（P. 184　多様体） ここからは不明な点が多い。深く立ち入らないことにする。

$|T+E|=0$ なる点 T_1 ($|T_1| = \pm 1$ もありうる。) においても変数のは $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個である。

実際、$f: T \to T_1 T$ を考えれば、f は $O(n)$ から自分自身への全単射であり、かつ、連続である。すなわち、f^{-1} が存在して、かつ、連続である。また、$f(E) = T_1$ である。よって、T_1 の近傍で E の近傍と同相となるものが存在する。(逆関数定理　解析入門 II 杉浦光夫 著 P. 17参)

行列のノルムは I 章P. 34にあるように $\| A \| = (\sum_{1 \leqq i, j \leqq n} \| a_{ij} \|^2)^{\frac{1}{2}}$ だったので、固有値 -1 が k 個あった場合

$$\| T-E \|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & & \\ & & & & & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ 0 & & & & & & & & & & -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= k(-2)^2 + 2(\cos\theta_1 - 1)^2 + 2\sin^2\theta_1 + \cdots + 2(\cos\theta_r - 1)^2 + 2\sin^2\theta_r$$

$$= k(-2)^2 + 2\cos^2\theta_1 - 4\cos\theta_1 + 2 + 2\sin^2\theta_1 + \cdots + 2\cos^2\theta_r - 4\cos\theta_r + 2 + 2\sin^2\theta_r$$

$$= k(-2)^2 + 4 - 4\cos\theta_1 + \cdots + 4 - 4\cos\theta_r$$

したがって、T をいくらでも E に近づけるためには $k=0$ で $\theta_1, \cdots, \theta_r$ を 0 に近づける必要がある。よって、E に十分に近いところでは、-1 を固有値としてもたないことになる。そのような T に対して $T+E$ は正則となるので、*Cayley* 変換による X の変数の数と一致する。

ゆえに、E のかなり小さい近傍をとれば上の T_1 の近傍と同相になることから、変数の数は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個あることになる。

このようにある集合があって、その集合の各点の近傍が一定次元の *Euclid* 空間と同相であるとき、その集合を**多様体**という。

群 G が多様体であって、群の演算がそのパラメータに関して微分可能であるとき、G を *Lie* 群という。

（P. 185　弧状連結）

Euclid 空間の部分集合 M は、M に属する任意の2点 P_0, P_1 に対して、閉区間 $[0, 1]$ から

M の中への連続写像 $t \to P(t)$ があって、$P(0) = P_0$, $P(1) = P_1$ となるとき、弧状連結であるという。弧状連結でない集合はいくつかの互いに共通部分をもたない弧状連結集合の和に一意的に分割される。

さて、弧状連結集合の連続像は弧状連結である。交代行列の集合は $\dfrac{n(n-1)}{2}$次元 $Euclid$ 空間 と考えられるので、その $Cayley$ 変換による像である T の集合も弧状連結である。

一方、写像 $T \to |T|$ も連続であるから、$|T|$ の集合も弧状連結である。したがって、$|T| = 1$ か $|T| = -1$ かのどちらかである。$X = 0$ ならば $T = (E+0)(E+0)^{-1} = E \ \to |T| = 1$ であるから、$Cayley$ 変換による T はつねに $|T| = 1$ でなければならない。

◎ $SO(n)$ は弧状連結、したがって、$O(n)$ は2個の弧状連結成分に分かれることが証明できる。

まず任意の $T \in SO(n)$ が E と連続曲線で結べることをいう。

$|T| = 1$ であるから、T は固有値 -1 を偶数個もつ。(38) から適当な直交行列 P によって

$$T = P\begin{pmatrix} E & & & & & & & & 0 \\ & -1 & 0 & & & & & & \\ & 0 & -1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ & & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ 0 & & & & & & & \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}P^{-1}$$

そこで

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$ とかけるから

$$T(t) = P\begin{pmatrix} E & & & & & & & 0 \\ & \cos t\pi & -\sin t\pi & & & & & \\ & \sin t\pi & \cos t\pi & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \cos t\theta_1 & -\sin t\theta_1 & & \\ & & & & \sin t\theta_1 & \cos t\theta_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \cos t\theta_r & -\sin t\theta_r \\ 0 & & & & & & \sin t\theta_r & \cos t\theta_r \end{pmatrix}P^{-1}$$

とおけば、$|T(t)|$ ($0 \leqq t \leqq 1$) は $|T(t)| = 1$ であり、$SO(n)$ の中の連続曲線で、$T(0) = E$, $T(1) = T$ となる。よって、$SO(n)$ は弧状連結である。したがって、T_1 を任意の変格直交行列とするとき、″傍系″ $T_1 \cdot SO$

