m については、$-z$ も実数なので $-z < L$ となる正の整数 L が存在する。
$-L < z$ なので $m = -L$ とすればよい。

（P．24 例 2）

$m^k = -(c_1 m^{k-1} n + \cdots + c_k n^k)$ なので m^k は p で割り切れる。

（P．34 例）

$$y = \frac{2x+2}{x+2} \ \rightarrow\ x-y = \frac{x^2+2x}{x+2} - \frac{2x+2}{x+2} = \frac{x^2-2}{x+2}$$

$$y^2-2 = \frac{4x^2+8x+4}{(x+2)^2} - \frac{2(x^2+4x+4)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2-4}{(x+2)^2} = \frac{2(x^2-2)}{(x+2)^2}$$

（P．35 アルキメデス性）

「$a-1$ は Z^+ の上界ではないから、$a-1 < n$ を満たす $n \in Z^+$ が存在する。」
このことは上界であることの否定だから、$a-1$ が上界ならば、すべての $n \in Z^+$ に対して $n \leqq a-1$ とならなければならない。その否定なので、$a-1 < n$ を満たす $n \in Z^+$ が存在することになる。あとは、Z は加法において閉じているので矛盾する。（本当は Z が R の中のどんな集合であるかを定義付ける必要がある。）

（P．36 実数体の構成）

有理数が順序体であることを認めたうえでの実数体の構成であって、数直線上の点に対応する数として議論を進めるわけではない。したがって、数直線を使って有理数の順序を定義したことも忘れてもよい。つまり、定理が証明できれば、そのような順序体を実数体 R と名付け、$\sqrt{2}$ を数として認めることができるようになるわけである。

（P．37 切断の定義）

この定義は Q の部分集合 α についてのみ書かれていて、α' は Q に対する α の補集合としている。したがって、$\alpha \cup \alpha' = Q$，$\alpha \cap \alpha' = \varnothing$ は当然である。

（P．38 α' に最小元 r があるならば）

最小元 r があるならば r は有理数なので $\alpha = r^*$ とすればよい。

（P. 38 $\boldsymbol{R}$ の順序の定義 命題 1）

普通のアルファベットは有理数としている。

$\boldsymbol{Q}$ の切断全体の集合を $\boldsymbol{R}$ とする。$\boldsymbol{R}$ の元はギリシャ文字で表していて $\boldsymbol{Q}$ の部分集合である。有理数 r による切断は r^* として $r^* \in \boldsymbol{R}$ であり $r \notin r^*$ である。

$\boldsymbol{O}1$ の証明から、$\alpha < \beta$ でなく $\alpha = \beta$ でない $\Rightarrow$ $\alpha > \beta$ なのだから
対偶をとると

$\alpha > \beta$ ではない。 $\Rightarrow$ $\alpha < \beta$ であるか $\alpha = \beta$ である。しかし、$\alpha < \beta$ かつ $\alpha = \beta$ はありえないので $\Rightarrow$ $\alpha < \beta$ であるか $\alpha = \beta$ のどちらかである。

同様に
$\beta > \alpha$ ではない。 $\Rightarrow$ $\alpha > \beta$ であるか $\alpha = \beta$ である。しかし、$\alpha > \beta$ かつ $\alpha = \beta$ はありえないので $\Rightarrow$ $\alpha > \beta$ であるか $\alpha = \beta$ のどちらかである。

定義から
$\alpha = \beta$ ではない。$\Rightarrow$ $\alpha > \beta$ であるか $\alpha < \beta$ のどちらかである。なぜなら
$\alpha = \beta$ ではなく、$\alpha > \beta$ でなければ $\alpha < \beta$ であり、$\alpha = \beta$ ではなく、$\alpha < \beta$ でなければ $\alpha > \beta$ だからである。

（P. 38 命題 2）

$r \notin r^*$ で $r \in s^*$ から $r^* \neq s^*$ だといっている。

このことは逆もいえる。$r^* < s^*$ ならば $r < s$ である。なぜなら、もし、$r < s$ でなければ $r = s$ か $r > s$ である。これらは $r^* < s^*$ に反する。

（P. 39 命題 3）

「$\boldsymbol{A}$ のいずれかの元 α に含まれるような有理数すべての集合を β とする。」とは $\boldsymbol{A}$ の元は $\boldsymbol{Q}$ の部分集合なので、それらに含まれる有理数すべての合併集合が β である。したがって $\alpha \subset \beta$ である。

また、$\boldsymbol{A}$ の元は空でない有理数の部分集合であるから β は空集合ではない。
$\beta \subset \gamma$ で γ は切断なので $r \neq \boldsymbol{Q}$ であるから $\beta \neq \boldsymbol{Q}$ である。

（P. 40 補題 3）

有理数を整数から構成することにおいて、$\dfrac{z_0 - x_0}{v} > 0$ の有理数なので $\dfrac{n}{m} > 0$ としてよい。このとき $n > \dfrac{n}{m}$ である。なぜなら、自然数の順序から $mn > n$ なので

有理数の順序の定義から $\dfrac{mn}{m} > \dfrac{n}{m}$ となるからである。（数学の基礎 齋藤正彦 P.50 参照）よって、次のような自然数が存在する。このことはアルキメデス性とは関係ない。

$$n > \frac{z_0 - x_0}{v} \ \rightarrow \ nv > z_0 - x_0 \ \rightarrow \ x_0 + nv > z_0$$

（P.40 補題 4）

$$n > \frac{z_0 - x_0}{hx_0} \ , \ t^n \geqq 1 + nh \ \rightarrow \ x_0 t^n \geqq x_0 + x_0 nh > x_0 + z_0 - x_0 = z_0$$

（P. 40 加法の定義）

r^* , $s^* \in R$ に対し、$x \in r^*$, $y \in s^*$ なる x , y の和 $x+y$ 全部の集合を $r^* + s^*$ としている。

（P. 41 $A5$の証明）

α が r^* の形でないときには、α' は最小元をもたない。なぜなら、最小元があったなら、ある有理数 r があって $\alpha = r^*$ となるからである。（P.38 6行目）

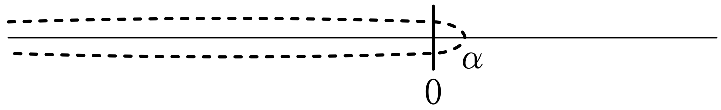
（P. 42 $-r^* = (-r)^*$）

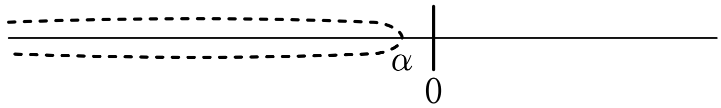
命題 4 から $r^* + (-r)^* = 0^*$ よって $-r^* = (-r)^*$ となる。
ここで、$x < r$ だから $-r^*$ は r より小さい有理数の（-1）倍と考えてはいけない。
$x < r$ に対し $x + y < 0$ となるような y の集合なので $y < -r$ であり、$y = (-r)^*$ である。

（P. 42 正・負の定義）

$\alpha > 0^*$ ならば $0^* \subset \alpha$ で $0^* \neq \alpha$ である。もし $0 \notin \alpha$ ならば $0 \in \alpha'$ なので、任意の $x \in \alpha$ に対し $x < 0$ となり $x \in 0^*$ となるから $\alpha \subset 0^*$ となる。このことは「$0^* \subset \alpha$ であって $0^* \neq \alpha$」に矛盾する。
また、$0 \in \alpha$ から $0 < x$, $x \in \alpha$ が存在するので、正の有理数を含むことになる。逆は明らかである。
$\alpha < 0^*$ ならば $\alpha \subset 0^*$ で $0^* \neq \alpha$ である。したがって 0^* の元で α に含まれないものがある。よって、そのような元は負の有理数である。
逆に 0^* の元で α に含まれない負の有理数 r が一つでもあれば $r \in \alpha'$ なの

で、任意の $x \in \alpha$ は $x < r$ となる。つまり、$\alpha < r^* < 0^*$ となる。
あまり図はよくないが(数直線を使えないからである。)

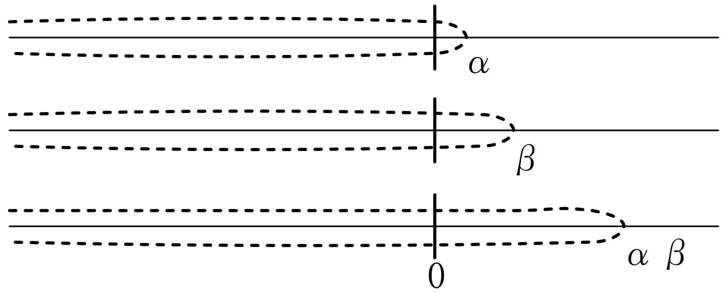
$\alpha > 0^*$ $\rightarrow$ 

$-\alpha < 0^*$ $\rightarrow$ 

(P. 43 正の元に対する積の定義)

$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^+$ のとき、$x \in \alpha$, $y \in \beta$ なる x, y の積 xy 全体の集合と 0 以下のすべての有理数の集合との和集合を $\alpha\beta$ と定義する。

つまり、正の有理数部分だけで積を定義していることになる。
$\alpha\beta$ を切断にするためである。



命題 7 は r , s が正の有理数ならば次の命題 8 が成り立つことを示している。
r^* と s^* の間の積が r と s との間の積に一致しているからである。

(P. 44 乗法の定義)

$\alpha > 0^*$, $\beta < 0^*$ のとき $\alpha\beta = -\alpha(-\beta)$ と定義しているが、左辺と右辺の積は違う。$\boldsymbol{R}$ における積を $\otimes$ とし、$\boldsymbol{R}^+$ における積を省略すれば $\alpha \otimes \beta = -(\alpha(-\beta))$ である。

$-(\alpha(-\beta))$ は $\alpha > 0^*$ であり $-\beta > 0^*$ なので $\alpha(-\beta)$ は切断であって $\alpha(-\beta) \in \boldsymbol{R}^+$ したがって、$-(\alpha(-\beta))$ は $\alpha(-\beta)$ に加えると 0^* になる $\boldsymbol{R}$ の切断である。
このように考えれば他の定義も $\boldsymbol{R}$ の切断として定義されていることがわかる。

(P. 45 命題 9)

$r < 0$, $s < 0$ ならば $r^* < 0$, $s^* < 0$ であるから

$$r^*s^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{定義}}}{=} (-r^*)(-s^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P. 42 16行目}}}{=} (-r)^*(-s)^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{命題7}}}{=} ((-r)(-s))^* = (rs)^*$$

（P. 45 命題 10）

$\boldsymbol{M}2\quad \alpha\beta=\beta\alpha$

$\alpha>0^{*}$, $\beta<0^{*}$ ならば $\alpha\otimes\beta=-\alpha(-\beta)=-(-\beta)\alpha$

最後の式は $\beta<0^{*}$, $\alpha>0^{*}$ の場合の積なので

$=\beta\otimes\alpha$

$\alpha<0^{*}$, $\beta>0^{*}\rightarrow\quad \alpha\otimes\beta=-(-\alpha)\beta=-\beta(-\alpha)$

最後の式は $\beta>0^{*}$, $\alpha<0^{*}$ の場合の積なので

$=\beta\otimes\alpha$

$\alpha<0^{*}$, $\beta<0^{*}\rightarrow\quad \alpha\otimes\beta=(-\alpha)(-\beta)=(-\beta)(-\alpha)=\beta\otimes\alpha$

$\boldsymbol{M}3\quad(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)$

$(+++)$ $\boldsymbol{OK}$

$(++-)$

$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=-([\alpha\beta](-\gamma))=-(\alpha[\beta(-\gamma)])$

$\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)=\alpha\otimes[-(\beta(-\gamma)]=-(\alpha(-[-(\beta(-\gamma))]))=-(\alpha[\beta(-\gamma)])$

$(+-+)$

$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=[-(\alpha(-\beta))]\otimes\gamma=-[-(-(\alpha(-\beta)))]\gamma)=-([\alpha(-\beta)]\gamma)$

$=-(\alpha[(-\beta)\gamma])$

$\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)=\alpha\otimes[-(-\beta)\gamma]=-(\alpha[-(-(-\beta)\gamma)])=-(\alpha[(-\beta)\gamma])$

$(+--)$

$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=[-(\alpha(-\beta))]\otimes\gamma=[-[-(\alpha(-\beta))]][-\gamma]=[\alpha(-\beta)][-\gamma]$

$=\alpha[(-\beta)(-\gamma)]=\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)$

$(-++)$

$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=[-(-\alpha)\beta]\otimes\gamma=-(-(-(-\alpha)\beta))\gamma)=-((-\alpha)\beta\gamma)$

$\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)=\alpha\otimes(\beta\gamma)=-((-\alpha)\beta\gamma)$

$(-+-)$

$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=[-(-\alpha)\beta]\otimes\gamma=[-(-(-\alpha)\beta)][-\gamma]=[(-\alpha)\beta][-\gamma]$

$=(-\alpha)[\beta(-\gamma)]$

$(--+)$

$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \{(-\alpha)(-\beta)\} \otimes \gamma = (-\alpha)\{(-\beta)\gamma\}$

$\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = \alpha \otimes \{-(-\beta)\gamma\} = (-\alpha)(-(-(-\beta)\gamma)) = (-\alpha)((-\beta)\gamma)$

$(---)$

$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \{(-\alpha)(-\beta)\} \otimes \gamma = -(\{(-\alpha)(-\beta)\}(-\gamma)) = -(-\alpha)\{(-\beta)(-\gamma)\}$

$\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = \alpha \otimes \{(-\beta)(-\gamma)\} = -((-\alpha)\{(-\beta)(-\gamma)\}) = -(-\alpha)\{(-\beta)(-\gamma)\}$

$\boldsymbol{M}\,4$ $\alpha 1^* = \alpha$

$\alpha 1^* = -((-\alpha)1^*) = -(-\alpha) = \alpha$

$\boldsymbol{M}\,5$ $\alpha < 0^*$ ならば $-\alpha > 0^*$ である。よって $(-\alpha)x = 1^*$, $x > 0^*$ となる x が存在する。$\beta = -x$ とすれば $\beta < 0^*$ なので

$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) = (-\alpha)(-(-x)) = (-\alpha)x = 1^*$

以後簡単になるので乗法の定義からわかることをまとめておく。

$\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ とおく。

$(-\alpha)\beta = -(-(-\alpha)\beta) = -\alpha\beta$

$\alpha(-\beta) = -\alpha(-(-\beta)) = -\alpha\beta$

よって $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta$ … ①

$(-\alpha)(-\beta) = (-(-\alpha))(-(-\beta)) = \alpha\beta$ … ②

$-\alpha-\beta = 0^* - \alpha - \beta = (\alpha+\beta) - (\alpha+\beta) - \alpha - \beta$

$= \alpha - \alpha + \beta - \beta - (\alpha+\beta) = -(\alpha+\beta)$ … ③

(P. 46 命題 11)

$\alpha(\beta+\gamma)$ は切断であるので、これに含まれる正の有理数 m に対して $m < ab$, $a \in \alpha$, $b \in (\beta+\gamma)$ となる正の有理数 a , b が存在する。よって、補題 2 から $a > x > 0$, $b > n > 0$, $m = xn$ となる $x \in \alpha$, $n \in \alpha+\beta$ が存在する。また 補題 4 から $n = y+z$ となる $y \in \beta$, $z \in \gamma$ なる正の有理数が存在するので $m = x(y+z)$, $x \in \alpha$, $y \in \beta$, $z \in \gamma$ となる正の有理数 x , y , z が存在する。

$\alpha\beta + \alpha\gamma$ も切断であるので、同様にこれに含まれる正の有理数は x' , $x'' \in \alpha$, $y \in \beta$, $z \in \gamma$ を正の有理数として $x'y + x''z$ と表すことができる。

$x(y+z) = xy + xz$ なので $\alpha(\beta+\gamma) \subset \alpha\beta + \alpha\gamma$ である。

$\delta < 0^*$ の場合は、$-\gamma = \beta + (-\delta)$ で $-\gamma > 0^*$, $\beta > 0^*$, $-\delta > 0^*$ なので

$\alpha(-\gamma) = \alpha(\beta + (-\delta)) = \alpha\beta - \alpha\delta$

したがって $\alpha\delta = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$\alpha < 0^*$, $\beta > 0^*$, $\gamma > 0^*$ の場合は

$\alpha(\beta + \gamma) = -(-\alpha)(\beta + \gamma) = -(-\alpha\beta - \alpha\gamma)$

ここで、③から

$\alpha(\beta + \gamma) = -(-(\alpha\beta + \alpha\gamma)) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

以上で一つだけ負の場合は成り立つことがわかった。

● 二つが 0^* の場合は明らかになり立つ。

● 二つが負の場合は

$\alpha > 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma < 0^*$

$\beta + \gamma < 0^*$ なので

$\alpha(\beta + \gamma) = -(\alpha(-(\beta + \gamma))) = -(\alpha(-\beta - \gamma))$

$= (-\alpha)(-\beta) + (-\alpha)(-\gamma)$

$= \alpha\beta + \alpha\gamma$

● $\alpha < 0^*$, $\beta > 0^*$, $\gamma < 0^*$　($\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma > 0^*$ についても同じ)

$\beta + \gamma = \delta$ とする。

$\delta > 0^*$ のときは $\beta = \delta + (-\gamma)$ で、$\alpha < 0^*$, $\delta > 0^*$, $-\gamma > 0^*$

一つだけ負の場合は成り立つので

$\alpha\beta = \alpha(\delta + (-\gamma)) = \alpha\delta - \alpha\gamma$ したがって $\alpha\delta = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$\delta < 0^*$ のときは $-\gamma = \beta + (-\delta)$ で、$\beta > 0^*$, $-\delta > 0^*$, $-\gamma > 0^*$

一つだけ負の場合は成り立つので

$\alpha(-\gamma) = \alpha(\beta + (-\delta)) = \alpha(\beta - \delta) = \alpha\beta - \alpha\delta$

$\alpha\delta = \alpha\beta + \alpha\gamma$

● すべて 0^* の場合は明らかに成り立つ。

● すべて負の場合は

$\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma < 0^*$

$\beta + \gamma < 0^*$ だから

$\alpha(\beta + \gamma) = -\{(-\alpha)\otimes(\beta + \gamma)\} = -\{-((-\alpha)(-(\beta + \gamma)))\}$

$= -\{-((-\alpha)(-\beta - \gamma))\} = -(-(\alpha\beta + \alpha\gamma)) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

● r , s , t が有理数の場合は当然成り立つ。

$r^*(s^*+t^*)=(r(s+t))^*=(rs)^*+(rt)^*=r^*s^*+r^*t^*$

（P. 47 結語）

$\sqrt{2}$ などの無理数ならば $x^2<2$ となる有理数の集合を α とすれば $\alpha\cap\alpha'=\varnothing$ ということは $\sqrt{2}$ が有理数ではないことからわかるが、π とか e などの超越数については疑問である。

（P. 49 $\boldsymbol{M}$ 2）

$\alpha=(a,b)$, $\beta=(c,d)$

$\alpha\beta=(ac-bd,ad+bc)$

$\beta\alpha=(ca-db,da+cb)$

よって $\alpha\beta=\beta\alpha$

（P. 53 $|\alpha\beta|^2$）

$|\alpha\beta|^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

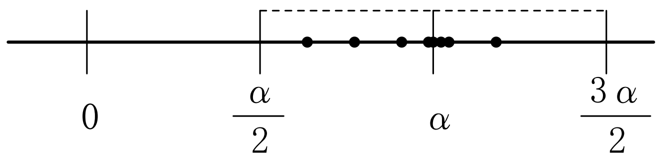
$=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$

$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

（P. 65 $a_n>\dfrac{\alpha}{2}$）

$|a_n-\alpha|<\dfrac{\alpha}{2}$ から $a_n<\alpha$ だとしたら $-a_n+\alpha<\dfrac{\alpha}{2}\rightarrow -a_n<-\dfrac{\alpha}{2}$

よって、$a_n>\dfrac{\alpha}{2}$ となる。$a_n>\alpha$ ならば $a_n<\dfrac{3\alpha}{2}$ となる。



（P. 70 例1）

$$a_{n+1}^2-2=\left(\frac{2a_n+2}{a_n+2}\right)^2-2=\frac{4a_n^2+8a_n+4}{(a_n+2)^2}-\frac{2a_n^2+8a_n+8}{(a_n+2)^2}=\frac{2(a_n^2-2)}{(a_n+2)^2}<0$$

$$a_n-a_{n+1}=\frac{a_n^2+2a_n}{a_n+2}-\frac{2a_n+2}{a_n+2}=\frac{a_n^2-2}{a_n+2}<0$$

（P. 71 例2）

$b_{n+1}-b_n$ と $b_{n-1}-b_n$ は同符号なので

$b_{n-1}<b_n$ ならば $b_{n+1}<b_n$

また $|b_{n+1}-b_n|<|b_{n-1}-b_n|$ から $b_{n-1}<b_{n+1}<b_n$ となる。

$b_n<b_{n-1}$ ならば $b_n<b_{n+1}$

よって、$b_n<b_{n+1}<b_{n-1}$

まとめると

● $b_{n-1}<b_n$ ならば $b_{n-1}<b_{n+1}<b_n$

● $b_n<b_{n-1}$ ならば $b_n<b_{n+1}<b_{n-1}$

これと $b_1<b_2 \to b_1<b_3<b_2 \to b_1<b_3<b_4<b_2 \to b_1<b_3<b_5<b_4<b_2$

$$\beta=1+\frac{1}{\alpha}\ ,\ \alpha=1+\frac{1}{\beta} \to \alpha=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} \to \alpha=1+\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\alpha(1+\alpha)=1+\alpha+\alpha \to \alpha^2-\alpha-1=0 \to \alpha=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\alpha>0$ なので $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\alpha=\beta$ は明らかだが

$$\beta=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{1-5}=\frac{3-2\sqrt{5}-5}{-4}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