(n) も弧状連結である。一方、$O(n)$ が弧状連結ではないことは、それが連続写像 $T \to |T|$ により $\{\pm 1\}$ にうつされることから明らかである。よって、$O(n)$ は2つの連結成分 $SO(n)$, $T_1SO(n)$ に分かれる。

パラメータ表示において、$|T+E| = 0$ なる点が除外されていた。このような”除外点”のない一対一両連続なパラメータ表示はできないだろうか？それがしかし不可能であることが次のように証明される。

$SO(n)$ は有界閉集合である。$T = (t_{ij}) \in SO(n)$ ならば、各成分の $|t_{ij}| \leqq 1$ なので有界であり、閉集合であることは、いくつかの代数方程式で定義されているからである。曖昧だが、$x^2 + y^2 = 1$ のように閉集合であるという根拠だろう。したがって、コンパクト集合ということになる。

コンパクト集合の連続像はコンパクトである。したがって、もし、”除外点”のない一対一両連続なパラメータ表示ができたとすれば、パラメータ領域は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次元 $Euclid$ 空間 の中のコンパクト集合でなければならない。それは必ず境界点をもち、その点の近傍において一対一両連続性（逆関数定理　参照）が成り立たない。

n 次実正則行列全体の集合 $GL(n, R)$ は群である。$GL(n, R)$ は n^2 次元 $Euclid$ 空間から超曲面 $|A| = 0$ を除いたものと考えられる。

$GL(n, R)$ の $O(n)$ の左傍系分解を考えることにする。

$P, Q \in GL(n, R)$ に対し

（ｉ） $O(n) \cdot P = O(n) \cdot Q \Leftrightarrow PQ^{-1} \in O(n)$

（⇒証）任意の $A \in O(n) \cdot P$ に対し、ある $B \in O(n)$ が存在して、$A = BP$ とすることができる。また、仮定から、ある $C \in O(n)$ が存在して、$A = CQ$ とすることができる。したがって

$BP = CQ \to C = BPQ^{-1} \to CB^{-1} = PQ^{-1}$

よって、$CB^{-1} \in O(n)$ なので $PQ^{-1} \in O(n)$ となる。

（⇐証）$PQ^{-1} \in O(n)$ ならば、$P \in O(n) \cdot Q$　よって、ある $A \in O(n)$ が存在して、$P = AQ$ とすることができる。したがって、任意の $B \in O(n) \cdot P$ に対し、$C \in O(n)$ が存在して、$B = CP = CAQ$ となる。$CA \in O(n)$ なので $B \in O(n) \cdot Q$ となる。よって、$O(n) \cdot P \subset O(n) \cdot Q$

逆に、$QP^{-1} \in O(n)$ なので、$Q \in O(n) \cdot P$　よって、ある $A \in O(n)$ が存在して、$Q = AP$ とすることができる。したがって、任意の $B \in O(n) \cdot Q$ に対し、$C \in O(n)$ が存在して、$B = CQ = CAP$ となる。$CA \in O(n)$ なので $B \in O(n) \cdot P$ となる。よって、$O(n) \cdot P \supset O(n) \cdot Q$

以上により、$O(n) \cdot P = O(n) \cdot Q$

（ⅱ） $PQ^{-1} \in O(n) \Leftrightarrow (PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} = {}^t(PQ^{-1}) = {}^t(Q^{-1}){}^tP$

(⇒証) 明らかである。

(⇐証) ${}^t(PQ^{-1})(PQ^{-1}) = QP^{-1}PQ^{-1} = E$

よって、$PQ^{-1} \in O(n)$ となる。

（iii） $(PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} = {}^t(PQ^{-1}) = {}^t(Q^{-1}){}^tP \;\Leftrightarrow\; {}^tPP = {}^tQQ$

(⇒証) $QP^{-1} = {}^t(Q^{-1}){}^tP \;\rightarrow\; Q = {}^t(Q^{-1}){}^tPP \;\rightarrow\; {}^tQQ = {}^tQ{}^t(Q^{-1}){}^tPP = {}^t(Q^{-1}Q){}^tPP$

$\rightarrow\; {}^tQQ = {}^tPP$

(⇐証) ${}^tQQ = {}^tPP \;\rightarrow\; Q = ({}^tQ)^{-1}{}^tPP \;\rightarrow QP^{-1} = ({}^tQ)^{-1}{}^tPPP^{-1} = ({}^tQ)^{-1}{}^tP$

$\rightarrow\; (PQ^{-1}) = {}^t(PQ^{-1})$

(ｉ)、(ⅱ)、(ⅲ) から

$P, Q \in GL(n, R)$ に対し

$O(n)\cdot P = O(n)\cdot Q \;\Leftrightarrow\; {}^tPP = {}^tQQ$

さて、P. 168の例から、P が正則 $\Leftrightarrow$ ${}^tPP > 0$ (${}^tPP$ は正値対称行列) だった。逆に任意の正値対称行列 A はこの形に表現できる。よって対応：$O(n)\cdot P \rightarrow {}^tPP = A$ は $GL(n, R)$ の $O(n)$ による左傍系分解を $GL(n, R) = \cup O(n)P_r$ としたとき、${}^tPP = {}^tQQ$ ならば $O(n)\cdot P = O(n)\cdot Q$ なので単射であり、正値対称行列の任意の元 A に対し正則行列で ${}^tPP = A$ となる正則行列が存在するので全射である。よって、$GL(n, R)$ の $O(n)$ による左傍系の空間は正値対称行列の空間と一対一に対応することがわかる。

またその際、$O(n)\cdot P\cdot T \rightarrow {}^tT{}^tPPT = {}^tTAT$ であるから、左傍系の任意の $O(n)\cdot P$ に T を右乗する変換は正値対称行列の空間における変換 $A \rightarrow {}^tTAT$ が対応する。

n 次正値対称行列の空間は位相的には $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次元 $Euclid$ 空間と同相である。

なぜなら、P. 169の(31) $Jacobi$ の変換から $p_{11}, \cdots, p_{1n}, p_{22}, \cdots, p_{2n}, p_{33}, \cdots, p_{nn}$ 計 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の変数から P ができあがるからである。

さらに、P. 106の任意の正則行列は直交行列と正則な三角行列の積で表すことができるという結果、P. 176問4の任意の正則行列は正値エルミット行列とユニタリー行列の積で表すことができることから、$GL(n, R)$ は $O(n)$ と $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次元 $Euclid$ 空間との位相的な直積になることが証明される。(P. 172の 4) 参照)

P. 167の定理5から、実係数の $A[x]$ に対し、適当な変数の正則一次変換 $x = Px'$ を行えば

(30) $A[x] = {}^tPAP[x'] = x_1'^2 + \cdots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 + \cdots + x_{p+q}'^2$

とすることができる。p , q は A によって一意的に定まる。

であった。

さて、T が $O(n)$ に属するための条件は ${}^tTE_nT = E_n$ (E_n : n 次単位行列) とみることができるので、$O(n)$ は単位形式 $E_n[x] = x_1'^2 + \cdots + x_n'^2$ を不変にする正則一次変換 T ($x = Tx'$) 全体の作る群ということができる。これを一般化して、任意の対称行列 $A = (a_{ij})$ に対し、二次形式 $A[x] = \sum a_{ij}x_ix_j$ を不変にする正則一次変換、すなわち

${}^tTAT = A$ となる正則行列全体の集合(それも明らかに群となる)を考えてみる。

まず、群となることを示す。仮に、${}^tTAT = A$ となる正則行列全体の集合を $O(A)$ で表すことにする。(i) 任意の B , $C \in O(A)$ に対し、${}^tBAB = A$, ${}^tCAC = A \rightarrow {}^t(BC)ABC = {}^tC{}^tBABC = {}^tCAC = A$ よって、$BC \in O(A)$ (ii) ${}^tEAE = A$ なので、$EB = BE = B$ よって、単位元 $E \in O(A)$ が存在する。(iii) ${}^tTAT = A$ ならば、${}^t(T^{-1})A(T^{-1}) = {}^t(T^{-1}){}^tTAT(T^{-1}) = A$, $T^{-1}T = TT^{-1} = E$ よって、$T^{-1} \in O(A)$

次に、A が正則なら T も正則である。($|A| = |{}^tTAT| = |A||T|^2$, $|A| \neq 0 \rightarrow |T| \neq 0$)

$O(A)$ を"二次形式 $A[x]$ の直交群"という。$O(E_n) = O(n)$ である。

$A > 0$ ならば、$A = {}^tPP$ (P : 正則) とかける。そのとき

${}^tTAT = A \Leftrightarrow {}^tT{}^tPPT = {}^tPP \Leftrightarrow ({}^tP)^{-1}{}^tT{}^tPPTP^{-1} = {}^t(PTP^{-1})E(PTP^{-1}) = E$

よって、$T \in O(A) \Leftrightarrow PTP^{-1} \in O(n)$ よって、$O(A) = P^{-1}O(n)p$ したがって、$O(A)$ と $O(n)$ は、$GL(n, R)$ の中で共役(群論の本に任せる)である。つまり、$O(A)$ と $O(n)$ も群として全く同じ構造をもつことになる。例えば、$O(A)$ も2つの連結成分をもつコンパクト Lie 群である。

一般に実対称行列は A は $A = {}^tQE_{p,q}Q$ (P. 167定理5のP^{-1} を Q とする。)と表すことができる。ここで、$E_{p,q}$ は

$$E_{p,q}{}^{(n)} = \begin{pmatrix} E_p & & 0 \\ & -E_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