（P. 72 部分列）

（任意の $k\in N$ に対し $k\leqq n_k$ の証明）

$k=0$ のとき n_0 は自然数なので 0 以上である。よって $k\leqq n_0$

k のとき成り立つと仮定して帰納法で証明する。

$k\leqq n_k$ から $k+1\leqq n_k+1$

また $n_k<n_{k+1}$ から $n_{k+1}-n_k\geqq 1$ であるので $n_k+1\leqq n_{k+1}$

よって、$k+1\leqq n_{k+1}$ となる。

（P. 75 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の否定）

「任意の実数 M に対し、ある N が存在して $n \geqq N$ なるすべての自然数 n に対して $a_n < M$ となる。」の否定なので

「ある実数 L があって、どんな N をとっても $n \geqq N$ で $a_n \geqq L$ となるものが存在する。」となる。

このことから、$N = 0$ としてとき $a_n \geqq L$ となるものが一つは存在するのでその中の一番小さいものを n_0 とする。次に $N = n_0+1$ とすれば $a_n \geqq L$ となるものが一つは存在するのでその中の一番小さいものを n_1 とすれば $n_1 > n_0$ であって、$a_{n_1} \geqq L$ となる。このように選んでいけば $a_n \geqq L$ となる自然数 n は無限個あることになる。

「B の任意の元は A の下界、A の任意の元は B の上界である。」については

$x \in B$ に対し、x が A の下界でないとしたならば x より小さい A の元が存在するはずである。その元を y とすれば $y < x$ である。しかし、$x \leqq a_n$ となる自然数 n は無限に存在するはずなので $y \in A$ に矛盾する。

$x \in A$ に対し、x が B の上界でないとしたならば x より大きい B の元が存在するはずである。その元を y とすれば $x < y$ である。しかし、$y \leqq a_n$ となる自然数 n は無限に存在するはずなので $x \in A$ に矛盾する。

「$\alpha = sup\ \mathrm{B}$ でもある。」について

$sup\, B = \beta$ として、$\alpha = \beta$ を証明する。

A の任意の元は B の上界なので、B の任意の元 x は $x \leqq \alpha$ である。(なぜなら $x > \alpha$ となる x が存在したとしたならば α は A の下限なので A の元で $y < x$ となる y が存在する。したがって、$y \leqq a_n$ となる n は有限個しかないことになる。このことは x が B の元であることに矛盾する。)よって、$\beta \leqq \alpha$ である。

次に $\beta \neq \alpha$ とする。つまり $\beta < \alpha$ である。したがって、$\beta < \ell < \alpha$ となる ℓ が存在するはずである。このとき ℓ は B の上限より大きいので B の上界となる。したがって、$\ell \leqq a_n$ となる n は有限個しかない。もし無限個あったならば β が B の上限であることに反する。よって、$\ell \in A$ である。またこのことは α が A の下限で

あることにも反する。以上により、$\beta = \alpha$ となる。

「$\varepsilon > \varepsilon' > 0$」について
定理 3 では「≦」ではなく「<」なので、そうするための工夫である。

(P. 77 後半の証明をより正確に)

「k を十分大きくとれば、$n_k \geqq N$ かつ $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。」まではよいが、よって $n \geqq N$ ならばからが問題である。そこで次のように修正する。

コーシー列だから
$m, n \geqq n_0$ ならば $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
また、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ だから
$k \geqq k_0$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$
$m_0 = Max\{n_0, k_0\}$ と置くとき、$k \geqq m_0$ ならば(P. 72 部分列)のところの証明から $k < n_k$ だから、$m_0 \leqq k$ ならば $m_0 \leqq k < n_k$ から $n_k > k_0$, $n_k > n_0$, $k \geqq n_0$
よって $|\alpha - a_k| \leqq |\alpha - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_k| < \varepsilon$ となる。

(P. 80 定理 1)

$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \cdots$
$t_0 = s_2,\ t_1 = s_4,\ t_2 = s_7, \cdots$ ← (s_n) の部分列になっている。

(P. 85 例 2)

$$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$
$$= 1 + {}_{n+1}C_1 \frac{1}{n+1} + {}_{n+1}C_2 \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + {}_{n+1}C_r \frac{1}{(n+1)^r} + \cdots + {}_{n+1}C_{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
そこで
$${}_{n+1}C_r \frac{1}{(n+1)^r} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{(n+1)^r}$$
$$= \frac{1}{r!} \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n+2-r)}{(n+1)^r}$$

$$= \frac{1}{r!} \times 1 \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n+1} \times \cdots \times \frac{n+1-r}{n+1} \times \frac{n+2-r}{n+1}$$

$$= \frac{1}{r!} \times (1-\frac{1}{n+1}) \times (1-\frac{2}{n+1}) \times (1-\frac{3}{n+1}) \times \cdots \times (1-\frac{r}{n+1}) \times (1-\frac{r-1}{n+1})$$

（P. 86 例 3）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}$$
$$+\frac{1}{18}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$$
$$+\frac{1}{32}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

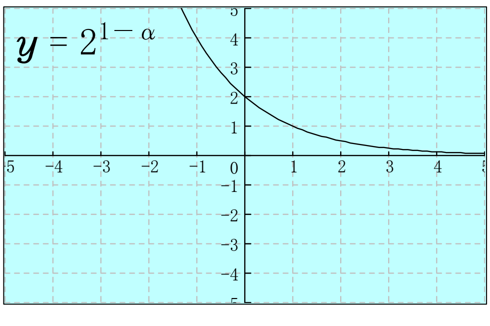
（P. 86 補題）

$$a_1+(a_2+a_2)+(a_4+a_4+a_4+a_4)+(a_8+a_8+a_8+a_8+a_8+a_8+a_8+a_8)+(a_{16}+a_{16}+a_{16}$$
$$+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16}+a_{16})+(a_{32}+a_{32}+a_{32}$$
$$+\cdots$$
$$=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+16a_{16}+\cdots$$

（P. 87 定理 7）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots$$

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \rightarrow \quad a_{2^k} = \frac{1}{(2^k)^{\alpha}}$$



（P. 88 定理 9）

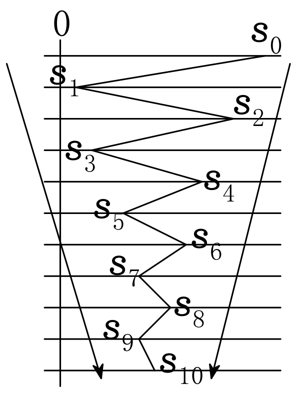
$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq 0$ ，$a_n \rightarrow 0$ とする。

$s_1 \leqq s_0$

$s_1 \leqq s_3 \leqq s_2 \leqq s_0$

右図のように

$s_1 \leqq s_3 \leqq \cdots \leqq s_{2n+1} \leqq \cdots \leqq s_{2n} \leqq \cdots \leqq s_2 \leqq s_0$



（P.89　x^+, x^-）

$x^+ = Max\{x, 0\}$

$$\begin{cases} x < 0 \text{ ならば } x^+ = 0 \\ x = 0 \text{ ならば } x^+ = 0 \\ x > 0 \text{ ならば } x^+ = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqq 0 \text{ ならば } x^+ = 0 \\ x > 0 \text{ ならば } x^+ = x \end{cases} \Rightarrow 0 \leqq x^+ \leqq |x|$$

$x^- = -Min\{x, 0\}$

$$\begin{cases} x < 0 \text{ ならば } x^- = x \\ x = 0 \text{ ならば } x^- = 0 \\ x > 0 \text{ ならば } x^- = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqq 0 \text{ ならば } x^- = 0 \\ x < 0 \text{ ならば } x^- = -x \end{cases} \Rightarrow 0 \leqq x^- \leqq |x|$$

$$\begin{cases} x < 0 \text{ のとき } x^+ - x^- = 0-(-x) = x \\ x = 0 \text{ のとき } x^+ - x^- = 0-0 = x \\ x > 0 \text{ のとき } x^+ - x^- = x-0 = x \end{cases} \Rightarrow x = x^+ - x^-$$

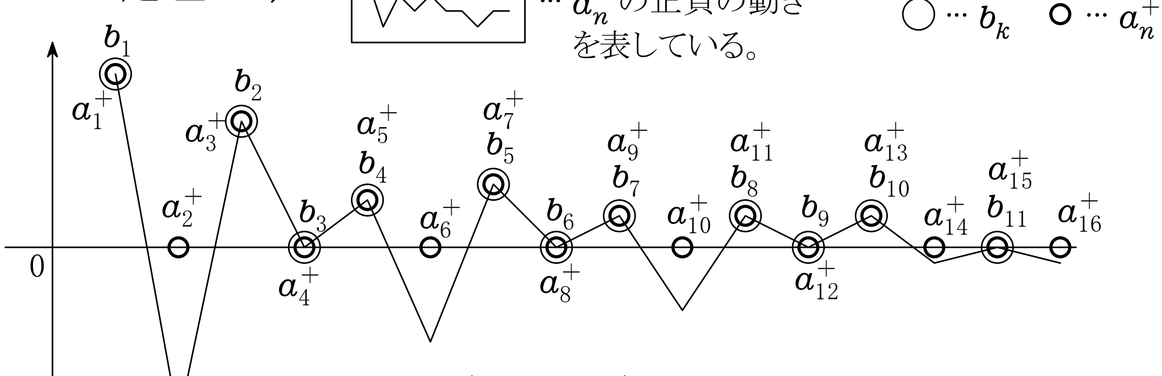
$$\begin{cases} x < 0 \text{ のとき } x^+ + x^- = 0+(-x) = -x \\ x = 0 \text{ のとき } x^+ + x^- = 0+0 = x \\ x > 0 \text{ のとき } x^+ + x^- = x+0 = x \end{cases} \Rightarrow |x| = x^+ - x^-$$

$$x^+ = \frac{|x|+x}{2}, \quad x^- = \frac{|x|-x}{2}$$

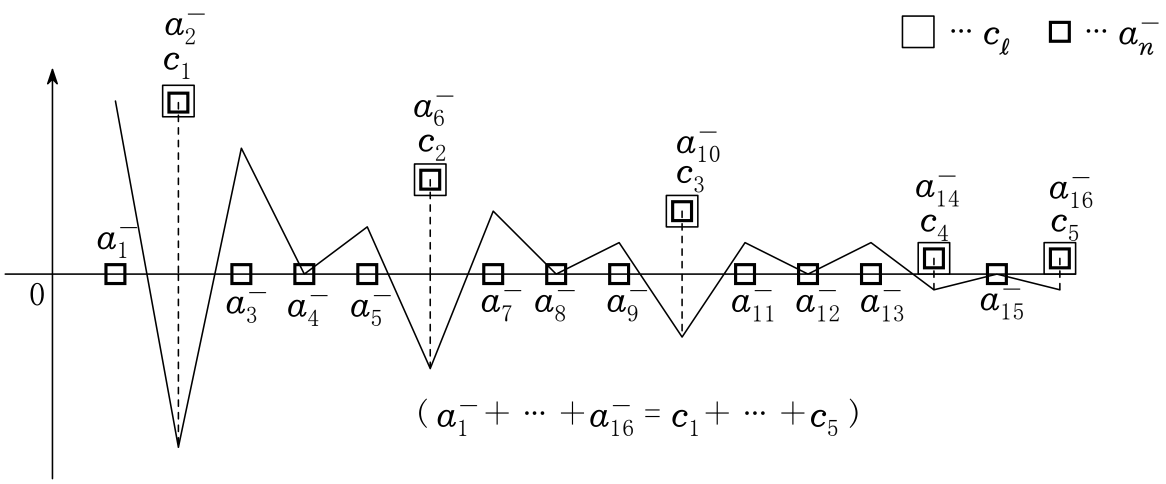
（P. 90　$\sum a_n$ が条件収束する場合）

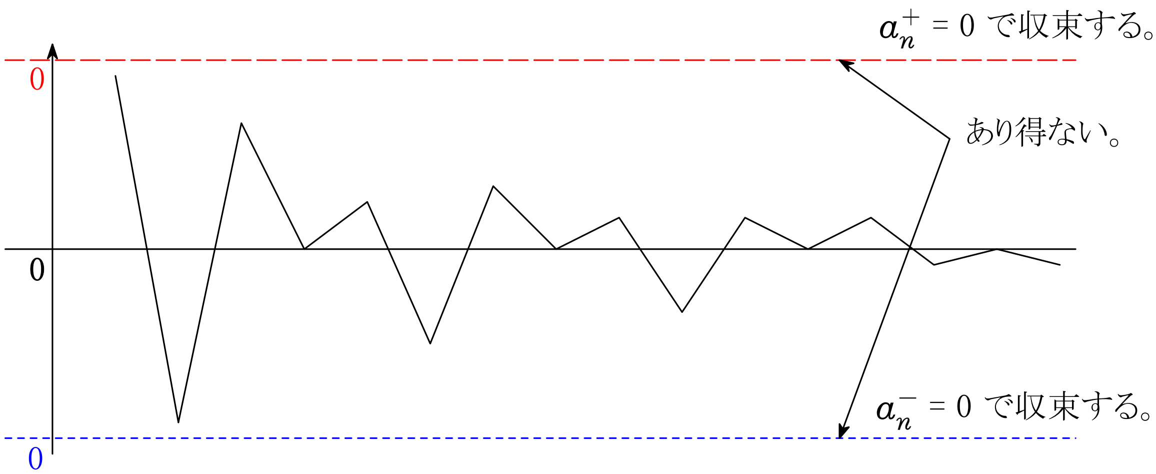
$\sum a_n$ が条件収束するとは、$\sum a_n$ 自身は収束するが、$\sum |a_n|$ は発散することであったので、$\sum a_n^+$ が収束してはいけない。また同様に $|a_n| = 2a_n^- + a_n$ から $\sum a_n^-$ も発散しなければならない。

（P. 91　定理 11）



（$a_1^+ + \cdots + a_{16}^+ = b_1 + \cdots + b_{11}$）





$\sum a_n$ が条件収束することから、正項級数ではあり得ないし、すべての項が負の級数でもあり得ない。

実数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ をそれぞれ $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ で、かつ $\alpha_n < \beta_n$, $\beta_1 >0$ であるように選ぶ方法とは、例えば

$\alpha \leqq \beta$ なので $\alpha_n = \alpha - \dfrac{1}{n}$, $\beta_n = \beta + \dfrac{|\beta|+1-\alpha}{n}$ とおけば

$\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ であり、$\alpha \leqq \beta \leqq |\beta| < |\beta|+1$ なので

$$\beta_n - \alpha_n = \beta + \frac{|\beta|+1-\alpha}{n} - \left(\alpha - \frac{1}{n}\right) = \beta - \alpha + \frac{|\beta|+2-\alpha}{n} > 0$$

$$\beta_1 = \beta + |\beta| + 1 - \alpha > 0$$

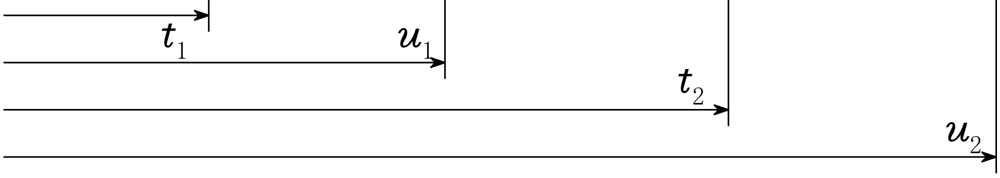
$\beta_1 > 0$ としておく理由は特にないが $b_k \geqq 0$ だから、簡単にするためである。

$a_n \geqq 0 \to b_k$, $a_n < 0 \to c_\ell$ ということなので、任意の a_n は 0 も含めて b_k もしくは $-c_\ell$ として表されているので、級数

$b_1 + \cdots + b_{k_1} - c_1 - \cdots - c_{\ell_1} + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} - c_{\ell_1+1} - \cdots - c_{\ell_2} + \cdots$

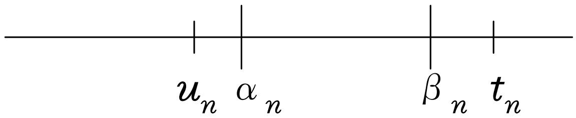
は $\sum a_n$ の1つの配列がえ級数である。また

$b_1 + \cdots + b_{k_1} \mid - c_1 - \cdots - c_{\ell_1} \mid + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} \mid - c_{\ell_1+1} - \cdots - c_{\ell_2} \mid + \cdots$

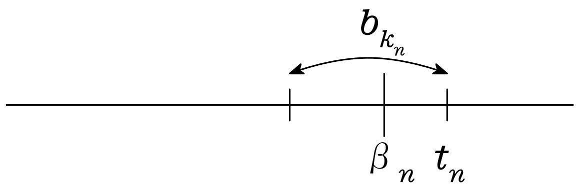


であるから、(t_n) , (u_n) は $(s_n{}')$ の部分列である。

$\alpha_n < \beta_n$ としておけば右図のような位置関係に常にあるので



$0 < t_n - \beta_n$, $0 < u_n - \alpha_n$ が保証される。

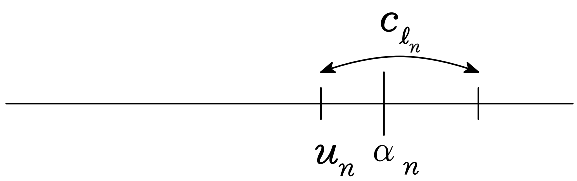


$t_n - b_{k_n} \leqq \beta_n$

$t_n - \beta_n \leqq b_{k_n}$

よって　$0 < t_n - \beta_n \leqq b_{k_n}$

$|t_n - \beta| = |t_n - \beta_n + \beta_n - \beta| \leqq |t_n - \beta_n| + |\beta_n - \beta| \leqq b_{k_n} + |\beta_n - \beta|$



$\alpha_n \leqq u_n - (-c_{\ell_n})$

$\alpha_n - u_n \leqq c_{\ell_n}$

よって　$0 < u_n - \alpha_n \leqq c_{\ell_n}$

$|u_n - \alpha| = |u_n - \alpha_n + \alpha_n - \alpha| \leqq |u_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| \leqq c_{\ell_n} + |\alpha_n - \alpha|$

「任意の $s_n{}'$ に対して $s_n{}' \leqq t_m$ となる t_m がある。」について

$\cdots + b_{k_{m-2}+1} + \cdots + b_{k_{m-1}} \mid - c_{\ell_{m-2}+1} - \mid \cdots - c_{\ell_{m-1}} \mid + b_{k_{m-1}+1} + \mid \cdots + b_{k_m} - c_{\ell_{m-1}+1} - \cdots$

ア　　イ　　ウ　　エ

$s_n{}'$ が ア , イ , ウ までなら t_{m-1}、エまでなら t_m を選べばよい。

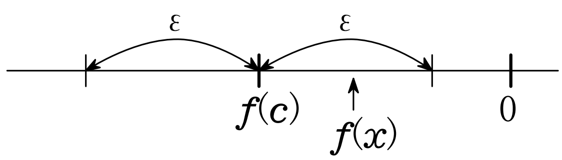
逆に「任意の $s_n{}'$ に対して $s_n{}' \geqq u_m$ となる u_m がある。」について

$s_n{}'$ が ア , イ , ウ , エ までなら u_{m-1} を選べばよい。

最後に、$\alpha = \beta$ とすれば任意の実数に収束させることができることになる。

（P. 110　定理 1）

「f の連続性から、$c+\delta < b$ なる $\delta > 0$ を十分に小さくとるとき 区間［c , $c+\delta$］において $f(x) < 0$ 」について



右図を見れば明らかだが

δを小さくとれば

$|f(x)-f(c)| < \varepsilon < 0-f(c)$ とすることができる。

$f(x) > f(c)$ ならば

$f(x)-f(c) < -f(c) \rightarrow f(x) < 0$

$f(x) < f(c)$ ならば $f(x) < f(c) < 0$

よって、$f(x) < 0$ とできる。

（P. 113　例）

x を正の実数として、k , n , m , p , $q \in Z^+$（ n , $p > 0$ ）とする。

① $(a^{\frac{1}{k}})^k = a$

（証） $(a^{\frac{1}{k}})^k = b$ とすれば $a^{\frac{1}{k}} = b^{\frac{1}{k}} \rightarrow a = b$ よって $(a^{\frac{1}{k}})^k = a$

② $x^{\frac{km}{n}} = (x^{\frac{m}{n}})^k$

（証） $x^{\frac{km}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^{km} = (x^{\frac{1}{n}})^{mk} = ((x^{\frac{1}{n}})^m)^k = (x^{\frac{m}{n}})^k$

③ $x^{\frac{1}{kn}} = (x^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{n}}$

（証） $x^{\frac{1}{kn}} = a$ とすれば $x = a^{kn} \rightarrow x = (a^k)^n \rightarrow x^{\frac{1}{n}} = a^k \rightarrow (x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}} = a$

よって $x^{\frac{1}{kn}} = (x^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{n}}$　（ また $= (x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}}$ ）

④ $x^{\frac{km}{kn}} = x^{\frac{m}{n}}$　（ $m = 1 \rightarrow x^{\frac{k}{kn}} = x^{\frac{1}{n}}$ ）

（証） $x^{\frac{km}{kn}} = (x^{\frac{1}{kn}})^{km} = ((x^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{n}})^{km} = ((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}})^{km} = (((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}})^k)^m = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}}$

⑤ $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$

（証）$x^{\frac{mn}{n}} = x^{\frac{nm}{n}} = ((x^{\frac{1}{n}})^n)^m = x^m$

③から $x^{\frac{mn}{n}} = (x^{\frac{m}{n}})^n$

よって $(x^{\frac{m}{n}})^n = x^m \rightarrow x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$

㋐ $x^r x^s = x^{r+s}$

($r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{q}{p}$ とする。)

$x^r x^s = x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{q}{p}} = (x^{\frac{1}{n}})^m (x^{\frac{1}{p}})^q = (x^{\frac{p}{np}})^m (x^{\frac{n}{np}})^q = (x^{\frac{1}{np}})^{pm} (x^{\frac{1}{np}})^{nq}$