よって上と同様にして

${}^tTAT = A \Leftrightarrow {}^tT{}^tQE_{p,q}QT = {}^tQE_{p,q}Q \Leftrightarrow ({}^tQ)^{-1}{}^tT{}^tQE_{p,q}QTQ^{-1} = {}^t(QTQ^{-1})E_{p,q}(QTQ^{-1}) = E_{p,q}$

なので、 $T \in O(A) \Leftrightarrow QTQ^{-1} \in O(E_{p,q})$ よって、$O(A) = Q^{-1}O(E_{p,q})Q$ となり $O(A)$ は $O(E_{p,q})$ と共役となる。

また、$p+q < n$ のとき、$E_{p,q}{}^{(n)}$ の正則部分を $E_{p,q}{}^{(p+q)} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$ とすれば

$T \in O(E_{p,q}{}^{(n)}) \Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}$ ($T_1 \in O(E_{p,q}{}^{(p+q)})$, T_{21} , T_2 : 任意)

となる。

(⇒証) ${}^tTE_{p,q}{}^{(n)}T = {}^tT\begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので

$T = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ とすれば、

$${}^tT\begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_{21} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_{21} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 & E_{p,q}{}^{(p+q)}A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tA_1E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 & {}^tA_1E_{p,q}{}^{(p+q)}A_{12} \\ {}^tA_{12}E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 & {}^tA_{12}E_{p,q}{}^{(p+q)}A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

${}^tA_1E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 = E_{p,q}{}^{(p+q)} \rightarrow |A_1|^2 \neq 0 \rightarrow A_1$: 正則

また、${}^tA_1E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 = E_{p,q}{}^{(p+q)}$ よって、$A_1 \in O(E_{p,q}{}^{(p+q)})$

${}^tA_1A_{12}E_{p,q}{}^{(p+q)} = 0 \rightarrow A_{12} = 0$

よって、$T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ (A_{21} , A_{22} は任意)

(⇐証) $T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ ($A_1 \in O(E_{p,q}{}^{(p+q)})$, A_{21} , A_{22} は任意) とすれば

$$T^{-1}E_{p,q}{}^{(n)}T = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_{21} \\ 0 & {}^tA_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_{21} \\ 0 & {}^tA_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1E_{p,q}{}^{(p+q)}A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{p,q}{}^{(p+q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、$T \in O(E_{p,q}{}^{(n)})$

$T \in O(E_{p,q}{}^{(n)}) \Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}$ ($T_1 \in O(E_{p,q}{}^{(p+q)})$, T_{21} , T_2 : 任意)

つまり、問題は $O(E_{p,q}{}^{(p+q)})$ の構造を考えることになる。それを $O(p, q)$ と表すことにする。さらに $O(p, q)$ と $O(q, p)$ は共役である。($O(p, q) = O(q, p)$ と記されているが、構造が同じであるという意味であろう。)

なぜなら、$E_{p,q}^{(p+q)} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} = A_\sigma^{-1}(-\begin{pmatrix} E_q & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix})A_\sigma = E_{q,p}^{(q+p)}$ とすることができる。

$$E_{2,3}^{(2+3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix} \to -E_{2,3}^{(2+3)} = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\sigma^{-1}(-E_{2,3}^{(2+3)})A_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix} = E_{3,2}^{(3+2)}$$ ←（P. 162 脚注参照）

① $A = P^{-1}BP$ ならば $O(A) = P^{-1}O(B)P$ つまり、$O(A)$ と $O(B)$ は共役である。

（証）$T \in O(A) \leftrightarrow T^{-1}AT = A \leftrightarrow T^{-1}(P^{-1}BP)T = P^{-1}BP \leftrightarrow PT^{-1}(P^{-1}BP)TP^{-1} = B$

$\leftrightarrow (PTP^{-1})^{-1}B(PTP^{-1}) = B \leftrightarrow PTP^{-1} \in O(B) \leftrightarrow T \in P^{-1}O(B)P$

② $O(A) = O(-A)$

（証）$T^{-1}AT = A$ となる同じ T で $T^{-1}(-A)T = -T^{-1}AT = -A$

$E_{p,q}^{(p+q)} = A_\sigma^{-1}(-E_{q,p}^{(q+p)})A_\sigma$ なので ①、②から

$O(E_{p,q}^{(p+q)}) = A_\sigma^{-1}O(-E_{q,p}^{(q+p)})A_\sigma = A_\sigma^{-1}O(E_{q,p}^{(q+p)})A_\sigma$ よって、$O(p\ ,q)$ と $O(q\ ,p)$ は共役である。

群として構造が同じなので、$p \geqq q$ としてよい。$O(\ n-1\ ,1)$ を $Lorentz$ 群という。

$T \in O(p\ ,q)$ を $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, p \\ \}\, q \end{matrix}$