$= (x^{\frac{1}{np}})^{pm+nq} = x^{\frac{pm+nq}{np}} = x^{(\frac{m}{n}+\frac{q}{p})} = x^{r+s}$

㋑ $(x^r)^s = x^{rs}$

($r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{q}{p}$ とする。)

$x^{rs} = x^{\frac{mq}{np}} = (x^{\frac{1}{np}})^{mq} = ((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}})^{mq} = (((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}})^m)^q = (((x^{\frac{1}{n}})^m)^{\frac{1}{p}})^q = ((x^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{p}})^q$

$= (x^{\frac{m}{n}})^{\frac{q}{p}} = (x^r)^s$

（P. 114　定理3）

$I = [a, b]$ としたとき $J = f(I)$ なので $sup\ J = M$ としたとき

$M < +\infty$ ならば M は上限ので $M - \dfrac{1}{n} < f(x)$ となる x が存在する。その x を a_n とおけばよい。そうすれば

$M - \dfrac{1}{n} < f(a_n) \leqq M$ から

$M - f(a_n) \geqq 0$, $M - f(a_n) < \dfrac{1}{n} \rightarrow 0 \leqq |M - f(a_n)| < \dfrac{1}{n}$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ となるように n_0 をとれば $n > n_0$ となるすべての

n に対して

$$0 \leqq |M - f(a_n)| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

となり、$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = M$ であることがわかる。

「この数列 (a_n) は $[a, b]$ の中に収束する部分列 (a_{n_k}) をもつが、」については P. 75 の定理 5 (c) から導くことができるが、正確にはボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理という。

その極限を c とすれば、$c \in I$ であり f は I で連続であるから、定理 4 から

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(c)$$

である。よって f は I で定義されているので $f(c) \in R$ であって、ある値であるから $f(c) < +\infty$ である。

（定義　一様連続）（微分積分学　I　藤原松三郎　著）

$f(x)$ が区間 I 連続ならば、I の一点 a をとれば、$\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を定めて

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad , \quad (|x - a| < \delta)$$

とすることができる。この δ は ε によって定まるのみではなく、また a にも関係している。a が動けば、同一の ε に対しても δ が変わるかもしれない。故に I 内のあらゆる a に対して δ を作れば、その集合の下限はあるいは 0 となるかもしれない。もしそうでなくて、この下限が $\delta_0 > 0$ ならば、I 内のすべての a に対して

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad , \quad (|x - a| < \delta_0)$$

となり、δ_0 はただ ε にのみ関係して、x，a の値には無関係となる。このような場合に $f(x)$ は区間 I で一様連続であるという。

（P. 115 例）

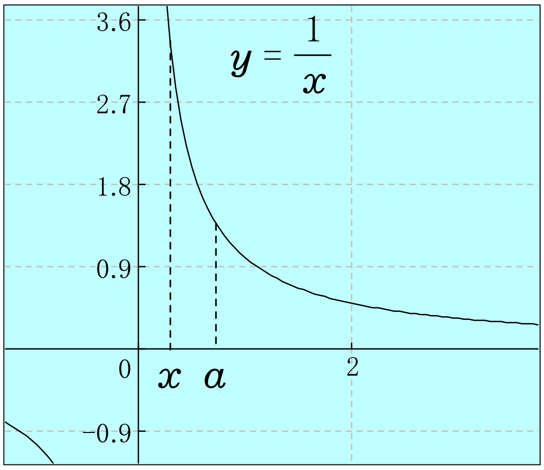
わかりにくい例である。$0 < a < 1$ に対し $\frac{1}{x}$ は $I_a = [a, 1]$ で一様連続である。

$0 < a \leqq x \leqq y \leqq 1$ ならば

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leqq \frac{|x-y|}{a^2}$$

だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = a^2\varepsilon$ とすれば x , y にかかわらず

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \leqq \frac{|x-y|}{a^2} < \frac{a^2\varepsilon}{a^2} = \varepsilon$$



とすることができる。

この場合、$\delta = a^2\varepsilon$ なので a と ε によって決まるが、$0 < a$ なので $\delta = 0$ となることはない。

しかし、$0 < x < a$ とすれば

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| = \frac{|a-x|}{ax} > \frac{|a-x|}{a^2}$$

だから、$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ となるためには

$\varepsilon > \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| > \frac{|a-x|}{a^2}$ から $a^2\varepsilon > |a-x|$ でなければならない。

$\delta = a^2\varepsilon$ とすれば、この場合は $a \to +0$ のとき $\delta \to 0$ となり、δ の下限が 0 となってしまうので一様連続ではない。

（Ｐ．116 定理 ４）

「(u_n) からまず収束する１つの部分列をとり、それに対応する番号の項からなる (v_n) の部分列からさらに収束する部分列をとり出せばよい。」

これもボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理の定理であるが、まず (u_n) から収束する部分列 $(u_{n(k)})$ をとり出す。そして、(v_n) から同じ番号を当てはめた部分列 $(v_{n(k)})$ をとり出す。この $(v_{n(k)})$ も収束する部分列をもつ。それを $(v_{m(n(k))})$ とすれば $(u_{m(n(k))})$ は $(u_{n(k)})$ の部分列なので $(u_{n(k)})$ の収束する値と同じ値に収束する。たとえば

n	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
$n(k)$	:	1	2		4	5		7	8		10	11		13	14	$\cdots$
$m(n(k))$	:	1			4			7			10			13		$\cdots$

のようにとり出せばよい。

（微分と導関数）　（微分積分学　笠原晧司 著　参照）

１変数の関数 $f(x)$ が開区間 $I=(a\,,\,b)$ 上で与えられているとき、I の１点 x_0 において f のグラフに接線を引くことを考える。点$(x_0, f(x_0))$を通る直線だから、それは

$$\ell(x) = f(x_0) + \alpha\,(x - x_0) \qquad (1)$$

の形の関数である。

この形の関数が $y=f(x)$ の接線になるということは、誤差

$g(x) = f(x) - \ell(x)$ が（1）の形の他のどんな $\ell'(x)$ よりも小さい、すなわち

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)-\ell'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-\ell(x)}{f(x)-\ell'(x)} = 0$$

をみたすことである。いま

$$\ell'(x) = f(x_0) + \beta\,(x - x_0)$$

とすると

$$\frac{g(x)}{f(x)-\ell'(x)} = \frac{g(x)}{\ell(x)+g(x)-\ell'(x)} = \frac{g(x)}{(\alpha-\beta)(x-x_0)+g(x)}$$

ここで $g(x)=0$ ならば $f(x)=\ell(x)$ ということで問題ない。

$g(x) \neq 0$ なら、

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)\dfrac{(x-x_0)}{g(x)}+1} \to 0$$

が成立しなければならない。これは、（$\alpha \neq \beta$ に注意すると）

$\left|\dfrac{x-x_0}{g(x)}\right| \to +\infty \ (x \to x_0)$　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} = 0$

を意味する。これが接線の定義である。

（定義）

$f(x)$ が x_0 で微分可能とは、

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + g(x) \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} = 0 \end{cases} \quad \cdots \ (2)$$

となるような α が存在することである。

いずれ多変数の関数の微分を考えることになるので従来の

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = c$$

では h がベクトルとなるため定義できない。そこで（2）による定義が主流となる。$x-x_0 = h$ として $f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h = g(x_0+h)$ とおくと

$\displaystyle\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{g(x_0+h)}{h} = 0$ だから $g(x_0+h) = o(h)$ $(h\to 0)$ として

$f(x+h)-f(x) = \alpha h + o(h)$ $(h\to 0)$

となる α が存在することを微分可能であることの定義にしているわけだが上の内容から、点 $(x_0, f(x_0))$ における接線が存在するということを同時に約束することになる。

（P．127　定理　4）

$g(b+k) = g(b)+h = a+h \to h = g(b+k)-g(b)$

g は強い意味で単調な関数なので　$k \neq 0$ ならば $h \neq 0$ である。

（P．132　ロルの定理、平均値の定理）

どちらも開区間（a，b）の中に $f'(c) = 0$ となる c が存在する。

つまり、$a < c < b$ である。

（Ｐ．135 定理 ４）

「I の内部で ･･･ ならば、f は区間 I で ･･･ である。」に注意！

（Ｐ．137 例 ３）

$$f'(x) = \frac{x^3}{4} + 2(x-3) = \frac{1}{4}(x^3+8x-24)$$

$f'(2) = \frac{1}{4}(8+16-24) = 0$ から $x^3+8x-24$ は $x-2$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +\,2x & +\,12 & \\
\hline
x-2 & x^3 & & +\,8x & -\,24 \\
 & x^3 & -\,2x^2 & & \\
\hline
 & & 2x^2 & +\,8x & -\,24 \\
 & & 2x^2 & -\,4x & \\
\hline
 & & & 12x & -24 \\
 & & & 12x & -24 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x^2+2x+12) = \frac{1}{4}(x-2)\{(x+1)^2+11\}$$

（Ｐ．141 不等式 ②）

p , q , r , $s \in R$ で $\frac{p}{q} \leqq \frac{r}{s}$, $q > 0$, $s > 0$ ならば

$$\frac{p}{q} \leqq \frac{p+r}{q+s} \leqq \frac{r}{s}$$

となる。

（証）$\frac{p}{q} \leqq \frac{r}{s}$ から両辺を qs（$qs>0$）倍して $ps \leqq qr$ を得る。

左の不等式から証明する。両辺を $q(q+s)$ 倍して

$p(q+s) \leqq q(p+r)$ を示せばよい。$pq+qr-pq-ps = qr-ps \geqq 0$

右の不等式は、両辺を $s(q+s)$ 倍して

$s(p+r) \leqq r(q+s)$ を示せばよい。$qr+rs-ps-rs = qr-ps \geqq 0$

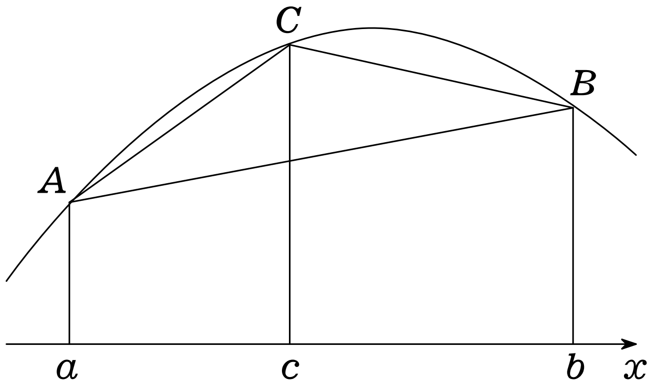
END

よって

$p = f(c)-f(a)$, $q = c-a > 0$, $r = f(b)-f(c)$, $s = b-c$ を代入すれば ② を得る。

（上に凸の場合）

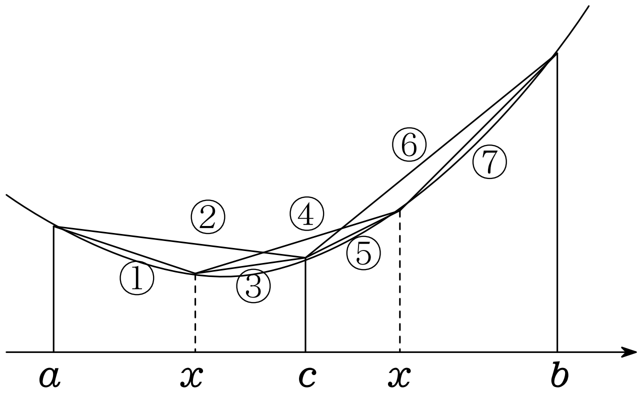
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geqq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$



（P．142 定理　１）

凸関数ならば傾きの大きさは右図のような順になる。したがって

$$A \leqq \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq B$$

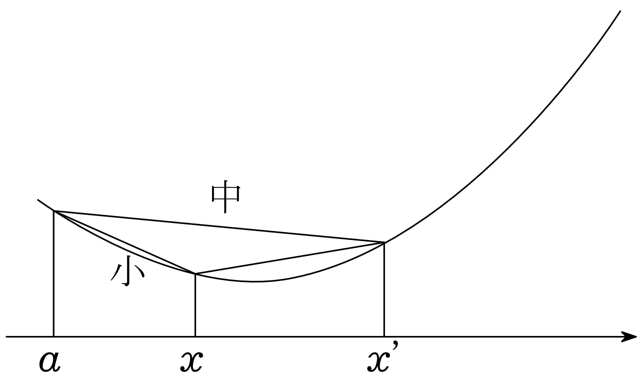


（P．143 定理　２）

「$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は、x を減少させつつ右から a に近づければ、減少しながら $f'(a)$ に近づき、･･･」

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq \frac{f(x')-f(a)}{x'-a}$$

から、$x < x'$ なら右辺の方が大きいので x が右から a に近づくと減少していく。



（P．142 凸関数の定義の別形式）

$\dfrac{c-a}{b-a} = t$ とおくと $a < c < b$ なので $0 < t < 1$ である。

$c-a = t(b-a)$

$c = a+t(b-a) \rightarrow b-c = b-a-t(b-a) = (1-t)(b-a)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

の分母に代入して

$$\frac{f(c)-f(a)}{t(b-a)} \leqq \frac{f(b)-f(c)}{(1-t)(b-a)}$$

$$(1-t)(f(c)-f(a)) \leqq t(f(b)-f(c))$$

$$f(c)-f(a)-tf(c)+tf(a) \leqq tf(b)-tf(c)$$

$$f(c) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

$$c = a+t(b-a) \rightarrow c = (1-t)a+tb$$

と書けるので

$$f((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b) \cdots ②$$

（$a > b$ の場合）

$\dfrac{c-b}{a-b} = t$ とおくと $b < c < a$ なので $0 < t < 1$ である。

$$c-b = t(a-b)$$

$$c = b+t(a-b) \rightarrow a-c = a-b-t(a-b) = (1-t)(a-b)$$

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leqq \frac{f(a)-f(c)}{a-c}$$

の分母に代入して

$$\frac{f(c)-f(b)}{t(a-b)} \leqq \frac{f(a)-f(c)}{(1-t)(a-b)}$$

$$(1-t)(f(c)-f(b)) \leqq t(f(a)-f(c))$$

$$f(c)-f(b)-tf(c)+tf(b) \leqq tf(a)-tf(c)$$

$$f(c) \leqq (1-t)f(b)+tf(a)$$

$$c = b+t(a-b) \rightarrow c = (1-t)b+ta$$

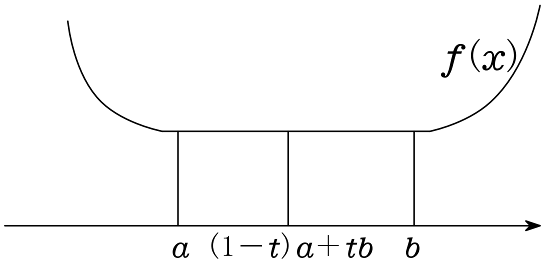
$$f((1-t)b+ta) \leqq (1-t)f(b)+tf(a)$$

つまり、$1-t = s$ とすれば

$$f((1-s)a+sb) \leqq (1-s)f(a)+sf(b) \qquad (0 \leqq s \leqq 1)$$

ようするに、a ，b の大小にかかわらず、$0 \leqq s \leqq 1$ という条件が課せられていれば問題ない。

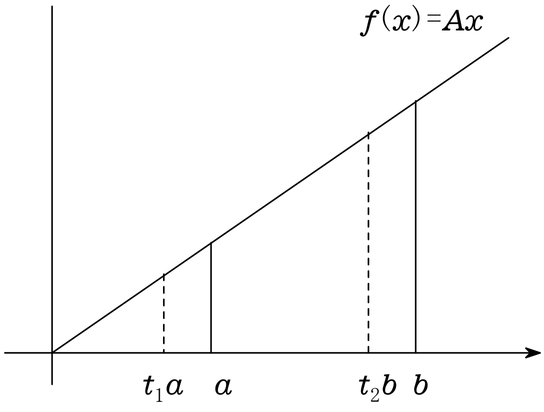
（Ｐ．147 凸関数と狭義の凸関数の違い）



凸関数とは、任意の a ，$b \in I$ および $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす任意の t に対して

$f((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$

が成り立つことである。右図のような関数は両辺が等しくなるので凸関数である。また、$f(x)$ が原点を通る直線の場合も = になる。



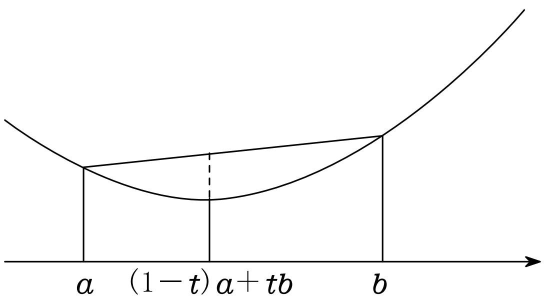
$f((1-t)a+tb) = A((1-t)a+tb)$

$= (1-t)Aa+tAb$

$= (1-t)f(a)+tf(b)$

また、$a = b$ の場合にも、また $t = 0$ や $t = 1$ の場合にも成り立つ。よって凸関数の定義は上のようになっている。

狭義の凸関数とは、$a \neq b$ である任意の a ，$b \in I$ と $0 < t < 1$ を満たす任意の t に対して



$f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b)$

が成立つことである。右図のように点線部の隙間が必要である。したがって、$a = b$ とすることはできない。また、$t = 0$ や $t = 1$ も含めることは両辺が = になってしまうのでできない。したがって、$0 < t < 1$ とするならば、$a = b$ のときのみ等号が成り立することになる。

凸関数の場合でも $0 < t < 1$ としてある書もある。

これからは狭義凸関数に話題を絞ることにする。

（補題　1）

$a_1, a_2, \cdots, a_n \in I$，$1 > t_i > 0$（$1 < i < n$），$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ をみたす実数に対して $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i \in I$ が成り立つ。

（証明）まず $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はすべて異なるという前提にする。なぜなら仮に $a_1 = a_2$ だとしたならば $t_1 a_1 + t_2 a_2 = (t_1 + t_2) a_1$ なので

$0 < t_1 + t_2 < 1$（$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ だから）とすれば $n-1$ になるだけだからである。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の中で最小のものを a_h，最大のものを a_k とすれば

$a_h = (t_1 + \cdots + t_n) a_h < t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n < (t_1 + \cdots + t_n) a_k = a_k$

a_h，$a_k \in I$ より $t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n \in I$ が成り立つ。

（Jensen（イエンゼン）の不等式　狭義凸の場合）

関数 f が区間 I において狭義凸関数ならば、I に属する任意の数

$a_1, \cdots, a_n$ と、$0 < t_i < 1$（$1 < i < n$），$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ を満たす任意の数

$t_1, \cdots, t_n$ に対して、

$a_1, \cdots, a_n$ の中で一つでも他と異なるものがあれば

$f(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n) < t_1 f(a_1) + \cdots + t_n f(a_n)$

$a_1 = \cdots = a_n$ のときのみ

$f(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n) = t_1 f(a_1) + \cdots + t_n f(a_n)$

となる。

（証明）

n に関する帰納法で証明する。$n = 1$ の場合は明らかである。$n = 2$ の場合は上に述べた通りである。$a_1 \neq a_2$ で $0 < t_i < 1$（$i = 1, 2$），$\sum_{i=1}^{2} t_i = 1$ のとき $f(t_1 a_1 + t_2 a_2) < t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2)$

$a_1 = a_2$ のときのみ $f(t_1a_1+t_2a_2) = t_1f(a_1)+t_2f(a_2)$ となる。

$n \geqq 3$ とし、$n-1$ の場合には定理の不等式が成り立つと仮定する。

n の場合

$$t_1a_1+\cdots+t_na_n = (1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}a_1+\cdots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}a_{n-1}\right)+t_na_n$$

であるから、$s_i = \dfrac{t_i}{1-t_n}$ $(1 < i < n-1)$ とおけば $\sum_{i=1}^{n-1} s_i = 1$ であるから

$0 < s_i < 1$ $(1 < i < n-1)$ である。

● $s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1} = a_n$ ならば

$f(t_1a_1+\cdots+t_na_n) = (1-t_n)f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1})+t_nf(a_n)$ … ①

帰納法の仮定によって

$a_1, \cdots, a_{n-1}$ がすべて等しければ

$f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1}) = s_1f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1})$ なので ①から

$f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1})$

$= (1-t_n)(s_1f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1}))+t_nf(a_n) = t_1f(a_1)+\cdots+t_nf(a_n)$

つまり、$a_1 = \cdots = a_{n-1} = s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1} = a_n$ となり、このときだけ等号が成り立つ。

$a_1, \cdots, a_{n-1}$ の中かで一つでも他と異なるものがあれば

$f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1}) < s_1f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1})$ なので ①から

$f(t_1a_1+\cdots+t_na_n) = (1-t_n)f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1})+t_nf(a_n)$

$< (1-t_n)(s_1f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1}))+t_nf(a_n) = t_1f(a_1)+\cdots+t_nf(a_n)$

● $s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1} \neq a_n$ ならば

$f(t_1a_1+\cdots+t_na_n) < (1-t_n)f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1})+t_nf(a_n)$ … ②

$a_1, \cdots, a_{n-1}$ がすべて等しければ

$f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1}) = s_1f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1})$ なので ②から

$f(t_1a_1+\cdots+t_na_n) < (1-t_n)f(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1})+t_nf(a_n)$

$= (1-t_n)(s_1f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1}))+t_nf(a_n) = t_1f(a_1)+\cdots+t_nf(a_n)$

a_1 ,… ， a_{n-1} の中かで一つでも他と異なるものがあれば

$f(s_1 a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1}) < s_1 f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1})$ なので ②から

$f(t_1 a_1+\cdots+t_n a_n) < (1-t_n)f(s_1 a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1})+t_n f(a_n)$

$< (1-t_n)(s_1 f(a_1)+\cdots+s_{n-1}f(a_{n-1}))+t_n f(a_n) = t_1 f(a_1)+\cdots+t_n f(a_n)$