とおけば ${}^tTE_{p,q}T = E_{p,q}$ から

$${}^tTE_{p,q}T = \begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tT_{21} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tT_{21} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ -T_{21} & -T_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tT_1T_1 - {}^tT_{21}T_{21} & {}^tT_1T_{12} - {}^tT_{21}T_2 \\ {}^tT_{12}T_1 - {}^tT_2T_{21} & {}^tT_{12}T_{12} - {}^tT_2T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

(*) ${}^tT_1T_1 - {}^tT_{21}T_{21} = E_p$, ${}^tT_1T_{12} = {}^tT_{21}T_2$, ${}^tT_{12}T_{12} - {}^tT_2T_2 = -E_q$

を得る。

逆に (*) が満たされていれば、$T \in O(p\ ,q)$ となる。その際 T_{21} は自由にとり得ることを示す。

T_{21} を任意にとれば、$E_p + {}^tT_{21}T_{21} > 0$ である。

なぜなら、${}^tT_{21}T_{21}$ は実対称行列なので、P. 162の例2の証明から、α_i を ${}^tT_{21}T_{21}$ の固有値と

し、その実固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすれば、$0 \leqq (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{x}, {}^t\boldsymbol{AAx}) = \alpha_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ よって

$\alpha_i \geqq 0$ つまり、すべての固有値は $\geqq 0$ 故に、$\boldsymbol{E}_p + {}^t\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_{21} > 0$ となる。P. 169から非負値

対称行列なので、適当な正則行列 $\boldsymbol{T}_1$ をとり ${}^t\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{E}_p + {}^t\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_{21}$ となるようにすることができる。よって、$\boldsymbol{T}_1$ は $\boldsymbol{T}_{21}$ から決めることができる。

次に、(*) の第2式から、$\boldsymbol{T}_{12} = {}^t(\boldsymbol{T}_1^{-1}){}^t\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_2$ とおき、$\boldsymbol{T}_2$ を (*) の第3式を満たすようにとり得ることを示せばよい。

${}^t\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_1^{-1}{}^t(\boldsymbol{T}_1^{-1}){}^t\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_2 - {}^t\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_2 = -\boldsymbol{E}_q$

変形する前に $\boldsymbol{T}_2$ は正則である。なぜなら、(*) の第3式から ${}^t\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{E}_q + {}^t\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{T}_{12}$ なので

$\boldsymbol{E}_q + {}^t\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_2$ は対称行列であり、> 0 、上と同様に正則行列 $\boldsymbol{T}_2$ が存在することがわかる。しかし $\boldsymbol{T}_{12}$ がわからないので決定はできない。

$\boldsymbol{E}_q = {}^t\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_2 - {}^t\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_1^{-1}{}^t(\boldsymbol{T}_1^{-1}){}^t\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_2$

$({}^t\boldsymbol{T}_2)^{-1}\boldsymbol{T}_2^{-1} = \boldsymbol{E}_q - \boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{T}_1^{-1}{}^t(\boldsymbol{T}_1^{-1}){}^t\boldsymbol{T}_{21}$

となる。この右辺には $\boldsymbol{T}_1$ と $\boldsymbol{T}_{21}$ しかないので > 0 ならばよい。$\boldsymbol{T}_2$ を決定できる。

それを示すための準備　P. 142例2の後半の証明をする。

$\boldsymbol{A}$ が (m, n) 行列、$\boldsymbol{B}$ が (n, m) 行列の場合にも $\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ の 0 でない固有値は(重複までいれて)一致する。

(証明) $n = m$ なら問題ないので、$n > m$ とする。そして、脚注にしたがい、次のように $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を変形する。

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & & & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とする。

まず、$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{BA}$ である。

$f_{A'B'}(x) = f_{B'A'}(x)$ だったので、$f_{A'B'}(x) = f_{AB}(x)x^{n-m}$, $f_{B'A'}(x) = f_{BA}(x)$

よって、$f_{AB}(x)x^{n-m} = f_{BA}(x)$ つまり、$f_{AB}(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$ とすれば

$f_{BA}(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)x^{n-m}$ となり、0 でない固有値は重複まで含めて一致す

ることがわかる。

戻る！

(*) 第1式から ${}^tT_1T_1 - {}^tT_{21}T_{21} = E_p$

→ $({}^tT_1)^{-1}\,{}^tT_1T_1T_1^{-1} - ({}^tT_1)^{-1}\,{}^tT_{21}T_{21}T_1^{-1} = ({}^tT_1)^{-1}T_1^{-1}$

→ $E_p - ({}^tT_1)^{-1}\,{}^tT_{21}T_{21}T_1^{-1} = ({}^tT_1^{-1})T_1^{-1} > 0$ ← （P. 168例）