（P．151 多項式の零点）

$$f(x) = f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$f(x)$ を $(x-a)^k$ で割ったときの余りは

$$f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$$

である。割り切れるなら、任意の x に対して $= 0$ となるはずなので

$f(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$

である。逆にこれを満たせば $f(x)$ は $(x-a)^k$ で割り切ることができる。

このことは言い換えれば

$f(x)$ を $(x-a)^k$ で割り切れる最大の次数を k とするとき

$f(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ ， $f^{(k)}(a) \neq 0$

となる。$f^{(k)}(a) = 0$ ならば $f(x)$ は $(x-a)^{k+1}$ で割り切れることになり最大であることに反する。

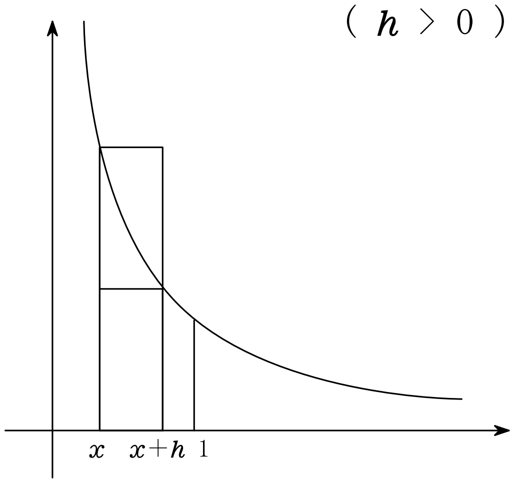
（P．152 例）

ロルの定理から $F'(x)$ が (a, b) 間に少なくとも１つの解をもつが、それは単解である。なぜなら a ， b それぞれが $n-1$ 重解であるから、$2n-1$ 個の解のうち $2n-2$ 個の解が a ， b なので残りは単解でなければならない。つまり、$F'(a) = F'(c_1) = F'(b) = 0$ となる単解 c_1 が存在する。

同様にして、$F''(x)$ は a , b をそれぞれ $n-2$ 重解としてもち（a , c_1）区間に解 c_2、（c_1 , b）区間に解 c_2' をすくなくとも１個以上もつ。$F''(x)$ は $2n-2$ 個の解をもち、$2n-2-2(n-2) = 2$ であるから c_2 , c_2' は単解となる。まとめると $a < c_2 < c_1 < c_2' < b$ で $F''(a) = F''(c_2) = F''(c_2') = F''(b) = 0$ となる単解 c_2 , c_2' が存在することがわかった。次は（a , c_2）,（c_2 , c_2'）,（c_2' , b）３つの区間に対してロルの定理を適用すればよいが、$2n-3-2(n-3) = 3$ であるのでそれぞれ単解となる。その次は（a , c_3）,（ c_3 , c_3'）,（c_3 , c_3''）,（c_3'' , b）の４つの区間となり、$2n-4-2(n-4) = 4$ から単解となる。$F^{(k)}(x)$ の場合は k 個の区間となり、$2n-k-2(n-k) = k$ からそれぞれが単解であることが分かる。あとは n まで続ければよい。

（Ｐ．156 定理 １）

（ $h > 0$ ）



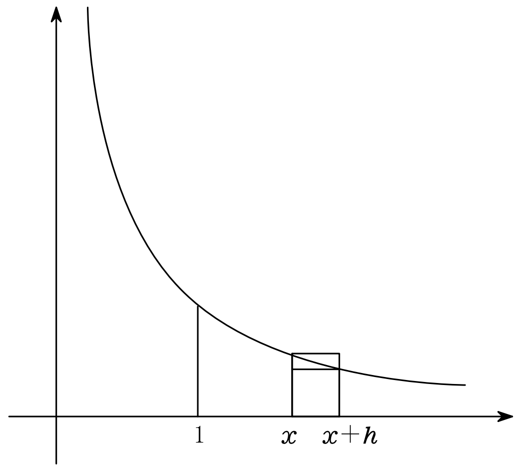
$\ell og(x+h) - \ell og\ x$

$= -S[x+h, 1] - (-S[x, 1])$

$= S[x, 1] - S[x+h, 1]$

$= S[x, x+h]$

$$\frac{h}{x+h} < \ell og(x+h) - \ell og\ x < \frac{h}{x}$$



$\ell og(x+h) - \ell og\ x$

$= S[1, x+h] - S[1, x]$

$= S[x, x+h]$

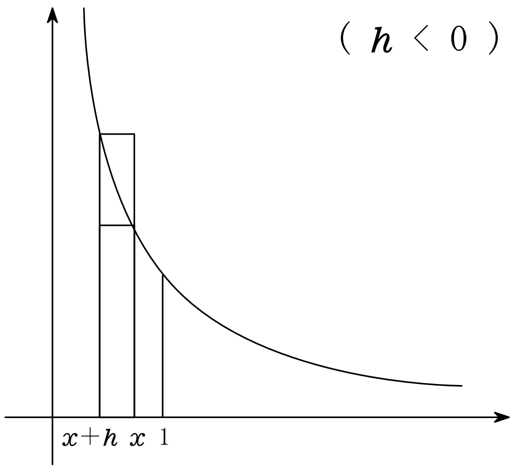
$x = 1$ ならば $x+h > 1$ なので

$\ell og(1+h) - \ell og\ 1 = S[1, 1+h] - 0$

$$\frac{h}{x+h} < \ell og(x+h) - \ell og\ x < \frac{h}{x}$$

$h \to 0+$ の場合、どちらにしても $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \frac{\ell og(x+h) - \ell og\ x}{h} = \frac{1}{x}$

$(\ h < 0\ )$



$\ell og(x+h) - \ell og\ x$

$= -S[x+h, 1] - (-S[x, 1])$

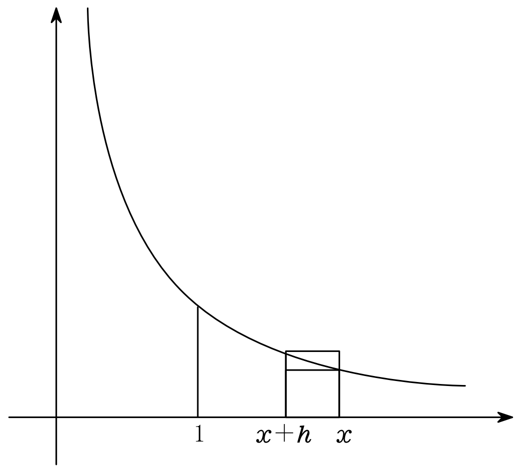
$= S[x, 1] - S[x+h, 1]$

$= -S[x+h, x]$

$\dfrac{-h}{x} < S[x+h, x] < \dfrac{-h}{x+h}$

$-h > 0$ だから

$\dfrac{1}{x} < \dfrac{\ell og(x+h) - \ell og\ x}{h} < \dfrac{1}{x+h}$



$\ell og(x+h) - \ell og\ x$

$= S[1, x+h] - S[1, x]$

$= -S[x+h, x]$

$\dfrac{-h}{x} < S[x+h, x] < \dfrac{-h}{x+h}$

$-h > 0$ だから

$\dfrac{1}{x} < \dfrac{\ell og(x+h) - \ell og\ x}{h} < \dfrac{1}{x+h}$

$h \to 0-$ の場合、どちらにしても $\displaystyle\lim_{h\to 0-} \frac{\ell og(x+h) - \ell og\ x}{h} = \frac{1}{x}$

（P．160 (*)）

(*)　$exp(ru) = (exp(u))^r$

なぜなら、任意の $u \in R$ と任意の $n \in Z$ に対して

$exp(nu) = (exp(u))^n \quad \leftarrow(\ exp(u) \times exp(u) = exp(2u)\ )$

から、$r = \dfrac{m}{n}$ （m , n は整数、$n > 0$）とすれば、上式の u に ur を代入すれば

$(exp(ur))^n = exp(nur) = exp(mu) = (exp(u))^m$

$exp(ru) = (exp(u))^{\frac{m}{n}} = exp(u)^r$

（P．161 $exp(1)=e$）

この定義では e がどんな数なのかはまだわからない。ただ数として確定することは確かである。

（P．161 $a^x = e^{x\ell og\ a}$）

(*) の $exp(u) = a \to \ell og\ a = u$ だから

$exp(r\ell og a) = (exp(u))^r = a^r = e^{r\ell og\ a}$

（P．162 ℓog_a）

$a > 1$ ならば $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ell og\ a$ から $\dfrac{d}{dx}(a^x) > 0$ よって a^x は狭義単調増加関数である。P. 112 定理２から逆関数も狭義単調増加関数であることがわかる。$0 < a < 1$ の場合は < 0 となり狭義単調減少となる。

（P．163 定理６）

$$s = 1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\cdots$$

$$(q+1)s = q+1+1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\cdots$$

$$(q+1)s-s = q+1$$

$$qs = q+1$$

$$s = \frac{q+1}{q}$$

$$\frac{1}{(q+1)!}\times\frac{q+1}{q} = \frac{1}{q!q}$$

（P．168 例）

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

$$h \leqq 0 \to \frac{0}{h} = 0$$

$h > 0 \to h = \dfrac{1}{t}$ として $\dfrac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \dfrac{t}{e^t} \to 0$ （ $h \to 0 \Leftrightarrow t \to +\infty$ ）

よって $x=0$ で微分可能である。

$S(t) = \dfrac{b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m}{a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n}$ とすれば、t が >0 で十分大きければ

$1 \leqq |a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n|$ となるので

$|S(t)| = \dfrac{|b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m|}{|a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n|} < |b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m|$

$\leqq |b_0|+|b_1|t+\cdots+|b_m|t^m|$

定理２から $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{|S(t)|}{e^t} = 0$ よって $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{e^t} = 0$

（P．170）

$\alpha = \dfrac{1}{p}$ ， $\beta = \dfrac{1}{q}$ ， $a^\alpha = x$ ， $b^\beta = y$ とおけば $a^{\frac{1}{p}} = x$ つまり $a = x^p$

また $b^{\frac{1}{q}} = y \to b = y^q$ だから

$\alpha a+\beta b \geqq a^\alpha b^\beta$ から $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q} \geqq xy$ となる。

（P．198　$\dfrac{z_1}{z_2}$ が純虚数）

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\ \sin(\theta_1-\theta_2))$ から

$\cos(\theta_1-\theta_2) = 0 \iff \theta_1-\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$　（ $n \in Z$ ）

逆関数の主値をとれば $\dfrac{\pi}{2}$ ， $\dfrac{3\pi}{2}$ つまり、直交している。

このとき $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = 0$ となる。

（P．205　近似多項式）

$P(x)$ が多項式の場合は

$P(x) = c_0+c_1(x-a)+\cdots+c_n(x-a)^n$ ， $c_k = \dfrac{p^{(k)}(a)}{k!}(k = 0, 1, \cdots, n)$

と表すことができる。

いま関数 f が a を含む区間で定義されているとし、必要な回数だけ微分可能であると仮定する。

a の近傍で f を近似する n 次式として

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

を満たす n 次式 $P_n(x)$ をとることが最適であると考えられる。

そのような n 次式 $P_n(x)$ は

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

によって与えられる。

（Ｐ.207　定理１）

$f(b) = P_{n-1}(b) + R_n$ とおいているので R_n は定数なので

$R_n = M(b-a)^n$ とおくことができる。次に関数 g を次のように定める。

$$g(x) = f(x) - P_{n-1}(x) - M(x-a)^n$$

まず $g(b) = 0$ である。

また $k = 0, 1, \cdots, n-1$ に対して

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_{n-1}^{(k)}(x) - (M(x-a)^n)^{(k)}$$

$$(M(x-a)^n)^{(0)} = M(x-a)^n$$
$$(M(x-a)^n)^{(1)} = nM(x-a)^{n-1}$$
$$(M(x-a)^n)^{(2)} = n(n-1)M(x-a)^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$(M(x-a)^n)^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-(k-1))M(x-a)^{n-k}$$

ここで

$$n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$ から

$$(M(x-a)^n)^{(k)} = \frac{n!M}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$$

となり

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_{n-1}^{(k)}(x) - \frac{n!M}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \quad \cdots \text{①}$$

$$P_{n-1}(x) = f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$f^{(k)}(a) = P_{n-1}^{(k)}(a)$ であるから、①から

$$g(a) = g^{(1)}(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$$

さらに $k = n-1$ のとき

$$\frac{n!M}{(n-n+1)!}(x-a)^{n-n+1} = n!M(x-a)$$

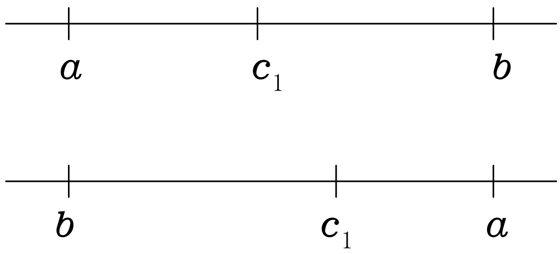
なので $P_{n-1}(x)$ は n 回微分すると 0 になることから

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)-n!M \qquad \cdots ②$$

となる。

さて、ここでロルの定理を使いたいところだが、P. 132 定理２では $a < b$ であった。今の場合は、$a < b$ ， $a > b$ どちらかわからないが $g(a) = g(b)$ であるので a と b の間に $g'(c_1) = 0$ となる c_1 が存在することに間違いはない。

また、$g'(c_1) = g'(a) = 0$ から $g''(c_2) = 0$ となる c_2 が a と c_2 の間に存在することになる。つまり c_2 は a ， b 間に含まれる。



こうしたステップを n 回重ねれば $g^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$ から a と c_{n-1} の間に $g^{(n)}(c_n) = 0$ となる c_n が存在することがわかる。

この c_n を c とすれば、c は a ， b 間にあって、②から

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)-n!M = 0$$

したがって

$$M = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

となり

$R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ となる c が a と b の間に存在することになる。

まとめて書くと

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる。

（Ｐ．209　例２）

$f(x) = sin\ x$

$$\begin{array}{l|l}
f^{(1)}(x) = cos\ x & sin(\frac{\pi}{2}+x) = sin\frac{\pi}{2}cos\ x + sin\ xcos\frac{\pi}{2} = cos\ x \\
f^{(2)}(x) = -sin\ x & sin(\pi + x) = sin\pi cos\ x + sin\ xcos\pi = -sin\ x \\
f^{(3)}(x) = -cos\ x & sin(\frac{3}{2}\pi + x) = sin\frac{3}{2}\pi cos\ x + sin\ xcos\frac{3}{2}\pi = -cos\ x \\
f^{(4)}(x) = sin\ x & sin(2\pi + x) = sin2\pi cos\ x + sin\ xcos2\pi = sin\ x
\end{array}$$

よって

$$f^{(k)}(x) = sin(\frac{\pi}{2}k + x) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

（Ｐ．218　ロピタルの定理）

（$-\infty \leqq A < +\infty$ の場合）

r を $A < r$ を満たす任意の実数とする。$A < \rho < r$ なる ρ をとれば

$x \to a$ のとき $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to A$ であるから、$a < c_1$ なる c_1 を適当にとるとき、$a < x < c_1$ を満たすすべての x に対して

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < \rho$$

が成立つ。いま u，v を $a < u < v < c_1$ を満たす 2 つの数とすると $a < u < v < b$ なので $[u, v] \subset (a, b)$ だから、つねに $g'(x) \neq 0$ であり、$[u, v]$ で微分可能である。（つまり連続）

よって、コーシーの平均値定理から

$$\frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$$

となる $w \in (u, v)$ が存在する。したがって

$$\frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} < \rho \qquad ①$$

である。

ここまでで $A = -\infty$ の場合、r , ρ については問題ない。また $a = -\infty$ であっても $-\infty < u < v < c_1$ とすることができるので問題ない。

(a) を仮定する。そのとき①で $u \to a$ とすれば、$f(u) \to 0$, $f(v) \to 0$ であるから

$$\frac{-f(v)}{-g(v)} = \frac{f(v)}{g(v)} \leqq \rho < r \quad \left(1-\frac{1}{2^n} < 1 \text{ だが } \lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{2^n}) = 1 \right)$$

を得る。

(b) を仮定する。もし $g(x) \to -\infty$ ならば $g_0(x) = -g(x)$,$f_0(x) = -f(x)$ とすれば

$$\lim_{x\to a} \frac{f'_0(x)}{g'_0(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \to \quad \lim_{x\to a} \frac{f_0(x)}{g_0(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

となるので $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ としてよいことになる。

次に $a < v < c_1$ である v を一つ固定し、$a < c_2 < v$ なる c_2 を適当にとるとき、$a < u < c_2 < v < c_1$ である任意の u に対して $g(u) > 0$ 、$g(u)-g(v) > 0$ となる。（ $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ だから ）

$a < u < c_2 < v < c_1$ なので ① が成立つので、①の両辺に

$$\frac{g(u)-g(v)}{g(u)} > 0$$

を掛けると

$$\frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} \times \frac{g(u)-g(v)}{g(u)} < \rho \times \frac{g(u)-g(v)}{g(u)}$$

$$\frac{f(u)-f(v)}{g(u)} < \rho\,(1-\frac{g(v)}{g(u)}) = \rho - \rho\frac{g(v)}{g(u)}$$

したがって

$$\frac{f(u)}{g(u)} < \rho - \rho\frac{g(v)}{g(u)} + \frac{f(v)}{g(u)}$$

を得る。

そこで $u \to a$ とすると $g(u) \to +\infty$ であるから、上の不等式の $g(u)$

を分母とする２項はいくらでも 0 に近づく。よって $a < c_3 < c_2 < c_1$ となる c_3 を適当にとれば $a < u < c_3 < c_2 < c_1$ であるとき

$$\left| -\rho\frac{g(v)}{g(u)}+\frac{f(v)}{g(u)} \right| < r-\rho$$

$$\rho-r < -\rho\frac{g(v)}{g(u)}+\frac{f(v)}{g(u)} < r-\rho$$

したがって２番目の不等式から

$$\rho-\rho\frac{g(v)}{g(u)}+\frac{f(v)}{g(u)} < r-\rho+\rho \quad \rightarrow \quad \frac{f(u)}{g(u)} < r$$ となる。

以上によって、仮定（a），(b）いずれにせよ $A < r$ を満たす任意の r をとるとき、$a < M$（$M = c_3$）を適当にとれば、$a < x < M$ であるすべての x に対して

$$\frac{f(u)}{g(u)} < r$$

の成立つことが証明された。（ $A = -\infty$ の場合は任意の実数 r より小さくすることができるのだから）

また $a = -\infty$ でも c_3 はとれるので問題ない。

（$-\infty < A \leqq +\infty$ の場合）

s を $s < A$ を満たす任意の実数とする。$s < \rho < A$ なる ρ をとれば、$x \rightarrow a$ のとき $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow A$ であるから、$a < d_1$ なる d_1 を適当にとるとき、$a < x < d_1$ を満たすすべての x に対して

$$\rho < \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立つ。いま u，v を $a < u < v < d_1$ を満たす 2 つの数とすると $a < u < v < b$ なので $[u, v] \subset (a, b)$ だから、つねに $g'(x) \neq 0$ であり、$[u, v]$ で微分可能である。（つまり連続）

よって、コーシーの平均値定理から

$$\frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$$

となる $w \in (u, v)$ が存在する。したがって

$$\rho < \frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} \qquad ①'$$

である。

ここまでで $A = +\infty$ の場合、s, ρ については問題ない。また $a = -\infty$ であっても $-\infty < u < v < d_1$ とすることができるので問題ない。

(a) を仮定する。そのとき①で $u \to a$ とすれば、$f(u) \to 0$, $f(v) \to 0$ であるから

$$s < \rho \leqq \frac{-f(v)}{-g(v)} = \frac{f(v)}{g(v)}$$

を得る。

(b) を仮定する。上述同様 $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ としてよい。

次に $a < v < d_1$ である v を一つ固定し、$a < d_2 < v$ なる d_2 を適当にとるとき、$a < u < d_2 < v < d_1$ である任意の u に対して $g(u) > 0$ 、$g(u)-g(v) > 0$ となる。（ $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ だから ）

$a < u < d_2 < v < d_1$ なので ① が成立つので、①' の両辺に

$$\frac{g(u)-g(v)}{g(u)} > 0$$

を掛けると

$$\rho \times \frac{g(u)-g(v)}{g(u)} < \frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} \times \frac{g(u)-g(v)}{g(u)}$$

$$\rho\left(1-\frac{g(v)}{g(u)}\right) = \rho - \rho\frac{g(v)}{g(u)} < \frac{f(u)-f(v)}{g(u)}$$

したがって

$$\rho - \rho\frac{g(v)}{g(u)} + \frac{f(v)}{g(u)} < \frac{f(u)}{g(u)}$$

を得る。

そこで $u \to a$ とすると $g(u) \to +\infty$ であるから、上の不等式の $g(u)$ を分母とする２項はいくらでも 0 に近づく。よって $a < d_3 < d_2 < d_1$

となる d_3 を適当にとれば $a < u < d_3 < d_2 < d_1$ であるとき

$$\left| -\rho \frac{g(v)}{g(u)} + \frac{f(v)}{g(u)} \right| < \rho - s$$

$$s - \rho < -\rho \frac{g(v)}{g(u)} + \frac{f(v)}{g(u)} < \rho - s$$

したがって１番目の不等式から

$$s - \rho + \rho < \rho - \rho \frac{g(v)}{g(u)} + \frac{f(v)}{g(u)} \quad \rightarrow \quad s < \frac{f(u)}{g(u)}$$ となる。

以上によって、仮定（a），(b）いずれにせよ $s < A$ を満たす任意の s をとるとき、$a < M'$ （$M' = d_3$）を適当にとれば、$a < x < M'$ であるすべての x に対して

$$s < \frac{f(u)}{g(u)}$$

の成立つことが証明された。（ $A = +\infty$ の場合は任意の実数 s より大きくすることができるのだから）

また $a = -\infty$ でも d_3 はとれるので問題ない。

（Ｐ．221　例５）

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon_1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon_1}{x^3} = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon_2}{x^2} = 0$$

$$\sin x - x\cos x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon_1\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2\right) = \frac{x^3}{3} + \varepsilon_1 - x\varepsilon_2$$

$$x(1 - \cos x) = x\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2\right)\right) = \frac{x^3}{2} - x\varepsilon_2$$

（Ｐ．222　例６）

$$y = a^x \rightarrow \log y = x\log a \rightarrow y' \frac{1}{y} = \log a \rightarrow y' = a^x \log a$$

（Ｐ.227　補題１）

下方和について

$m_i^{'} = inf\ f(x) \qquad (x_{i-1} \leqq x \leqq x^{*})$

$m_i^{''} = inf\ f(x) \qquad (x^{*} \leqq x \leqq x_i)$

である。しかるに $m_i = inf\ f(x) \quad (x_{i-1} \leqq x \leqq x_i)$ であるから

$m_i \leqq m_i^{'}\ ,\ m_i \leqq m_i^{''}$

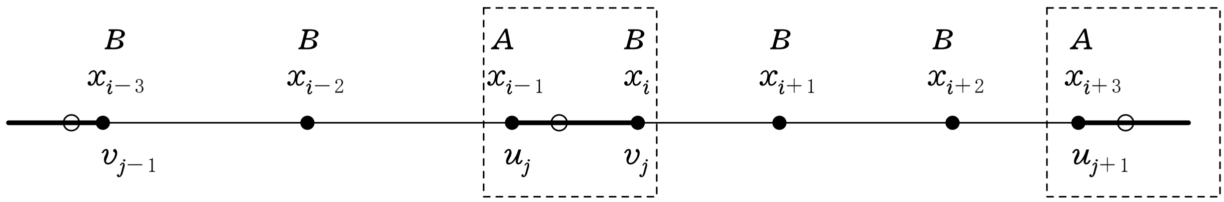
であり、したがって

$m_i^{'}(x^{*}-x_{i-1})+m_i^{''}(x_i-x^{*}) \geqq m_i(x^{*}-x_{i-1})+m_i(x_i-x^{*})$

$\geqq m_i(x_i-x_{i-1})$

（Ｐ.232　定理５）

○ 不連続点



（Ｐ.234　定理６）

$\underline{\int_a^b} f = sup\ L(P, f)$ なので $\underline{\int_a^b} f - \dfrac{\varepsilon}{2} < L(P_0, f)$ となる分割 P_0 が存在する。

$d(P) < \delta < \delta_0$ であるから、各小区間 $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$ は P_0 の点をたかだか１つしか含まない。なぜならば、P_0 の点を y_j で表すとすれば、２つ含まれるとすると、$[y_{j-1}\ ,\ y_j] \subset [x_{i-1}\ ,\ x_i]$ となり、$\delta < \delta_0$ に反するからである。

$m_i^{'}(x^{*}-x_{i-1})+m_i^{''}(x_i-x^{*})-m_i(x_i-x_{i-1})$

$= m_i^{'}A+m_i^{''}B-m_i(A+B) = m_i^{'}A+m_i^{''}B-m_iA-m_iB$

$= (m_i^{'} - m_i) A + (m_i^{''} - m_i) B$

$= (m_i^{'} - m_i)(x^* - x_{i-1}) + (m_i^{''} - m_i)(x_i - x^*)$

$L(P_0) - L(P^*) \leqq 0$ なので

$0 \leqq \underline{\int_a^b} f - L(P) = (\underline{\int_a^b} f - L(P_0)) + (L(P_0) - L(P^*)) + (L(P^*) - L(P))$

$\leqq (\underline{\int_a^b} f - L(P_0)) + (L(P^*) - L(P)) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

（上積分の場合）

$\overline{\int_a^b} f = inf\ U(P, f)$ なので $U(P_0, f) < \overline{\int_a^b} f + \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる分割 P_0 が

存在する。つまり

$0 \leqq U(P_0, f) - \overline{\int_a^b} f < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$d(P) < \delta$ ならば

$0 \leqq U(P, f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon$ ← （ f が定数の場合 ＝（等号）になる。）

を示せばよい。

$P^* = P_0 \cup P$ とおけば

$U(P^*, f) \leqq U(P, f)$

$U(P^*, f) \leqq U(P_0, f)$

また区間［x_{i-1} ， x^*］，［x^* ， x_i］，［x_{i-1} ， x_i］における $max\ f(x)$

をそれぞれ $M_i^{'}$ ， $M_i^{''}$ ， M_i とすれば

$0 \leqq M_i - M_i^{'} \leqq 2M$ ， $0 \leqq M_i - M_i^{''} \leqq 2M$

であるから

$M_i(x_i - x_{i-1}) - M_i^{'}(x^* - x_{i-1}) - M_i^{''}(x_i - x^*)$

$= M_i(A + B) - M_i^{'} A - M_i^{''} B = M_i A + M_i B - M_i^{'} A - M_i^{''} B$

$= (M_i - M_i^{'}) A + (M_i - M_i^{''}) B$

$= (M_i - M_i^{'})(x^* - x_{i-1}) + (M_i - M_i^{''})(x_i - x^*) \leqq 2M(x_i - x_{i-1}) < 2M\delta$

そして P_0 の分点の個数が n_0 であるから

$$U(P,f)-U(P^*,f) < 2M\delta n_0 \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。

$$0 \leqq U(P)-\overline{\int_a^b} f = U(P_0)-\overline{\int_a^b} f+(U(P^*)-U(P_0))+(U(P)-U(P^*))$$

$$\leqq (U(P_0)-\overline{\int_a^b} f)+(U(P)-U(P^*)) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

（Ｐ. 236　定理７）

$M_i = sup\ f(x)$ $(x_{i-1} \leqq x \leqq x_i)$ とすれば M_i は上限だから

$M_i-\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(s_i)$ となる $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ が存在する。その s_i に対して

$$0 \leqq M_i-f(s_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となる。

$(A = \lim\limits_{d(P)\to 0} L(P,f)$ について)

$m_i = inf\ f(x)$ $(x_{i-1} \leqq x \leqq x_i)$ とすれば m_i は下限だから

$f(s_i) < m_i+\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ となる $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ が存在する。その s_i に対して

$$0 \leqq f(s_i)-m_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となる。この s_i を用いたリーマン和 $S(P,f)$ は

$$S(P,f)-L(P,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

したがって $d(P) < \delta$ である限り

$$|A-L(P,f)| = |A-S(P,f)+S(P,f)-L(P,f)|$$

$$\leqq |A-S(P,f)|+(S(P,f)-L(P,f)) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

（Ｐ．239　≦）

u ， v ∈ ［x_{i-1} ， x_i］ならば $|h(u)-h(v)|<\varepsilon$ 、よって $M_i^*-m_i^* \leqq \varepsilon$

これは上限、下限をとっているので ＝ となる可能性があるためである。

$\varepsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i \leqq \varepsilon(b-a)$

これは $B=\varnothing$ の可能性があるからである。

（Ｐ．240　定理１）

$m_i^{'}+m_i^{''} \leqq m_i \leqq M_i \leqq M_i^{'}+M_i^{''}$

$m_i^{'}$ ， $m_i^{''}$ は任意の x ∈ ［x_{i-1} ， x_i］に対し $m_i^{'} \leqq f_1(x)$ ，$m_i^{''} \leqq f_2(x)$

よって $m_i^{'}+m_i^{''} \leqq f_1(x)+f_2(x)=f(x)$ から $m_i^{'}+m_i^{''} \leqq m_i$

上限についても同様である。

$$U(P,f_j)-L(P,f_j)<\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ L(P,f_j) \leqq \int_a^b f \leqq U(P,f_j) \quad (j=1,2)$$

$$0 \leqq \int_a^b f-L(P,f_j)<\frac{\varepsilon}{2} \quad \to \int_a^b f-\frac{\varepsilon}{2}<L(P,f_j)$$

$$-U(P,f_j)+L(P,f_j)>-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \geqq \int_a^b f-U(P,f_j)>-\frac{\varepsilon}{2} \to \int_a^b f+\frac{\varepsilon}{2}>U(P,f_j)$$

逆に f が［a ， b］で積分可能ならば、$\varepsilon>0$ に対し

$U_a^b(P,f)-L_a^b(P,f)<\varepsilon$

を満たす［a ， b］の分割 P が存在する。

P^* を P に分点 c をつけ加えた細分だとすれば

$L_a^b(P,f) \leqq L_a^b(P^*,f) \leqq U_a^b(P^*,f) \leqq U_a^b(P,f)$

$U_a^b(P^*,f)-L_a^b(P^*,f) \leqq U_a^b(P,f)-L_a^b(P,f)<\varepsilon$

となる。

$P=Q_1 \cup Q_2$ のとき

$U_a^c(Q_1,f)+U_c^b(Q_2,f)=U_a^b(P,f)$

$L_a^c(Q_1,f)+L_c^b(Q_2,f) = L_a^b(P,f)$

$U_a^c(Q_1,f)-L_a^c(Q_1,f)+U_c^b(Q_2,f)-L_c^b(Q_2,f) < \varepsilon$

$0 \leqq U_a^c(Q_1,f)-L_a^c(Q_1,f)$, $0 \leqq U_c^b(Q_2,f)-L_c^b(Q_2,f)$

和が ε より小さいのであるから、それぞれは ε より小さいことになる。

（Ｐ．242　定理２）

(c)

「 g の連続性によって x_0 は［a , b］の内点と仮定してよい。」について、まだこの上巻では「内点」は定義されていないので、$x_0 \in (a, b)$ と考えればよい。

連続性から、

$|x-x_0| < \delta$ ならば $|g(x)-g(x_0)| < \dfrac{g(x_0)}{2}$ となるようなδが存在する。

$$\frac{g(x_0)}{2} = g(x_0)-\frac{g(x_0)}{2} < g(x) < g(x_0)+\frac{g(x_0)}{2}$$

したがって、c , $d \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ となるようにとればよい。

$x_0 = a$ の場合は、右連続なので

$0 \leqq x-a < \delta$ ならば $|g(x)-g(a)| < \dfrac{g(a)}{2}$ となるようなδが存在するので、$c \in (a, a+\delta)$ とすればよい。この場合 d はいらない。

(d)

$\int_a^b f$ は確定するので $\mu = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$ も確定する。

$a < \xi < b$ であるが、f が定数ならば $a \leqq \xi \leqq b$ であるξならば何でもかまわない。f が定数でない場合は、$a < \xi < b$ となるξが存在するので、どちらにしても $a < \xi < b$ とおけば問題ない。

（ P. 110 定理１の証明（６行目）から $a<\xi<b$ である。）

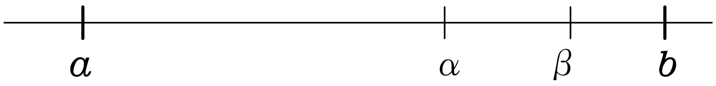
(e)

$||f(x)|-|f(y)|| \leqq |f(x)-f(y)|$ から可積分であることがわかる。

また、f が連続なら $|f|$ も連続である。

（Ｐ．244　積分可能）

f を区間 I で定義された関数とする。もし、$\alpha<\beta$ を満たす I の任意の２点 α,β に対して区間［α ，β］で f が有界かつ積分可能ならば、f は I で積分可能であるという。



「$\int_a^b f$ は、任意の a ，$b \in I$ に対して意味をもつことになる。」

このことは、$a=b$ ，$a<b$ ，$a>b$ どれであっても確定すると言う意味である。

（Ｐ．246　積分関数）

f は I で積分可能であるとする。そのとき、下端 $a \in I$ を固定し、上端 x を変数として、積分

$$\int_a^x f$$

を考えれば、x の関数となるから、この関数 F を f の積分関数という。

$$F(x)=\int_a^x f$$

である。ここで x は任意の点なので $x<a$ の可能性もあることを忘れてはいけない。

（Ｐ．246　定理３）

(a)　a ，x ，$x+h$ この３つの点の大小関係はわからないが

$\int_a^{x+h} f=\int_a^x f+\int_x^{x+h} f$ は常に成立つ。仮に $x<x+h<a$ とすると

$$\int_x^a f=\int_x^{x+h} f+\int_{x+h}^a f \quad\rightarrow\quad -\int_a^x f=\int_x^{x+h} f-\int_a^{x+h} f \quad\rightarrow$$

$$\int_a^{x+h} f=\int_a^x f+\int_x^{x+h} f$$

次に、任意の $\varepsilon>0$ に対し $|h|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ とすれば

$|F(x+h)-F(x)| \leqq M|h| < \varepsilon$
とすることができる。よって x で連続である。

($x = \alpha$ (端点) の場合) ← $\alpha \in I$ なので $I=[\alpha, \beta)$ or $[\alpha, \beta]$
$\delta > 0$ を、$[\alpha, \alpha+\delta] \subset I$ となるように取って、$t \in [\alpha, \alpha+\delta]$ に対して $|f(t)| \leqq M$ とする。そのとき $0 < h < \delta$ ならば

$$F(\alpha+h)-F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f - \int_{\alpha}^{\alpha} f = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f$$

補題の(a) から

$$|F(\alpha+h)-F(\alpha)| \leqq Mh$$

よって α で右連続である。

(b) $|t-x| < \delta \to |f(t)-f(x)| < \varepsilon$ ではないだろうか？なぜ「≦」なのかわからない。「<」として進めると

$$f(x)-\varepsilon < f(t) < f(x)+\varepsilon$$

が成立つように δ をとることができる。そこで、$h \neq 0$, $|h| < \delta$ のとき、x と $x+h$ ($x < x+h$ or $x > x+h$) どちらであっても

$$f(x)-\varepsilon < \frac{\int_{x}^{x+h} f}{h} < f(x)+\varepsilon$$

を得る。

($x = \alpha$ (端点) の場合)
任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ を、$0 < t-\alpha < \delta \to |f(t)-f(\alpha)| < \varepsilon$ が成立つように δ を取ることができる。そこで、$h \neq 0$, $h < \delta$ のとき、α と $\alpha+h$ (この場合は $\alpha < \alpha+h$ である。) であれば

$$f(\alpha)-\varepsilon < \frac{\int_{\alpha}^{\alpha+h} f}{h} < f(\alpha)+\varepsilon$$

すなわち

$$\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-f(\alpha)\right| < \varepsilon$$

（P．261　定理５）

$0 < \alpha < 1 \to \alpha \neq 1$，$\left(\dfrac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\right)' = (x-\alpha)^{-\alpha}$

$$\int_c^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}\Big[(x-\alpha)^{1-\alpha}\Big]_c^b$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left((b-\alpha)^{1-\alpha}-(c-\alpha)^{1-\alpha}\right) \to \frac{1}{1-\alpha}(b-\alpha)^{1-\alpha} \quad (c \to a)$$

（P．262　定理６）

$k \geqq 2$，$[k-1,\ k]$ で

$f(k) \leqq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqq f(k-1)$

$k = 2 \to f(2) \leqq \displaystyle\int_1^2 f(x)dx \leqq f(1)$

$k = 3 \to f(3) \leqq \displaystyle\int_2^3 f(x)dx \leqq f(2)$

$k = 4 \to f(4) \leqq \displaystyle\int_3^4 f(x)dx \leqq f(3)$

$\vdots$

$k = n \to f(n) \leqq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)dx \leqq f(n-1)$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqq \int_1^n f(x)dx \leqq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

（P．268　2°)）

2°) $\phi(t)$ は区間 J において連続かつ微分可能で、$\phi'(t)$ は J において連続である。

他書では、

「$\phi(t)$ は微分可能、かつ狭義の単調関数で、$\phi'(t)$ は積分可能」と仮定ていることがある。（解析概論　高木貞治 著 岩波書店）

ここでは、P. 238 定理８とP. 242 系から、$f(\phi(t))\phi'(t)$ が積分可能であることを使っている。

（P．269　例３）

$$w = 2t \to \frac{dw}{dt} = 2 \to dt = \frac{dw}{2}$$

$$\int cos\ 2t\ dt = \frac{1}{2}\int cos\ w\ dw = \frac{1}{2}sin\ w = \frac{1}{2}sin\ 2t$$

（Ｐ．269　例４）

$$(\sqrt{x^2+a})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$$

（Ｐ．274　$\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^{\ell}}$ ，$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx$）

$\left(\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^{\ell}}\right)$

$(\ell = 1)$

$$t = x-a \to \frac{dt}{dx} = 1$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)} = \int\frac{1}{t}dt = \ell og|x-a|$$

$(\ell \neq 1)$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^{\ell}} = \int t^{-\ell}dt = \frac{1}{1-\ell}(x-a)^{1-\ell}$$

$\left(\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx\ ,\ p^2-4q < 0\right)$

$t = x+\dfrac{p}{2}$ とすると $x = t-\dfrac{p}{2}$ これを代入すると

$$\frac{B(t-\frac{p}{2})+C}{((t-\frac{p}{2})^2+p(t-\frac{p}{2})+q)^m} = \frac{Bt-\frac{Bp}{2}+C}{\left(t^2-pt+\frac{p^2}{4}+pt-\frac{p^2}{2}+q\right)^m}$$

$$= \frac{Bt-\frac{Bp}{2}+C}{\left(t^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^m} = \frac{Bt}{\left(t^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^m}+\frac{B-\frac{Bp}{2}}{\left(t^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^m}$$

$p^2-4q < 0 \to -\dfrac{p^2}{4}+q > 0$　なので $-\dfrac{p^2}{4}+q = b^2\ (\ b \neq 0\ )$ として

$$= \frac{Bt}{(t^2+b^2)^m} + \frac{B - \frac{Bp}{2}}{(t^2+b^2)^m}$$

$\frac{dt}{dx} = 1$ なので $\int \frac{t}{(t^2+b^2)^m}dt$, $\int \frac{1}{(t^2+b^2)^m}dt$ がわかればよいことになる。書き直すと

$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^m}dx$, $\int \frac{1}{(x^2+b^2)^m}dx$ がわかればよいことになる。

($\int \frac{x}{(x^2+b^2)^m}dx$ について)

($m = 1$)

$$t = x^2+b^2 \to \frac{dt}{dx} = 2x \to dx = \frac{1}{2x}dt$$

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)}dx = \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ell og(x^2+b^2)$$

($m \neq 1$)

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^m}dx = \int \frac{x}{t^m}\frac{1}{2x}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^m}dt = \frac{1}{2(1-m)}(x^2+b^2)^{1-m}$$

($\int \frac{1}{(x^2+b^2)^m}dx$ について)

$I_m = \int \frac{1}{(x^2+b^2)^m}dx$ とおけば

公式Ⅱ’から

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(x^2+b^2)^{m-1}}\right)' = (1-m)(x^2+b^2)^{1-m-1} \times 2x = \frac{2(1-m)x}{(x^2+b^2)^m}$$

$$I_{m-1} = \int \frac{1}{(x^2+b^2)^{m-1}}dx = \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} - \int x \times \frac{2(1-m)x}{(x^2+b^2)^m}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} - 2(1-m)\int \frac{x^2}{(x^2+b^2)^m}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} - 2(1-m)\int \frac{x^2+b^2-b^2}{(x^2+b^2)^m}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} - 2(1-m)\left(\int \frac{x^2+b^2}{(x^2+b^2)^m}dx - \int \frac{b^2}{(x^2+b^2)^m}dx\right)$$

$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} - 2(1-m)\left(\int \frac{1}{(x^2+b^2)^{m-1}}dx - b^2\int \frac{1}{(x^2+b^2)^m}dx\right)$$

$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} - 2(1-m)(I_{m-1} - b^2 I_m)$$

$$= \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} + 2(m-1)(I_{m-1} - b^2 I_m)$$

$I_{m-1} = \dfrac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} + 2(m-1)(I_{m-1} - b^2 I_m)$ を I_m について解くと

$$2(m-1)b^2 I_m = \frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}$$

$$\boxed{I_m = \frac{1}{2(m-1)b^2}\left\{\frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\}}$$

$I_1(x) = \dfrac{1}{b}arctan\,\dfrac{x}{b}$ なので I_2, I_3, ・・・ と求めればよい。

P. 272 の補題の証明は解析入門 I （杉浦光夫 著　東大出版）にある。

（Ｐ．276　例２）

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+1)} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$1 = a((x^2+1)^2) + x(x^2+1)(bx+c) + x(dx+e)$

$1 = a(x^4+2x^2+1) + x(bx^3+cx^2+bx+c) + x(dx+e)$

$1 = ax^4+2ax^2+a+bx^4+cx^3+bx^2+cx+dx^2+ex$

$1 = ax^4+bx^4+cx^3+2ax^2+bx^2+dx^2+cx+ex+a$

$$\begin{cases} a+b=0 & \cdots① \\ c=0 & \cdots② \\ 2a+b+d=0 & \cdots③ \\ c+e=0 & \cdots④ \\ a=1 & \cdots⑤ \end{cases} \quad \to a=1,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1,\ e=0$$

（Ｐ．276　例３）

$x^4+1=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$

$=x^4+bx^3+x^2+ax^3+abx^2+ax+x^2+bx+1$

$b+a=0$ ， $1+ab+1=0$ ， $a+b=0 \to ab=-2$ ， $a+b=0$

$\to b=-\dfrac{2}{a}$ ， $a+b=0 \to a-\dfrac{2}{a}= \to a^2-2=0$

$\to a=\pm\sqrt{2}$ ， $b=\mp\sqrt{2}$

よって $a=\sqrt{2}$ ， $b=-\sqrt{2}$ とすると

$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}+\frac{cx+d}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$(x^2-\sqrt{2}x+1)(ax+b)+(x^2+\sqrt{2}x+1)(cx+d)=1$

$ax^3+bx^2-\sqrt{2}ax^2-\sqrt{2}bx+ax+b+cx^3+dx^2+\sqrt{2}cx^2+\sqrt{2}dx+cx+d$

$=1$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0 \\ -\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c=0 \\ b+d=1 \end{cases} \to \begin{cases} a+c=0 \\ b-d=0 \\ a-c=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b+d=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ d=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}+\frac{cx+d}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}}$$