よって、$({}^tT_1)^{-1}\,{}^tT_{21}T_{21}T_1^{-1} = {}^t(T_{21}T_1^{-1})(T_{21}T_1^{-1})$ は対称行列なので適当に正則行列 P をとり $P^{-1}\,{}^t(T_{21}T_1^{-1})(T_{21}T_1^{-1})P$ が固有値が並ぶ対角行列とイメージすれば、すべての固有値が < 1 であることがわかる。したがって、A が (m, n) 行列、B が (n, m) 行列の場合にも AB と BA の 0 でない固有値は（重複までいれて）一致するので 0 以外の固有値は重複を含めて $(T_{21}T_1^{-1})\,{}^t(T_{21}T_1^{-1})$ の固有値と一致するので、すべての固有値は < 1 となる。故に $E_q - T_{21}T_1^{-1}\,{}^t(T_1^{-1})\,{}^tT_{21} > 0$ であることがわかった。

以上で、(*) を成立させるために、T_{21} は任意であった。T_{21} から T_1 が決定し、T_{21}, T_1 から T_2 T_{21}, T_1, T_2 から T_{12} を決定することができることがわかった。

T_1, T_2 のとり方にそれぞれ $O(p), O(q)$ だけの自由度がある。なぜなら、$P_1 \in O(p)$ なら ${}^tT_1T_1 = E_p + {}^tT_{21}T_{21}$ ， ${}^t(P_1T_1)E_p(P_1T_1) = {}^tT_1\,{}^tP_1E_pP_1T_1 = {}^tT_1E_pT_1 = E_p + {}^tT_{21}T_{21}$ なので T_1 を P_1T_1 とおきかえてもよい。同様に T_2 を P_2T_2（$P_2 \in O(q)$）とおきかえてもよいことになる。

$O(p, q)$ の次元は変数の個数で決まるので

T_{21} は pq 個の変数 x_{ij} を含んでいるから pq 次元、T_{21} から他の T_1, T_2, T_{12} は決まり、$O(p)$, $O(q)$ にはまだあらたな変数が加わる余地があるのでの次元分大きくなるので

$$\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq = \frac{p^2 - p + q^2 - q + 2pq}{2} = \frac{(p+q)^2}{2} - \frac{p+q}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

となり、n だけに関係してくることがわかる。（脚注にある方法はやめておく。）

T_{21} に制限がないので、有界ではない。よって、$O(p, q)$ はコンパクトではないことがわかる。また、$|T_1|, |T_2|$ の符号により、4個の連結成分に分かれることが証明されるそうだ。

複素行列の範囲においては、ユニタリー行列全体の作る群 $U(n)$（ユニタリー群）を考えること

ができる。まず群になることを示す。

（ｉ）A , $B \in U(n)$ → $(AB)^*AB = B^*A^*AB = E$ （ⅱ）,（ⅲ）は正則なので明らかである。

また、U が $U(n)$ に属するための条件は $U^*E_nU = E_n$ であるから、$U(n)$ はエルミット単位形式

$E_n\{x\} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \overline{x_i'}$ を不変にする正則一次変換の作る群である。

この場合にも $Cayley$ 変換 (40) , (41) により（ -1 を固有値としない）ユニタリー行列と歪エルミット行列とが一対一に対応する。

それをP．182の内容をなぞってやってみれば

ユニタリー行列 U が -1 を固有値としなければ、$E+U$ は正則である。そのとき

(40) $X = (E-U)(E+U)^{-1}$

とおけば、X は歪エルミット行列になる。

実際、$E+U$ と $E-U$ は交換可能であるから、$(E+U)^{-1}$ と $(E-U)$ も交換可能である。

$X^* = (E+U)^{-1*}(E-U)^* = (E+U^*)^{-1}(E-U^*) = (E+U^{-1})^{-1}(E-U^{-1})$

$= (E+U^{-1})^{-1}U^{-1}U(E-U^{-1})$

ここで、$(E+U^{-1})^{-1}U^{-1} = (U(E+U^{-1}))^{-1} = (U+E)^{-1}$

$= (U+E)^{-1}(U-E) = -(E+U)^{-1}(E-U) = -(E-U)(E+U)^{-1}$

$= -X$

よって、X は歪エルミット行列であるから固有値は純虚数となり、-1 を固有値としないので先程と同じように $E+X$ は正則となる。

さて、(40) から $X(E+U) = X+XU = E-U$ → $X+XU = E-U$ → $U+XU = E-X$

→ $(E+X)U = E-X$ → $U = (E+X)^{-1}(E-X)$

また同じように、$(E+X)(E-X) = E-X+X-X^2 = (E-X)(E+X)$ なので、$E+X$ が正則であることから、$(E+X)^{-1}$ と $(E-X)$ も交換可能となる。よって