となる。ここで

$$\frac{x+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ell og|f|$$

$\displaystyle\int \frac{1}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} dx$ については $t = x+\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = dt$

$$= \int \frac{1}{t^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} dt = \sqrt{2} arctan\ t = \sqrt{2} arctan(\sqrt{2}x+1)$$

以上から $x^2+\sqrt{2}x+1 > 0$ なので

$$\boxed{\int \frac{x+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} dx = \frac{1}{2} \ell og(x^2+\sqrt{2}x+1) + arctan(\sqrt{2}x+1)}$$

次に

$$\frac{x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-2\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$\int \frac{1}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} dx$ を求めると $t = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = dt$

$$= \int \frac{1}{t^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} dt = \sqrt{2}\,arctan(\sqrt{2}x-1)$$

したがって $x^2-\sqrt{2}x+1 > 0$ なので

$$\boxed{\int \frac{x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} dx = \frac{1}{2}\ell og(x^2-\sqrt{2}x+1) - arctan(\sqrt{2}x-1)}$$

よって

$$\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{\frac{1}{2}\ell og(x^2+\sqrt{2}x+1) + arctan(\sqrt{2}x+1)\}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \{\frac{1}{2}\ell og(x^2-\sqrt{2}x+1) - arctan(\sqrt{2}x-1)\}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ell og(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \{arctan(\sqrt{2}x+1) + arctan(\sqrt{2}x-1)\}$$

（P.277　例１）

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおけば

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \rightarrow t^n(cx+d) = ax+b \rightarrow ct^n x - ax = b - dt^n$$

$$\rightarrow x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a} = \frac{dt^n-b}{-ct^n+a}$$

$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は定数であってはならないので、微分して

$$\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\neq 0$$

よって $ad-bc\neq 0$ という条件が必要である。

（Ｐ.277　例２）

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ とおけば

$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx+ax^2\rightarrow bx+2\sqrt{a}tx=t^2-c\rightarrow$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$$

（ii）$a<0$ の場合

$$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$b^2-4ac\leqq 0$ ならば、$\dfrac{4ac-b^2}{4a}\leqq 0$ なのでグラフは x 軸に接するか

それよりも低い位置に下に開く形になる。

$b^2-4ac>0$ の場合は２つの実数解をもつので、それらを α,β とし

$$\sqrt{\frac{\alpha(x-a)}{x-\beta}}=t\quad(\alpha<x<\beta)$$

とおけば、

$$\frac{\alpha(x-a)}{x-\beta}=t^2\rightarrow\quad\alpha(x-a)=(x-\beta)t^2\rightarrow\alpha x-t^2x=\alpha a-\beta t^2\rightarrow$$

$$x=\frac{\alpha a-\beta t^2}{\alpha-t^2}=\frac{\beta t^2-\alpha a}{t^2-\alpha}=\phi(t)$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)\rightarrow ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)>0$$

よって

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(\beta-x)\sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}$$

(注)（$\beta-x$）としておかないと正にならない。

$=(\beta-\phi(t))t$

拘泥　←　コウデイ

（P. 279　例２）

$t = \cos x \rightarrow \dfrac{dt}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$

（P. 280　例５）

$t = \tan\dfrac{x}{2} \rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}} \rightarrow dx = 2\cos^2\dfrac{x}{2}dt$

（P. 283　例２）

$\sin(\dfrac{\pi}{2}-t) = \sin\dfrac{\pi}{2}\cos t - \sin t\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos t$

$\sin(\pi-t) = \sin\pi\cos t - \sin t\cos\pi = \sin t$

（P. 284　例３）

$\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{2-\sin^2 x}$ とみれば　$f(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$ よって

$\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ を求めればよい。

$t = \cos x \rightarrow \dfrac{dt}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$

$\displaystyle\int\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int\dfrac{\sin x}{1+t^2}\cdot(-\dfrac{dt}{\sin x}) = -\int\dfrac{1}{1+t^2}dt$

$= -\arctan t = -\arctan(\cos x)$

$[-\arctan(\cos x)]_0^{\pi} = -\arctan(-1)+\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

（P. 284　例４）

$J_0 = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow J_2 = \dfrac{1}{2}J_0 = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2} \rightarrow J_4 = \dfrac{3}{4}J_2 = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}$

$J_1 = 1 \rightarrow J_3 = \dfrac{2}{3}J_1 = 1\cdot\dfrac{2}{3} \rightarrow J_5 = \dfrac{4}{5}J_3 = 1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}$

（P.285　ウォリスの公式）

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

$$J_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}J_{2n+1-2} = \frac{2n}{2n+1}J_{2n-1}$$

$$\frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

$$J_{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} \quad , \quad J_{2n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

ここで

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2-1}{(2k)^2} = 1-\frac{1}{(2k)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$J_{2n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$= \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n)(2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n)}{(3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1))(2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n)}$$

$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$\sqrt{2(2n+1)}J_{2n+1} = \sqrt{2(2n+1)}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\sqrt{2(2n+1)}J_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$$

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2(2n+1)}J_{2n+1}\sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$$

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cdot\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}} = 1$　なので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$$

（Ｐ.286　スターリングの公式）

$a_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$　とおく

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\times\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-n-1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}}\times\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}{n+1}e^{-1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-1}$$

まず $y = \ell og\ x$ のグラフであるが

$y' = \dfrac{1}{x}$ ，$y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$　$(0 < x)$　よって下に凹関数である。

台形の面積 $= \dfrac{1}{2}(a+b)h \to \dfrac{1}{2}(a+b) = \ell og\ k$

よって左図から $\ell og\ k > \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ell og\ x\ dx$

$\ell og\ n! > [x\ell og\ x - x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$

$= (n+\frac{1}{2})\ell og(n+\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\ell og\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= (n+\frac{1}{2})\ell og(n+\frac{1}{2}) - n - \frac{1}{2}(\ell og\ 1 - \ell og\ 2)$

$= (n+\frac{1}{2})\ell og(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ell og\ 2$

ここで $\ell og\ x$ は狭義単調増加であるので $\ell og(n+\frac{1}{2}) > \ell og\ n$ である。

また $\frac{1}{2}\ell og\ 2 = \ell og\sqrt{2} > \ell og\ 1 > 0$ なので

$> (n+\frac{1}{2})\ell og\ n - n$

また右図から

$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ell og\ \frac{n+1}{n} \to 1 < (n+\frac{1}{2})\ell og\ \frac{n+1}{n}$

以上により

(*) から $\ell og\ a_n > 0 \to \ell og\ a_n > \ell og\ 1 \to a_n > 1$ （1を下界にもつ）

(**) から $\ell og(\frac{a_n}{a_{n+1}}) > 0 \to \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \to a_n > a_{n+1}$ （単調減少）

$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \to n! = a_n(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) \to (n!)^2 = a_n^2 n^{2n+1}e^{-2n}$

また

$a_{2n} = \frac{(2n)!}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}} \to (2n!) = a_{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}$

ゆえに

$\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \frac{2^{2n}a_n^2 n^{2n+1}e^{-2n}}{\sqrt{n}a_{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}} = \frac{2^{2n}a_n^2 n^{2n+1}}{\sqrt{n}a_{2n}2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{a_n^2 n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}\, a_{2n} 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_n^2}{\sqrt{2}\, a_{2n}}$$

（P．283　例１）

P. 283 例２(1) から

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\, d\theta = J_{2n+1}$$

（P．283　例２）

P. 265 問８参照

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n} = \cos^{2n} x \;,\; \frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin\theta\,(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

（P．284　例３）

$$e^x = 1 + x + \frac{e^{\theta x}}{2} x^2 \quad (0 < \theta < 1)$$ ← 覚えたい！

$$0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n-2} x < \sin^{2n-3} x$$

$$J_{2n+1} < J_{2n-2} < J_{2n-3}$$

$$J_{2n-3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-4}{2n-3}$$

$$J_{2n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$1 < \frac{J_{2n-2}}{J_{2n+1}} < \frac{J_{2n-3}}{J_{2n+1}} = \frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{2n-2}}{J_{2n+1}} = 1$$ ④から

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} \times \sqrt{n} J_{2n+1} \sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$$

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)} \times \sqrt{n}J_{2n+1}\sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}J_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{2n-2}}{J_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}J_{2n-2}}{\sqrt{n}J_{2n+1}} = 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}J_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

（P.290　例）

$$\int f' g = fg - \int fg'$$

$$g = \frac{1}{x}\ ,\ f = -\cos\ x \quad \to \quad g' = -\frac{1}{x^2}\ ,\ f' = \sin\ x$$

$$\int \frac{\sin\ x}{x}dx = -\frac{\cos\ x}{x} - \int \frac{\cos\ x}{x^2}dx$$

$$\frac{2}{\varepsilon} < p \to \frac{1}{p} > \frac{\varepsilon}{2} \to \frac{2}{p} > \varepsilon$$

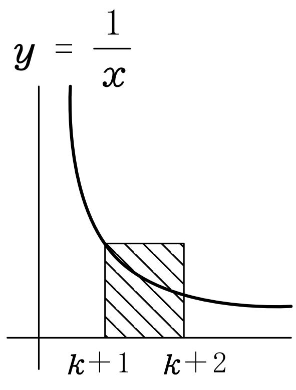
$$x = k\pi + t \to \frac{dx}{dt} = 1$$

$$k\pi = k\pi + t \to t = 0\ ,\ (k+1)\pi = k\pi + t \to t = \pi$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin\ x|}{x}dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin\ t|}{k\pi + t}dt$$

$$\frac{1}{k+1} > \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}dx$$ については

右図参照



$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin\ x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{|sin\ x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{|sin\ x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\int_2^3 \frac{1}{x}dx$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{|sin\ x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\int_3^4 \frac{1}{x}dx$$

したがって

$$\int_0^{3\pi} \frac{|sin\ x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\int_1^4 \frac{1}{x}dx \quad \to \int_0^{n\pi} \frac{|sin\ x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

（Ｐ．291　定理４）

ヘルダーの不等式　（ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ）

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \{g(x)\}^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

（証明）P. 250 問３、４に従う。

（問３）

$u \geqq 0$, $v \geqq 0$ ならば　$uv \leqq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$　なので

$f \geqq 0$, $g \geqq 0$ から

$$fg \leqq \frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}$$

fg は積分可能なので

$$\int_a^b fg \leqq \int_a^b \frac{f^p}{p}+\int_a^b \frac{g^q}{q} = \frac{1}{p}\int_a^b f^p+\frac{1}{q}\int_a^b g^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

（問４）

$|f|$, $|g|$ は $[a , b]$ で積分可能なので $|f|^p$, $|g|^q$ も積分可能

$$F = \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad G = \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

とすれば、$F \geqq 0$，$G \geqq 0$ であり

$$\int_a^b F^p = \int_a^b \frac{|f|^p}{\left(\int_a^b |f|^p\right)} = \frac{1}{\int_a^b |f|^p}\int_a^b |f|^p = 1$$

$$\int_a^b G^q = \int_a^b \frac{|g|^q}{\left(\int_a^b |g|^q\right)} = \frac{1}{\int_a^b |g|^q}\int_a^b |g|^q = 1$$

よって問３の結果から

$$\int_a^b FG \leqq 1 \quad \rightarrow \quad \int_a^b \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqq 1$$

$$\int_a^b |fg| \leqq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

P. 242 定理２(*e*) から $\left|\int_a^b f\right| \leqq \int_a^b |f|$ なので

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqq \int_a^b |fg| \leqq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

END

(1)

$$\int f' g = fg - \int fg'$$

$$f' = e^{-x}, \quad g = x^s \rightarrow f = -e^{-x}, \quad g' = sx^{s-1}$$

$$\int e^{-x}x^s \, dx = -e^{-x}x^s + s\int e^{-x}x^{s-1} \, dx$$

(3)

$$\Gamma\left(\frac{s}{p}+\frac{t}{q}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}-1}dx$$

$$e^{-x}x^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}-1} = e^{-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})x}x^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} = e^{-\frac{1}{p}x}x^{\frac{1}{p}(s-1)} \cdot e^{-\frac{1}{q}x}x^{\frac{1}{q}(t-1)}$$

ここで

$$f(x) = e^{-\frac{1}{p}x}x^{\frac{1}{p}(s-1)} \quad , \quad g(x) = e^{-\frac{1}{q}x}x^{\frac{1}{q}(t-1)}$$

とおく。

s ， t ， p ， $q > 0$ なので $\dfrac{s}{p}+\dfrac{t}{q} > 0$ よって広義積分

$$\Gamma\left(\frac{s}{p}+\frac{t}{q}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}-1}dx$$

は収束する。

$0 < a < b < +\infty$ なる区間 $[a, b]$ において f ， $g > 0$ で連続であるから積分可能であって $|f| = f$ ， $|g| = g$ なので、ヘルダーの不等式から

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \{g(x)\}^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

あとは $a \to 0+$ ， $b \to +\infty$ とすればよい。

（P.293　ルジャンドルの球関数）

$$\int f' g = fg - \int fg'$$

$$f' = F^{(n)} \ , \ g = Q \to f = F^{(n-1)} \ , \ g' = Q^{(1)}$$

$$\int_a^b QP_n^* = \int_a^b F^{(n)}Q$$

$$= [F^{(n-1)}Q]_a^b - \int_a^b F^{(n-1)}Q^{(1)}$$

$$= [F^{(n-1)}Q]_a^b - \left([F^{(n-2)}Q^{(1)}]_a^b - \int_a^b F^{(n-2)}Q^{(2)}\right)$$

$$= [F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)}]_a^b + \int_a^b F^{(n-2)}Q^{(2)})$$

$$= [F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)}]_a^b + \left([F^{(n-3)}Q^{(2)}]_a^b - \int_a^b F^{(n-3)}Q^{(3)}\right)$$

$= [F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)} + F^{(n-3)}Q^{(2)}]_a^b - \int_a^b F^{(n-3)}Q^{(3)}$

$= [F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)} + F^{(n-3)}Q^{(2)}]_a^b - ([F^{(n-4)}Q^{(3)}]_a^b - \int_a^b F^{(n-4)}$

$Q^{(4)})$

$= [F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)} + F^{(n-3)}Q^{(2)} - F^{(n-4)}Q^{(3)}]_a^b + \int_a^b F^{(n-4)}Q^{(4)}$

$= \Big[F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)} + F^{(n-3)}Q^{(2)} + \cdots + (-1)^{k-1}F^{(n-k)}Q^{(k-1)}\Big]_a^b +$

$(-1)^k \int_a^b F^{(n-k)}Q^{(k)}$

$k = n$ のとき $Q^{(k)} = Q^{(n)} = 0$, $F^{(0)} = (x-a)^n(x-b)^n$

$= \Big[F^{(n-1)}Q - F^{(n-2)}Q^{(1)} + F^{(n-3)}Q^{(2)} + \cdots + (-1)^{n-1}F^{(0)}Q^{(n-1)}\Big]_a^b$

$F^{(0)}(x) = (x-a)^n(x-b)^n$

$F^{(1)}(x) = n(x-a)^{n-1}(x-b)^n + n(x-a)^n(x-b)^{n-1}$

$= (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1} \{ n(x-b) + n(x-a) \}$

$= (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1} (2nx - bn - an)$

$= (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1} (Ax + B)$

$F^{(2)}(x) = ((x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1})' (Ax+B) + A(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$

$= (x-a)^{n-2}(x-b)^{n-2}(Cx+D) + A(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$

$= (x-a)^{n-2}(x-b)^{n-2} \{Cx + D + A(x-a)(x-b)\}$

$= (x-a)^{n-2}(x-b)^{n-2} (Ex^2 + Gx + H)$

$F^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k}(x-b)^{n-k} R(x)$ （ $R(x)$ は k 次式 ）

となることが予想できる。

$F^{(k+1)}(x) = ((x-a)^{n-k}(x-b)^{n-k})' R(x) + (x-a)^{n-k}(x-b)^{n-k}R^{(1)}(x)$

$= (x-a)^{n-(k+1)}(x-b)^{n-(k+1)}(Ix+J)R(x) + (x-a)^{n-k}(x-b)^{n-k}R^{(1)}(x)$

$= (x-a)^{n-(k+1)}(x-b)^{n-(k+1)}\{(Ix+J)R(x) + (x-a)(x-b)R^{(1)}(x)\}$

{ } の中は $k+1$ 次式なので帰納法によって

$F^{(k)}(x) = (x-a)^{n-k}(x-b)^{n-k} R(x)$ （ $R(x)$ は k 次式 ）

となることが証明できた。

したがって $k = 0$, 1 , 2 , ･･･ , $n-1$

$F^{(k)}(a) = F^{(k)}(b) = 0$

となる。

$P_n(x)$ は $2n$ 次式を n 回微分して得られる関数なので n 次式である。

また、$P_n^*(x)$ も同様に n 次式なので c 倍して n 次の項の係数をそろえれべ $Q(x) = P_n(x) - cP_n^*(x)$ が（$n-1$）次以下とすることができる。

$\int_a^b Q^2 = 0$ （ $Q(x)$ は整式であって連続であり、$Q^2 \geqq 0$ ）

したがって P.242 定理２(c）の証明にあるように、$Q^2(x_0) > 0$ となる $x_0 \in [a , b]$ が１点でもあれば $\int_a^b Q^2 > 0$ となるので恒等的に $Q = 0$ 以外にない。

（Ｐ. 299　関数列あるいは関数級数の収束）

(f_n) が E における関数列ならば、E の各点 x に対して $(f_n(x))$ は実数列である。例えば $x_0 \in E$ に対し

$f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, $f_3(x_0)$, ･･･

おのおのの $x \in E$ に対し、この数列 $(f_n(x))$ が収束するならば、

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

が確定する。つまり、E の各点 x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を対応させれば E から R への関数が定義できることになる。この関数を f とすれば関数列 (f_n) は E で関数 f に収束するといい、f を極限関数という。

ここで注意しなければならないことは f が定義できるというだけであって、具体的に初等関数や無理関数で表すことができるかは別である。ただ定義できるのでそれを f と呼ぶだけである。

関数級数 $\sum f_n$ が s に収束するとは、E の各点 x に対して級数の部分和

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

は実数列になる。例えば $x_0 \in E$ に対し

$s_0(x_0) = f_0(x_0)$, $s_1(x_0) = f_0(x_0) + f_1(x_0)$, $s_2(x_0) = f_0(x_0) + f_1(x_0) + f_2(x_0)$, $\cdots$

おのおのの $x \in E$ に対し、この数列（$s_n(x)$）が収束するならば、

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$$

が確定する。つまり、E の各点 x に対して $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ を対応させれば E から R への関数が定義できることになる。この関数を s とすれば関数列（s_n）は E で関数 s に収束するという。

（Ｐ．301　例２）

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 + \frac{x^2}{(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$$(1+x^2)s_n(x) = x^2(1+x^2) + x^2 + \frac{x^2}{(1+x^2)} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$(1+x^2)s_n(x) - s_n(x) = x^2(1+x^2) - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$$s_n(x) = (1+x^2) - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$x \neq 0$ ならば　$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1 + x^2$

$x = 0$ ならば　$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$

（Ｐ．301　例３）

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} (\cos n!\,\pi x)^{2m}$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ はディリクレ関数になる。

（Ｐ．302　例５）

（ P. 170 問１ ）

$0 < r < 1$ とすれば、任意のαに対して $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} r^{n} = 0$ を証明せよ。

(証明) $a = \dfrac{1}{r}$ とおけば $a > 1$ である。よって n のかわりに連続的変数 x に対し

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^{x}} = 0$$

を証明すればよい。$y = x \log a$ とすれば $y = \log a^{x} \to e^{y} = a^{x}$

$$x = \frac{y}{\log a} \to x^{\alpha} = \left(\frac{1}{\log a}\right)^{\alpha} y^{\alpha}$$

$x \to +\infty$ ならば $y \to +\infty$ なので、P. 167 定理２から

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^{x}} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{\log a}\right)^{\alpha} \frac{y^{\alpha}}{e^{y}} = 0$$

さて $0 \leqq x < 1$ のとき $0 < (1-x^2) \leqq 1$ で $f_n(1) = 0$

$0 < (1-x^2) < 1$ は上の問から

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2 x(1-x^2)^n \leqq \lim_{n\to\infty} n^2(1-x^2)^n = 0$$

$$t = 1-x^2 \to \frac{dt}{dx} = -2x \to dx = -\frac{dt}{2x}$$

$$\int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 n^2 t^n dt = \frac{n^2}{2}\int_0^1 t^n dt = \frac{n^2}{2}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)}$$

（Ｐ．303　一様収束）

E における関数列 (f_n) が関数 f に収束するとは、正確には次のように述べられる。

任意の $\varepsilon > 0$ および任意の $x \in E$ に対し、適当に自然数 N をとれば $n \geqq N$ であるすべての自然数 n に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成立つ。
この場合 N はεと x に依存して定まる。つまり $N=N(x,\varepsilon)$ と考えてよい。ここでεを固定し x ごとに決る最小の自然数 N の集合を A とする。A が上に有界だったとしたら $sup\ A$ が存在するはずである。それを N とすれば、$n \geqq N$ なるすべての自然数 n およびすべての $x \in E$ に対して

$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

とすることができるはずである。

このような N がとれるとき、(f_n) は E において関数 f に一様収束するという。つまり (f_n) が収束するという前提において、A が上に有界であるかどうかが決め手となるわけである。

一様収束するとすれば次のこともいえる。

$N=N(\varepsilon)$ としたとき、$\varepsilon>\varepsilon'$ に対して $N(\varepsilon) \leqq N(\varepsilon')$

（P．305　$|f_m(x)-f(x)| < \varepsilon$）

$|f_m(x)-f(x)| < \varepsilon \rightarrow |f_m(x)-f(x)| \leqq \varepsilon$

のはずである。（解析入門 小平邦彦 著　岩波書店　参照）
これは、εを定めたら $\varepsilon>\varepsilon'$ としておいて ε' に対しての N で証明を進めておけば

$|f_m(x)-f(x)| \leqq \varepsilon'<\varepsilon$

とすることができるというわけである。

（P．305　コーシーの条件について）

コーシー列の定義は、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある自然数 N が存在して $m \geqq N$，$n \geqq N$ を満たすすべての自然数 m，n について