$U = (E-X)(E+X)^{-1}$

逆に任意の歪エルミット行列 X に対して、$E+X$, $E-X$ は正則であるので

(41) $U = (E-X)(E+X)^{-1}$

とおけば、$E-X$ と $E+X$ は交換可能で、$(E+X)^{-1}$ と $E-X$, $E+X$ と $(E-X)^{-1}$ も交換可能である。よって

$U^* = (E+X)^{-1*}(E-X)^* = (E+X^*)^{-1}(E-X^*) = (E-X)^{-1}(E+X)$

$U^*U=(E-X)^{-1}(E+X)(E-X)(E+X)^{-1}$

$=(E-X)^{-1}(E+X)(E+X)^{-1}(E-X)=E$

したがって、U はユニタリー行列となる。また、X は歪エルミット行列なので、$X^*X=-XX=X(-X)=XX^*$正規行列である。よって、適当なユニタリー行列 Q をとれば

$$Q^*XQ=\begin{pmatrix}0&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&ia_1&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&ia_r\end{pmatrix},\quad Q^*(E-X)Q=E-Q^*XQ=\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&1-ia_1&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&1-ia_r\end{pmatrix}$$

$$Q^*(E+X)Q=E+Q^*XQ=\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&1+ia_1&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&1+ia_r\end{pmatrix}$$ と表現できる。また

$$(Q^*(E+X)Q)^{-1}=Q^*(E+X)^{-1}Q=\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\frac{1}{1+ia_1}&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&\frac{1}{1+ia_r}\end{pmatrix}$$ なので

$Q^*UQ=Q^*(E-X)QQ^*(E+X)^{-1}Q$

$$=\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&1-ia_1&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&1-ia_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\frac{1}{1+ia_1}&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&\frac{1}{1+ia_r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\frac{1-ia_1}{1+ia_1}&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&\frac{1-ia_r}{1+ia_r}\end{pmatrix}$$

したがって、U は -1 を固有値としない。つまり、$U+E$ は正則となる。

(41) から、$U(E+X)=U+UX=E-X \rightarrow X+UX=E-U \rightarrow (E+U)X=E-U$

$\rightarrow X=(E-U)(E+U)^{-1}$

よって、-1 を固有値としないユニタリー行列と歪エルミット行列とが一対一に対応することがわかる。

$U(n)$ は n^2 次元については、

$U(n)$ は n 次複素正方行列全体の集合の部分集合で、n^2 個の方程式：

$\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} a_{kj} = \delta_{ij}$ （$1 \leqq i , j \leqq n$）

によって定義される集合である。

（P. 128、P. 130 参照）

また、方程式は ${}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1)+n$

$= n^2$ 個ある。

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \phantom{a_{1i}} & & j\text{ 列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
i\text{ 行} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{array}$$

したがって、$2n^2$ 個の未知の変数があって、n^2 個の方程式があるので、$U(n)$（解の空間）は $2n^2 - n^2 = n^2$ 次元と考えられる。また、歪エルミット行列の変数の個数からもわかる。

エルミット行列は、対角成分が純虚数なので n 次元、上三角成分は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個あり、それぞれ複素数なので $n + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$ 次元となる。

コンパクトであることについては、P. 186の内容と同じでよいと思う。$U(n)$ が連結な Lie 群になることは今後の課題としたい。

（P. 182　研究課題　1　一般の可換体の二次形式）

標数 0 の体 K は有理数体 Q と同型の部分体を含む。

体 K の単位元を e とし、体 K の”整数” ne も単に n で表す。$x \in K$ の n 倍 nx は $(ne)x$ を意味する。（代数系入門　松坂和夫 著 P. 229以降を参照）

（準備） $rank\ A = 2$（ 第 2 ～ 3 列が一次独立とする ）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & a_{14} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} \\ a_{14} & b_{24} & b_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \text{とする。}$$

$$A[x] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & a_{14} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} \\ a_{14} & b_{24} & b_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{44}x_4^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{34}x_3x_4 + 2a_{14}x_1x_4 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{24}x_2x_4 \quad \cdots \quad ①$$

ここで、A の一次独立の列を前に出す（1列 → 3列 , 2列 → 1列 , 3列 → 2列 ）A_σ を用意すると

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \ {}^tA_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^tA_\sigma AA_\sigma = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&b_{12}&b_{13}&a_{14}\\b_{12}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\b_{13}&b_{23}&b_{33}&b_{34}\\a_{14}&b_{24}&b_{34}&a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{22}&b_{23}&b_{12}&b_{24}\\b_{23}&b_{33}&b_{13}&b_{34}\\b_{12}&b_{13}&a_{11}&a_{14}\\b_{24}&b_{34}&a_{14}&a_{44} \end{pmatrix} $$

$$ {}^tA_\sigma AA_\sigma[x'] = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{22}&b_{23}&b_{12}&b_{24}\\b_{23}&b_{33}&b_{13}&b_{34}\\b_{12}&b_{13}&a_{11}&a_{14}\\b_{24}&b_{34}&a_{14}&a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2\\x_3\\x_1\\x_4 \end{pmatrix} $$