$|a_m-a_n| < \varepsilon$

が成り立つことをいう。

この定義を級数に置きかえると、$s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ として、$m \geqq n \geqq N$ を

満たす任意の自然数 m ， n について

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

が成り立つことであるとしている。

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

（s_n）は収束するのであるから、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある N_0 が存在して m ， $n \geqq N_0$ であれば $|s_m - s_n| < \varepsilon$ とすることができるわけである。そこで、$N = N_0+1$ とすれば $N > N_0$ なので、m ， $n \geqq N$ ならば m ， $n-1 \geqq N_0$ である。したがって m ， $n \geqq N$ ならば

$$|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$$

つまり

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

とすることができる。

N_0 は存在するはずなので $N = N_0+1$ も存在する。そのように考えての上で $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ としている。

逆に自然数 N が存在して $m \geqq n \geqq N$ ならば

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

であれば、$|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$ だから $N_0 = N-1$ とすれば $m \geqq n \geqq N_0$ ならば $m \geqq n-1 \geqq N$ となり

$$\left|\sum_{k=n-1}^{m} a_k\right| < \varepsilon \rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon$$

とすることができる。

m ， n の大小については $m \leqq n$ であっても絶対値をとっているので問題ない。$m \geqq N$ ， $n \geqq N$ でもよい。

（Ｐ.306　定理３）

I は区間であるので［a ， b］，（a ， b］，［a ， b），（a ， b）のいずれ

かと考えてよい。x_0 を I の１つの点（ I の端点でもよい ）ということは、$a \notin (a\ ,\ b]$ なので $[a\ ,\ b]$ か $[a\ ,\ b)$ のどちらかである。つまり端点 a の場合、$E = (a\ ,\ b]$ か $(a\ ,\ b)$ となる。

(A_n) がコーシー列であることは
$\varepsilon > \varepsilon'$ に対して N を定めておけば $|A_m - A_n| \leqq \varepsilon' < \varepsilon$
という意味である。

ε に対して n が決まり、その n に対して δ が決るのであるから、結果として、ε に対して δ が決まり、$|x - x_0| < \delta,\ x \in E$ のとき
$|f(x) - A| < \varepsilon$ となるので、$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

（Ｐ. 307　定理４）

定理３では f_n , f は x_0 で定義されてなくてもよかったが、定理４では定義されている。したがって $f(x_0)$ は存在する。しかし、$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ かもしれない。

定理３では、有限の極限 $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ が存在するという仮定が必要だったが、この定理では f_n が x_0 で連続であるので $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ となり、存在が保証されている。したがって

$$\lim_{n \to \infty}\left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

定理３から　$\lim_{n \to \infty}\left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right)$ だったので

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) = f(x_0)$ となる。

（Ｐ. 308　定理５）

$|f_n(x) - f(x)| \leqq \eta \ \rightarrow\ |f(x)| \leqq |f_n(x)| + \eta$ について

一般に $|a| - |b| \leqq |a + b|$ なので $b = -b$ とすれば
$|a| - |-b| = |a| - |b| \leqq |a - b|$

$|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f_n(x)|$ から
$|f(x)| - |f_n(x)| \leqq |f(x) - f_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leqq \eta$

$|f(x)| \leqq |f_n(x)| + \eta$

$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqq \varepsilon$ については

$\varepsilon > \varepsilon'$ について N を定めれば $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqq \varepsilon' < \varepsilon$ とできる。

（Ｐ.309　定理６）

① 関数 $f_m - f_n$ に平均値の定理を適用すれば、任意の x ，$y \in [a, b]$ に対して

$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(y) - f_n(y)) = (f_m'(s) - f_n'(s))(x - y)$

s は x と y の間の点としている。
ここで注意しなくてはならないことは $x \leqq y$ なのか $x \geqq y$ またどちらでもよいかということである。上の等式は $x \geqq y$ として平均値の定理を使っている。$x \leqq y$ ならば次のようになる。

$(f_m(y) - f_n(y)) - (f_m(x) - f_n(x)) = (f_m'(s) - f_n'(s))(y - x)$

しかし両辺を（-1）倍すると上の式と一致するので、つまりここではどちらでもよいことになる。ただし、s は x と y の間の点である。
このあと y として x^* をとるわけだが $x \leqq x^*$ であっても $x \geqq x^*$ であっても問題ないことになる。

$[a, b]$ から x_0 をとり除いた集合を E としているので $x \in E$ ならば $|x - x_0| > 0$ である。
また①の等式は x と x_0 の大小関係に関係なく成り立つので

$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0)) = (f_m'(s) - f_n'(s))(x - x_0)$

から

$(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0)) = (f_m'(s) - f_n'(s))(x - x_0)$

$$\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_m'(s) - f_n'(s)$$

$\phi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$　とすれば

$f_n(x)$ は［a，b］で微分可能であるから $\phi_n(x)$ は x_0 で微分可能である。よって

$$\lim_{x \to x_0} \phi_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_n'(x_0)$$

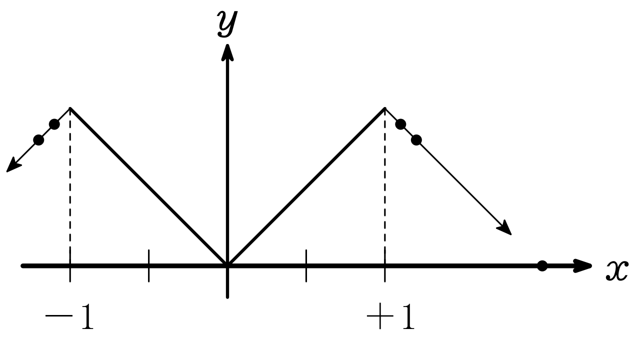
そして定理３から

$\lim_{n \to \infty} f_n'(x_0)$ が存在し、$\lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \phi(x)$ となる。

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0)$$

つまり、$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ が存在するので、f は x_0 で微分可能であることになる。

（P．312　定理７）



① 区間［−1，1］で $\phi(x) = |x|$ であり、$\phi(x+2) = \phi(x)$ であるから

$x = 1.1$ ならば

$\phi(1.1) = \phi(-0.9) = 0.9$　　$\phi(-1.1) = \phi(0.9) = 0.9$

$\phi(1.2) = \phi(-0.8) = 0.8$　　$\phi(-1.2) = \phi(0.8) = 0.8$

$\phi(2) = \phi(0) = 0$

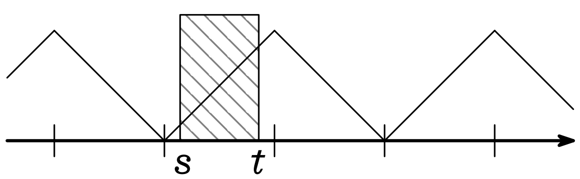
$s - t = 2k$（$k \in Z$）ならば

$\phi(x) = \phi(x+2) = \phi(x+2+2) = \phi(x+2k)$ から

$\phi(s) = \phi(t+2k) = \phi(t)$

また s，t の間に整数が存在しなければ右図のように

$|\phi(s) - \phi(t)| = |s - t|$



である。

② $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$

と定義すると、R において任意の $x \in R$ に対して

$|(\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)| \leqq (\frac{3}{4})^n$　（ $0 \leqq \phi(x) \leqq 1$ ）

であり、$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n$ は収束するので、定理２から R で一様収束する。

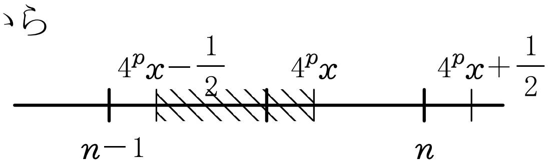
③ x を任意の固定された１点とする。任意に与えられた正の整数 p に対して $h_p = \pm\frac{1}{2 \cdot 4^p}$ とすれば $4^p(x+h_p)$ と $4^p x$ の間に整数がないようにすることができる。

（理由）

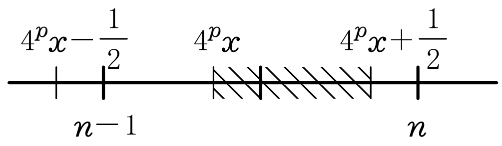
$4^p x$ が整数ならば、 $4^p x = n$ （ $n \in Z$ ）と書くことができる。そのとき $4^p x + h_p = n \pm \frac{1}{2}$ なので［$n-\frac{1}{2}$ ，n］、［n ，$n+\frac{1}{2}$］どちらであっても間に整数はない。

$4^p x$ が整数でなければ、$n-1 < 4^p x < n$ となる整数 n が存在する。

そのとき $4^p(x+h_p) = 4^p x \pm \frac{1}{2}$ であるから



$n < 4^p x + \frac{1}{2}$ ならば $n-1 < 4^p x - \frac{1}{2}$ なので $4^p x - \frac{1}{2}$ と $4^p x$ の間に整数はない。



$4^p x + \frac{1}{2} < n$ ならば $4^p x$ と $4^p x + \frac{1}{2}$ の間に整数はない。

しかし p によっては $\pm h_p$ のどちらかを選択しなければならないことを忘れてはいけない。

④ $\sum_{n=0}^{p} (\frac{3}{4})^n \gamma_n = (\frac{3}{4})^p \gamma_p + \sum_{n=0}^{p-1} (\frac{3}{4})^n \gamma_n$ とするかであるが、このまま

絶対値をかけると

$$\left|\frac{f(x+h_p)-f(x)}{h_p}\right| \leqq \sum_{n=0}^{p} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\gamma_n|$$

となってしまい、発散することを示すことができない。不等号の向きを逆にするための工夫である。

⑤ $0 \leqq n \leqq p$ なる n に対しては $4^n(x+h_p)$ と $4^n x$ の間には整数は存在しない。

（理由）

$$4^n(x+h_p) = 4^n x \pm \frac{1}{2\cdot 4^{p-n}} \quad (\ 0 \leqq n \leqq p\ )$$

$n = p$ ならば $\pm h_p$ のどちらかを選択して $4^p(x+h_p)$ と $4^p x$ の間に整数は存在しない。

$n < p$ の場合は $p-n = m$ として、もし $4^n(x+h_p)$ と $4^n x$ の間に整数が存在するとしたならば

$4^n x < k < 4^n(x+h_p)$ であるか $4^n(x+h_p) < k < 4^n x$ のどちらかとなるような整数 k が存在することになる。前者だとしたら

$4^m \times 4^n x < 4^m \times k < 4^m \times 4^n(x+h_p)$

$4^p x < 4^m \times k < 4^p(x+h_p)$

となり、$4^m \times k$ は整数なので矛盾する。後者の場合も同様である。
したがって整数は存在しない。

⑥ $s = \sum_{n=0}^{p-1} 3^n = 1+3+3^2+\cdots+3^{p-1}$, $3s = 3+3^2+3^3+\cdots+3^p$

$2s = 3^p-1 \quad \rightarrow s = \dfrac{3^p-1}{2} < \dfrac{3^p}{2}$

⑦ 最後の h_p は p によって符号が決るので p を大きくするたびに符号は正になったり負になったりするが、微分可能であるかの h_p にはそのような制限はない。したがって、制限のある $h_p \rightarrow 0$ に対し発散するということは微分可能ではないことを意味する。

（Ｐ. 315　上極限）解析入門Ｉ　杉浦光夫 著　東大出版　参照

実数列 $(a_n)_{n\in N}$ に対し、$A_n = \{a_m \mid m \geqq n\}$, $\ell_n = sup\ A_n \in \overline{R}$ と置けば $A_0 \supset A_1 \supset \cdots$ となるので、$(\ell_n)_{n\in N}$ は単調減少列であるから $\lim_{n\to\infty} \ell_n$ が存在し $inf\{\ell_n \mid n\in N\}$ に等しい。

$\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n = \lim_{n\to\infty} sup\{a_m \mid m\geqq n\} = inf\{\ell_n \mid n\in N\}$

$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$ ならば、次のｉ）、ⅱ）が成り立つ。

ｉ）$\ell < x$ となる任意の $x \in \overline{R}$ を定めたとき、十分大きなすべての $n \in N$ に対し $a_n < x$ となる。

ⅱ）$y < \ell$ となる任意の $y \in \overline{R}$ に対し、$y < a_n$ となる $n \in N$ は無限に存在する。

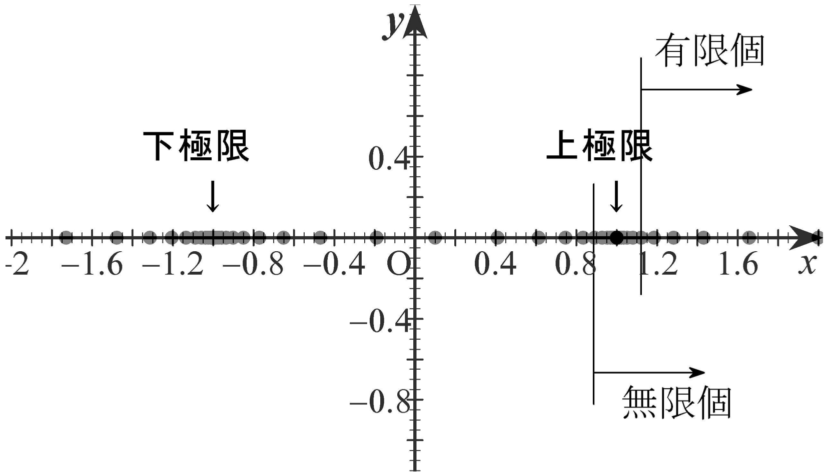
（証明）ｉ）

$\ell < x$ ならば $\ell = inf\{\ell_n \mid n\in N\}$ なので、下限の定義から $\ell_{n_0} < x$ が存在する。そのとき $\ell_{n_0} = sup\{a_m \mid m\geqq n_0\}$ から $n \geqq n_0$ に対し $a_n \leqq \ell_{n_0} < x$ である。また、$\ell = +\infty$ の場合は $\ell < x$ となる $x \in \overline{R}$ はないので考える必要はない。

ⅱ）

$y < \ell$ ならば、すべての $n\in N$ に対し、$y < \ell \leqq \ell_n = sup\{a_m|m\geqq n\}$ であるから ℓ_n は上限であり性質ⅱ)より、集合 $\{a_m|m\geqq n\}$ の なかで、$y < a_{m_n} \leqq \ell_n$ となる a_{m_n} $(m_n \geqq n)$ が一つは存在する。ここで、n は任意であるから、n を 0 から順に増やしていけば、$n = 0$ のとき一つ以上存在し、$n = 1$ のときも一つ以上存在し、そのつど一つ以上存在するのであるから、たまたま一つの a_k が続くことがあるかもしれないが $n = k+1$ になった段階で a_k は選ばれないので永遠に続くことはない。したがって $y < a_m$ となる $m \in N$ は無限にある。($a_{m_n} = a_{m_{n'}}$ であっても、$m_n \neq m_{n'}$ であればよい。)

イメージ的には→



（注意）

(1.5) $a \geqq 0$ が任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon > a$ をみたすならば $a = 0$ である。

（証）$a > 0$ ならば $a > c > 0$ なる c が存在する。$a \geqq \varepsilon > c$ なる ε をとることができるが $\varepsilon > a$ なので $\varepsilon \leqq a < \varepsilon$ これは矛盾する。

（解析入門Ｉ　杉浦光夫 著　東大出版　参照）

この命題を

「$a \geqq 0$ が任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon \geqq a$ をみたすならば $a = 0$ である。」

としたらどうだろうか。

$a > 0$ ならば $a > c > 0$ なる c が存在する。当然 $a \geqq \varepsilon > c$ なる ε をとることができるが $\varepsilon \geqq a$ なので $\varepsilon \leqq a \leqq \varepsilon$ これは $a = \varepsilon$ のときのみ矛盾しない。つまり、$\varepsilon = a$ でもかまわないので ε は正数であることから a も正数となって $a = 0$ と言い切れない。

（$\varepsilon - \delta$ 論法で注意しなければならないこと）

（例）(f_n) が E において f に一様収束するとは、次のように定義している。

任意の $\varepsilon > 0$ および任意の $x \in E$ に対し、適当に自然数 N をとれば、$n \geqq N$ であるすべての自然数 n およびすべての $x \in E$ に対して

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

が成り立つ。

これを $|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$ で済ませてはいけない。$<$ であることを明確にしなければ証明できたことにならない。

（P．317　定理３）

数列（$\sqrt[n]{a_n}$）を考えたとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqq \rho$ なので収束する部分列極限も

ρ 以下である。$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$ の意味は最大の部分列極限なので

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leqq \rho$

となる。

r，$\ell \geqq 0$ が任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $r \leqq \ell + \varepsilon$ ならば $r \leqq \ell$ である。

（証）もし $r > \ell$ ならば $r-\ell > 0$ なので $r-\ell > \varepsilon > 0$ となる ε が存在する。このとき $r > \ell+\varepsilon$ は $r \leqq \ell+\varepsilon$ に反する。よって $r \leqq \ell$

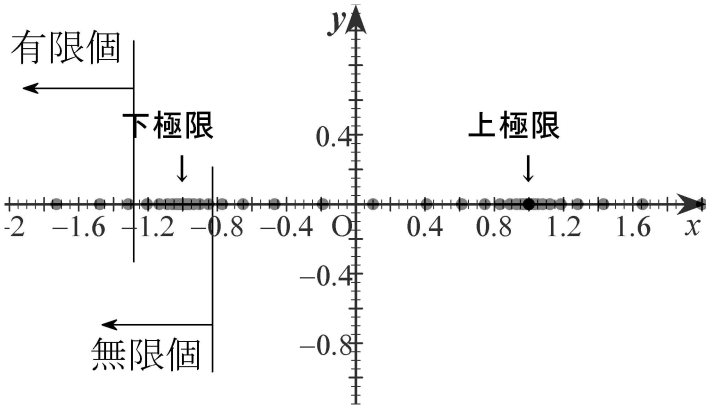
そこで $\beta < \rho$ である任意の ρ を $\beta+\varepsilon$（$\varepsilon > 0$）とおけば

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leqq \beta+\varepsilon$ が任意の ε に対して成り立つので上の命題から

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leqq \beta$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{a_n}}$$

（証明）



$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta$

とおく。$\beta = 0$ の場合は証明することは何もないから、$\beta > 0$ とする。

$\rho < \beta$ なる実数 ρ をとれば

ある N が存在して、$n \geqq N$ ならば $0 < \rho \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

が成り立つ。よって

$\rho a_N \leqq a_{N+1}$，

$\rho^2 a_N \leqq \rho a_{N+1} \leqq a_{N+2}$

一般に $n \geqq N$ ならば $\rho^{n-N} a_N \leqq a_n$ となる。

$$a_N \frac{\rho^n}{\rho^N} \leqq a_n \quad \to \quad \rho \sqrt[n]{\frac{a_N}{\rho^N}} \leqq \sqrt[n]{a_n}$$

$\dfrac{a_N}{\rho^N}$ は定数であるから、$n\to\infty$ のとき左辺は ρ に収束する。

数列 $(\sqrt[n]{a_n})$ を考えたとき $\rho \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ なので収束する部分列極限も ρ 以上である。$\lim_{n\to\infty} inf \sqrt[n]{a_n}$ の意味は最小の部分列極限なので

$$\rho \leqq \lim_{n\to\infty} inf \sqrt[n]{a_n}$$

となる。$0 < \rho < \beta$ だったので

$\rho = \beta - \varepsilon$ （$\varepsilon > 0$）とおけば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\beta - \varepsilon \leqq \lim_{n\to\infty} inf \sqrt[n]{a_n}$$

r , $\ell \geqq 0$ が任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $r - \varepsilon \leqq \ell$ ならば $r \leqq \ell$ である。 $r \leqq \ell + \varepsilon$

であるから $\beta \leqq \lim_{n\to\infty} inf \sqrt[n]{a_n}$ である。よって

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \lim_{n\to\infty} inf \sqrt[n]{a_n}$$

（P.320　定理５）

P.66 例４から $\sqrt[n]{n} \geqq 1$ であるから $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \sqrt[n]{n} \times \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n|a_n|}$

$$\lim_{n\to\infty} sup\ a_n = \lim_{n\to\infty} sup\{a_m \mid m \geqq n\}$$

$a_n \leqq b_n$ （$n \geqq 1$）ならば $sup\{a_m \mid m\geqq n\} \leqq sup\{b_m \mid m\geqq n\}$

よって $\lim_{n\to\infty} sup\ a_n \leqq \lim_{n\to\infty} sup\ b_n$

以上により

$\alpha \leqq \alpha_1$

またほとんどすべての n に対して $\sqrt[n]{n|a_n|} \leqq \alpha'$ だから

$$\alpha_1 = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{n|a_n|} \leqq \alpha'$$

これが $\alpha < \alpha'$ なる任意の α' について成り立つので

$\alpha' = \alpha + \varepsilon$ （$\varepsilon > 0$）とすれば $\alpha_1 \leqq \alpha + \varepsilon$ なので $\alpha_1 \leqq \alpha$

ゆえに $\alpha_1 = \alpha$

９． １節の定理６の系により

(f_n) は $(a_n x^n)$ なので $0 < R' < R$ とすれば $|x| \leqq R'$ で微分可能

1°） $|x| \leqq R' < R$ なので級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する。

2°） 定理４から $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ は $|x| \leqq R'$ で一様収束する。

よって $|x| \leqq R'$ で $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は微分可能であって

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

である。

つづきは $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ と定義し直せば上の証明を繰り返すだけである。

（Ｐ．322　系１）

定理５の

$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

$= k(k-1)\cdots(k-k+1) a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

したがって $f^{(k)}(0) = k! a_k$

（Ｐ．322　系３）

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径を L とすれば、定理５の証明から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径も L である。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ であるが、a_0 の存在は収束に関係しないので、仮定から $L = R$ となる。

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ としたとき、定理５から

$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$

よってP. 136 系から原始関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

となる。

（P．323　定理６）

$$s_0 + (s_1 - s_0)x + (s_2 - s_1)x^2 + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-2})x^{n-1} + (s_n - s_{n-1})x^n$$

$$= (s_0 + s_1 x + \cdots s_{n-1} x^{n-1}) + s_n x^n - (s_0 + s_1 x + \cdots + s_{n-1} x^{n-1})x$$

$$= (s_0 + s_1 x + \cdots s_{n-1} x^{n-1})(1-x) + s_n x^n$$

$\ell_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ とすれば

$\ell_n x = x + x^2 + \cdots + x^{n+1}$

$\ell_n (x-1) = x^{n+1} - 1 \quad \to \quad \ell_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

$|x| < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \to |\sum_{n=0}^{\infty} x^n| = |\frac{1}{1-x}|$

$x \to 1$ なのであるから $0 < x < 1$ としてよい。

よって、$|1-x| = 1-x$ ， $|x|^n = |x|^n = x^n$

$$|\sum_{n=0}^{\infty} x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \to |\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leqq \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) - s = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s)x^n$$

また、$|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ならば

$$|f(x) - s| = |(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s)x^n|$$

$$\leqq |(1-x)\sum_{n=0}^{N}(s_n - s)x^n| + |(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}(s_n - s)x^n|$$

$$\leqq |(1-x)|\sum_{n=0}^{N}|s_n - s||x|^n + |(1-x)|\sum_{n=N+1}^{\infty}|s_n - s||x|^n$$

$$< |(1-x)|\sum_{n=0}^{N}|s_n - s| + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)|\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n|$$

$$\leqq |(1-x)|\sum_{n=0}^{N}|s_n - s||x|^n + \frac{\varepsilon}{2}$$

（Ｐ．324　注意）

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R だとしたら、ある点 x_0 で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束したとしたならば $|x_0| \leqq R$ である。なぜなら $|x_0| > R$ としたならば定理４に反するからである。したがって $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するということは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n$ なので、収束半径 R は $1 \leqq R$ である。

よって、$R = 1$ ならば定理６の結果であり、$1 < R$ ならば定理４から一様収束するので連続となる。

この注意は前ページに「簡単のため $R = 1$ として・・・」があるため誤解しやすい。

詳しい証明は解析入門Ｉ P.379(杉浦光夫 著 東大出版)を参照せよ。

（Ｐ．324　$sin\ x$ の収束半径）

$$sin\ x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

よりも

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

の方がわかりやすい。この本は少し不親切である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!}\omega + \frac{1}{5!}\omega^2 + \cdots$$

という級数の収束半径を調べると、P.319 系から

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

したがって収束半径は ∞ である。$\omega = x^2$ と置きかえても $|x| < \infty$ で収束することになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)$$

と書くことができるので、( ) の中が $|x|<\infty$ で収束することから

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ が $|x|<\infty$ で収束することがわかる。よって

収束半径は $+\infty$ である。

$$sin\ x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad(|x|<+\infty)$$

は幾何学的な定義から始まった結果であるが、この級数を $sin\ x$ の定義としてはじめても同様な結果を得ることができる。（解析入門Ｉ　参照）

（Ｐ. 325　例１）

$s_n=1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^nt^n$ とすれば

$ts_n=t-t^2+t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^n+(-1)^nt^{n+1}$

$s_n(1+t)=1+(-1)^nt^{n+1}\rightarrow s_n=\dfrac{1+(-1)^nt^{n+1}}{1+t}$

よって $|t|<1$ で $n\rightarrow\infty$ とすれば $s_n\rightarrow\dfrac{1}{1+t}$

定理５の系３から

$$\ell og(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots+C$$

$$[\ell og(1+t)]_0^x=\ell og(1+x)=\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots+C\right]_0^x$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad(|x|<1)$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad(|x|<1)$$

は $x=1$ のとき P. 88 定理９（交代級数）から収束する。したがって

$\ell og(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$ としたとき、定理６から

$$\lim_{x\to1}\ell og(1+x)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

ところが $\ell og(1+x)$ は $x=1$ で連続なので $\lim_{x\to1} \ell og(1+x)=\ell og\ 2$

となり

$$\ell og\ 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

ここでの読み取りは難しい。

$\ell og\ x$ の定義は P.156 にあるように定義されている。また微分可能であることから連続である。また合成関数である $\ell og(1+x)$ も連続であることから $\lim_{x\to1} \ell og(1+x)=\ell og\ 2$ であるが、$\lim_{x\to1} \ell og(1+x)\neq\ell og\ 2$ ならば $-1<x<1$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ell og(1+x)$$

$x=1$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\lim_{x\to1}\ell og(1+x)$$

となってしまう。

（P．325　例２）

定理６を次のように変更する。

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を 1 であるとし、$|x|<1$ において

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする。また $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ が収束するとする。そのとき

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

が成り立つ。

（証）$|x|<1$ で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束するので $0<x<1$ において

$$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^n$$

である。そこで次のように関数を置き直してみると

$$g(x)=f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束するのであるから、定理６より

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f(-x) = \lim_{x\to -1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

が成り立つ。

$|x| < 1$ において

$$arctan\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

この級数は P. 88 定理９（交代級数）から $x = 1$ の場合

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

は収束する。また $x = -1$ の場合も

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots$$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots$ が収束するので収束する。

$arctan\ x$ は $x = \pm 1$ で連続(P. 112 定理２)であるから、定理６によってこの展開式は $x = \pm 1$ でも成り立つ。

（Ｐ．326　定理７　二項定理）

任意の実数 α と正の整数 n に対して

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{n} = 1$$

と定義する。

たとえば

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\times2\times1} = \frac{1}{16}$$

$|x| < 1$ において

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

とおけば

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} = \alpha \binom{\alpha-1}{0} + \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1}$$

$$= \alpha \binom{\alpha-1}{0} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n}$$

$$f'(x) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} = \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n}$$

となる。左の等式から

$$x f'(x) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n}$$

$$x f'(x) + f'(x) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n} + \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n}$$

$$= \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} \right\} x^{n}$$

ここで

$$\boxed{\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} = \binom{\alpha}{n}}$$

（証）

左辺を計算すると、定義から

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-(n-1)+1)}{(n-1)!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{n(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)+(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{n!}$$

$$= \frac{n(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)+(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}$$

$$= \frac{(n+\alpha-n)(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

END

$$x f'(x)+f'(x) = \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha + \alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n-1\right)$$

$$(1+x)f'(x) = \alpha + \alpha f(x) - \alpha = \alpha f(x)$$

そこで $\dfrac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ を微分すれば

$$\frac{f'(x)(1+x)^{\alpha}-\alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)^{\alpha-1}\{(1+x)f'(x)-\alpha f(x)\}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0$$

（Ｐ．328　一例）

$\sqrt{1+x}$ の二項展開式

$\alpha = \dfrac{1}{2}$ で区間（−１，１）で $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$ だから

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} \quad (n \geqq 1)$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}$$

よって

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n$$

$$= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1\cdot3}{8\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^5\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5-\cdots$$

$$\sqrt{1+0.5} = 1.22474487139159\cdots$$

$$1+\frac{1}{2}\times 0.5-\frac{1}{8}0.5^2+\frac{1\cdot 3}{8\cdot 6}0.5^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4}0.5^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}0.5^5-$$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^6\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}0.5^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^7\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}0.5^7-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{2^8\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}0.5^8$$

$= 1.22472989559174$

（P. 329　定理８）

$C_{2\times 3}-A_3B_3$

$= \Sigma' a_ib_j+\Sigma'' a_ib_j$

とすると

Σ' は

$0 \leqq i \leqq n-1$

$n+1 \leqq j \leqq 2n$

$i+j \leqq 2n$

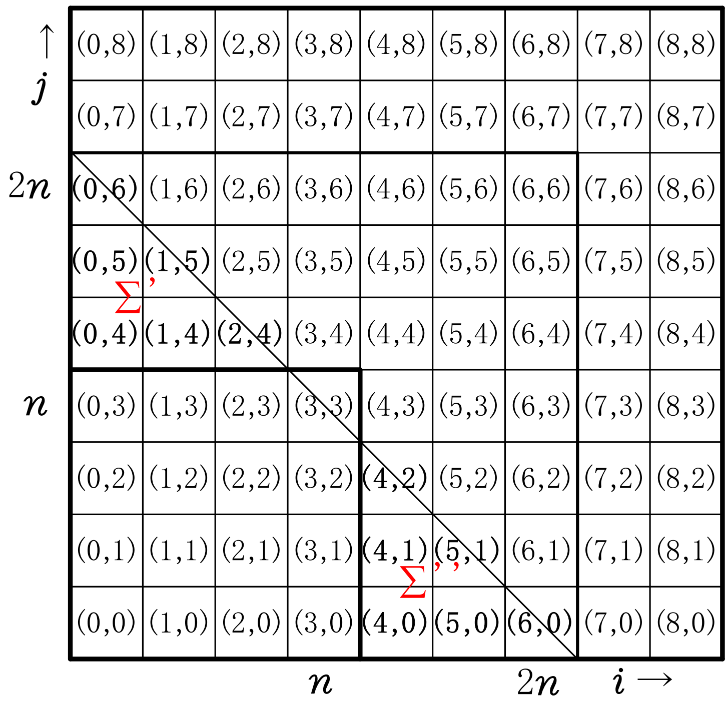
Σ'' は

$n+1 \leqq i \leqq 2n$

$0 \leqq j \leqq n-1$

$i+j \leqq 2n$

についての和である。



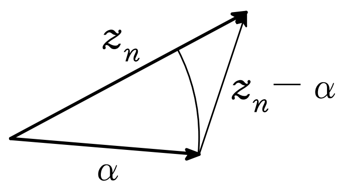
$n \geqq N$ ならば

$$|\Sigma' a_ib_j| \leqq \Sigma' |a_i||b_j| \leqq \left(\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\right)\left(\sum_{j=n+1}^{2n}|b_j|\right) < A^*\varepsilon$$

$$|\Sigma'' a_ib_j| \leqq \Sigma'' |a_i||b_j| \leqq \left(\sum_{i=n+1}^{2n}|a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}|b_j|\right) < B^*\varepsilon$$

（P. 334　(d)）

$||z_n|-|\alpha|| \leqq |z_n-\alpha| < \varepsilon$



（P. 340　(a)）

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}$ のコーシー積は

$$(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots)(1+\omega+\frac{1}{2}\omega^2++\frac{1}{3!}\omega^3+\frac{1}{4!}\omega^4+\cdots)$$
$$=1+z+\omega+\frac{1}{2}z^2++\frac{1}{2}\omega^2+z\omega+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{3!}\omega^3+\frac{1}{2}z^2\omega+\frac{1}{2}z\omega^2+\cdots$$
$$=1+(z+\omega)+\frac{1}{2}(z+\omega)^2+\frac{1}{3!}(z^3+3z^2\omega+3z\omega^2+\omega^3)+\cdots$$
$$=1+(z+\omega)+\frac{1}{2}(z+\omega)^2+\frac{1}{3!}(z+\omega)^3+\cdots$$

コーシー積

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\cdot(n-k)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{1}{n!}\binom{n}{k}=\frac{1}{k!(n-k)!}$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}z^k\omega^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\omega^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n!}(z+\omega)^n$$

（P．340　(c)）

$$e^h=1+h+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3!}h^3+\frac{1}{4!}h^4+\cdots$$
$$e^h-1=h+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3!}h^3+\frac{1}{4!}h^4+\cdots$$
$$\frac{e^h-1}{h}-1=(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{3!}h^2+\frac{1}{4!}h^3+\cdots)-1$$
$$=\frac{1}{2}h+\frac{1}{3!}h^2+\frac{1}{4!}h^3+\cdots\quad\to 0\ (h\to 0)$$

（P．341　$\cos\ z$）

$$1+\frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^4}{4!}+\cdots$$

$|z|^2=\omega$ とすれば $\omega\in\boldsymbol{R}$ であり

$$= 1+\frac{\omega}{2!}+\frac{\omega^2}{4!}+\frac{\omega^3}{6!}\cdots$$

$$a_n = \frac{\omega^n}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{\omega^{n+1}}{(2n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\omega}{(2n+1)(2n+2)} = 0 \quad \text{よって } R = +\infty$$

（Ｐ．341　定理２）

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

$z \in C$ であることに注意したい。したがって $x \in R$ であっても

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

（Ｐ．342　$\dfrac{d}{dz}(e^{iz})$）

複素関数での合成関数の微分はまだ論じられていないので ie^{iz} と簡単には言えない。

そこで P.340（c）にならって求めてみる。

$$e^{iz} = 1+\frac{iz}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\cdots$$

$h \neq 0$ とすれば

$$\frac{e^{i(z+h)}-e^{iz}}{h} = e^{iz} \cdot \frac{e^{ih}-1}{h}$$

$$\frac{e^{ih}-1}{h} = \frac{i}{1!}+\frac{(i)^2h}{2!}+\frac{(i)^3h^2}{3!}+\frac{(i)^4h^3}{4!}+\frac{(i)^5h^4}{5!}+\cdots$$

ゆえに

$$\frac{e^{ih}-1}{h}-i = \frac{(i)^2h}{2!}+\frac{(i)^3h^2}{3!}+\frac{(i)^4h^3}{4!}+\frac{(i)^5h^4}{5!}+\cdots$$

$\dfrac{e^{ih}-1}{h} \to i$　$(h\to 0)$ だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{i(z+h)}-e^{iz}}{h} = ie^{iz}$$

（P．345　定理４）

P. 310 定理６の証明では平均値の定理を使っている。しかし、平均値の定理は実変数関数に適用するものであって、ここでは使えない。つまりそれを根拠とする P. 320 定理５の証明は完成させることができない。

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

（証）$n = 1$，2 のときは明らかになり立つ。$n = k$ で成り立つとして $n = k+1$ で成り立つことを証明する。

$$\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b} = \frac{a^{k+1}-a^kb+a^kb-b^{k+1}}{a-b} = \frac{a^k(a-b)+b(a^k-b^k)}{a-b}$$

$$= a^k+b(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

$$= a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+a^{k-3}b^3+\cdots+ab^{k-1}+b^k$$

（証）ここでは解析入門 I（杉浦）を採用する。$D = D(0, R)$ とする。

$|z| < R$ となる z を任意に一つとって固定し、$|z| < r < R$ となる r をとる。

いま $|h| < R-r$ ならば $|z+h| \leqq |z|+|h| \leqq r+R-r = R$ だから $z+h \in D$ で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が定義される。

そこで $|h| < R-r$ で定義された関数 $\phi(h)$ を

$$\phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n-z^n}{h} & (h\neq 0) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} & (h=0) \end{cases}$$

によって定義する。上の公式から $h\neq 0$ ならば

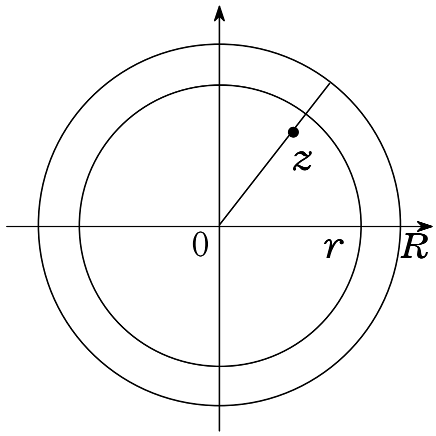
$$\frac{(z+h)^n-z^n}{h}$$

$$= \{(z+h)^{n-1}+(z+h)^{n-2}z+\cdots+(z+h)z^{n-2}+z^{n-1}\} \quad (n\geqq 1)$$

$$\phi(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\{(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + (z+h)z^{n-2} + z^{n-1}\} \cdots ①$$

が成り立つ。いま $|h| < r - |z|$ ならば

$$|z+h| \leqq |z| + |h| < R + r - R = r$$



だから

$$|①\text{の第 } n \text{ 項}| \leqq n|a_n|r^{n-1}$$

が成り立つ。

$\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^n$ の収束半径は R だったので

$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ は収束する。したがって複素変数で

あっても①の右辺は $|h| < r - |z|$ なる h に関して一様収束する。

つまり $\phi(h)$ は $|h| < r - |z|$ で連続である。特に

$$\lim_{h \neq 0, h \to 0} \phi(h) = \phi(0)$$

となる。これは

$$\lim_{h \neq 0, h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$$

を意味する。すなわち f は z で複素微分可能で $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ となる。

(P. 306 定理３再考)

I を１つの区間とし、x_0 を I の１つの点（I の端点でもよい）、I から x_0 を除いた集合を E とする。(f_n) を E で定義された関数列とし、(f_n) は E において極限関数 f に一様収束するとする。また、$n = 1, 2, \cdots$ について、有限の極限

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$$

が存在するとする。そのとき、数列（A_n）は収束し、次のようになる。

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} A_n$$

ここで極限関数 f とは、各点収束するという条件で（f_n）からつくり出された関数である。

（P. 351　定理３）

$\alpha^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+2\alpha\beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\beta^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \geqq 0$

$\alpha=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}),\ \beta=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ とおけば

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \geqq 0$

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \geqq 0$

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})^2 > 0$ なので

$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \geqq 0$

（P. 357　凸集合）

$\boldsymbol{z}=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{z}-\boldsymbol{a}=(1-t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{a}t-\boldsymbol{a}$

$=(1-t)\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(1-t)+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a})$

$=(1-t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a})$

（P. 360　定理７）

$S^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

$(n=2)$

$S^2=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-(a_1^2b_1^2+2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_2^2)$

$=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$(n=3)$

$S^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2$

$-(a_1^2b_1^2+2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_2^2+2a_1a_3b_1b_3+2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_3^2)$

$= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - (2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3)$

$= a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_3^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2) - (a_1b_3 - a_3b_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)$

ベクトル積

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\ a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ a_3b_1 - a_1b_3\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1\ )$

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)b_3$

$= 0$

（Ｐ. 364　問題１０）

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \to (\ a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ a_3b_1 - a_1b_3\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1\ )$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \to (\ a_3b_2 - a_2b_3\ ,\ a_1b_3 - a_3b_1\ ,\ a_3b_1 - a_1b_3\ )$$

(b) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$\to (\ a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)\ ,\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3)\ ,\ a_1(b_2 + c_2) -$

$a_2(b_1 + c_1)\ )$

$= (\ a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ a_3b_1 - a_1b_3\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1) + (\ a_2c_3 - a_3c_2\ ,\ a_3c_1 - a_1c_3\ ,$

$a_1c_2 - a_2c_1\ )$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ ($(a_2+b_2)c_3-(a_3+b_3)c_2$, $c_1(a_3+b_3)-c_3(a_1+b_1)$, $c_2(a_1+b_1)-c_1(a_2+b_2)$)

$=$ ($a_2c_3-a_3c_2$, $c_1a_3-c_3a_1$, $c_2a_1-c_1a_2$) $+$ ($b_2c_3-b_3c_2$, $c_1b_3-c_3b_1$, $c_2b_1-c_1b_2$)

$=$ ($a_2c_3-a_3c_2$, $a_3c_1-a_1c_3$, $a_1c_2-a_2c_1$) $+$ ($b_2c_3-b_3c_2$, $b_3c_1-b_1c_3$, $b_1c_2-b_2c_1$)

(*c*) $(\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ ($\alpha a_2b_3-\alpha a_3b_2$, $\alpha a_3b_1-\alpha a_1b_3$, $\alpha a_1b_2-\alpha a_2b_1$)

$=$ ($a_2\alpha b_3-a_3\alpha b_2$, $a_3\alpha b_1-a_1\alpha b_3$, $a_1\alpha b_2-a_2\alpha b_1$)

($\alpha(a_2b_3-a_3b_2)$, $\alpha(a_3b_1-a_1b_3)$, $\alpha(a_1b_2-a_2b_1)$)

(*d*) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$

$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$

$= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

(*e*) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ ($(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2$, $(a_1b_2-a_2b_1)c_1-(a_2b_3-a_3b_2)c_3$, $(a_2b_3-a_3b_2)c_2-(a_3b_1-a_1b_3)c_1$)

$=$ ($a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2$, $a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3$, $a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1$)

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

$=(a_1b_1c_1+a_2b_1c_2+a_3b_1c_3,\ a_1b_2c_1+a_2b_2c_2+a_3b_2c_3,\ a_1b_3c_1+a_2b_3c_2+a_3b_3c_3)-(a_1b_1c_1+a_1b_2c_2+a_1b_3c_3,\ a_2b_1c_1+a_2b_2c_2+a_2b_3c_3,\ a_3b_1c_1+a_3b_2c_2+a_3b_3c_3$

$=(a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_1b_2c_2-a_1b_3c_3,\ a_1b_2c_1+a_3b_2c_3-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3,\ a_1b_3c_1+a_2b_3c_2-a_3b_1c_1-a_3b_2c_2)$

よって

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

（P.368　一次独立）

$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n$ が一次独立ならばどれも 0 でなく、また互いに相異なる。

$\boldsymbol{v}_1=0$ ならば $1\boldsymbol{v}_1+0\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\boldsymbol{v}_n=0$

$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$ ならば $1\boldsymbol{v}_1-1\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\boldsymbol{v}_n=0$

（P.370　(*)’の解）

$$a_{11}\left(-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n)\right)+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n=0$$

（P.371　命題５）

$$\begin{aligned}
x_1\omega_1 &= \boxed{a_{11}x_1\boldsymbol{v}_1}+a_{21}x_1\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m1}x_1\boldsymbol{v}_m\\
x_2\omega_2 &= \boxed{a_{12}x_2\boldsymbol{v}_1}+a_{22}x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m2}x_2\boldsymbol{v}_m\\
&\qquad\qquad\downarrow\\
x_n\omega_n &= \boxed{a_{1n}x_n\boldsymbol{v}_1}+a_{2n}x_n\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mn}x_n\boldsymbol{v}_m
\end{aligned}$$

$\lambda_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n$

この証明では、$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ は一次独立と仮定していないことに注意したい。

（Ｐ．372　命題７）

一次独立でないときに一次従属と定義されているので

命題７の対偶は、ω が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合で表せないとすれば $\omega, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立であるといことになる。