← 変数の順番（ x_1 → 3 番，x_2 → 1 番，x_3 → 2 番，x_4 → 4 番）

$$ = a_{11}x_1^2+a_{44}x_4^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+2b_{34}x_3x_4+2a_{14}x_1x_4+2b_{12}x_1x_2+2b_{13}x_1x_3+2b_{23}x_2x_3+2b_{24}x_2x_4 \quad \cdots \quad ② $$

$$ A[x] = {}^tA_\sigma AA_\sigma[x'] \;,\; A_\sigma x' = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2\\x_3\\x_1\\x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = x \;,\; {}^t({}^tA_\sigma AA_\sigma) = {}^tA_\sigma AA_\sigma $$

①，② からわかるように、A_σ をほどこしても $A[x]$ に変化はない。

一般の体 K を成分とするベクトルや行列における二次形式を考える。A を対称行列とする。複素数体が順序体ではないように、一般の体なので大小関係を使うことはできないことに注意したい。また、P. 161注意も参考にせよ。

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_2 \end{pmatrix}$ において、A_1 が正則行列ならば

$$ \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^tA_{12}A_1^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2-{}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A_1^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} $$

が成立する。実際、

$$ \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^tA_{12}A_1^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2-{}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A_1^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^tA_{12}A_1^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2-{}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12}+A_2-{}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12} \end{pmatrix} $$

よって

$P = \begin{pmatrix} E & A_1^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$ とおけば、${}^tP = \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^tA_{12}A_1 & E \end{pmatrix}$ となり

$$ (1)\ \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix} \;,\; A_2' = A_2-{}^tA_{12}A_1^{-1}A_{12} $$

である。

(1) は A_1 が正則でなくても、$A_1C = A_{12}$ となるような（A_{12} と同じ型の）行列 C が存在すれば成り立つ。

$$ {}^tP=\begin{pmatrix}E & 0\\ {}^tC & E\end{pmatrix}\ ,\ P=\begin{pmatrix}E & C\\ 0 & E\end{pmatrix} $$

$$ \begin{pmatrix}A_1 & A_{12}\\ {}^tA_{12} & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ {}^tC & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2-{}^tA_{12}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & C\\ 0 & E\end{pmatrix} $$

$$ =\begin{pmatrix}E & 0\\ {}^tC & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & A_1C\\ 0 & A_2-{}^tA_{12}C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & A_1C\\ {}^tCA_1 & {}^tCA_1C+A_2-{}^tA_{12}C\end{pmatrix} $$

$$ =\begin{pmatrix}A_1 & A_{12}\\ {}^tA_{12} & {}^tCA_1C+A_2-{}^tCA_1C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & A_{12}\\ {}^tA_{12} & A_2\end{pmatrix}\ ,\ A_2{}'=A_2-{}^tA_{12}C $$

よって

$$ \begin{pmatrix}A_1 & A_{12}\\ {}^tA_{12} & A_2\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2-{}^tA_{12}C\end{pmatrix} $$

このことからまず、$rank\,A=r$ ならば、A の r 次の主小行列式の中に $\neq 0$ なるものがあることがわかる。実際、$rank\,A=r$ ならば、A の列ベクトルの中に r 個の一次独立なものが存在し他はそれらの一次結合になる。列と行に適当な置換 A_σ を行い、第 1 ～第 r 列が一次独立になるようにする。この場合、一次独立な列は前に置換するだけで、行を置換しても $\boxed{\quad}\ \boxed{\quad}$ の中の成分は転置した関係になっていて、一次独立の列の一次結合になっていることにかわりはない。つまり、$A'={}^tA_\sigma AA_\sigma$ は

$A'=\begin{pmatrix}A_1{}' & A_{12}{}'\\ {}^tA_{12}{}' & A_2{}'\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{a}_1{}',\cdots,\boldsymbol{a}_r{}')=\begin{pmatrix}A_1{}'\\ {}^tA_{12}{}'\end{pmatrix}$ の列ベクトルは一次独立になっており

$(\boldsymbol{a}_{r+1}{}',\cdots,\boldsymbol{a}_n{}')=\begin{pmatrix}A_{12}{}'\\ A_2{}'\end{pmatrix}$ はそれらの一次結合になっている。（注 ${}^t\boldsymbol{A}_1{}'=\boldsymbol{A}_1{}'$）

$$ \boldsymbol{a}_k{}'=\sum_{i=1}^{r}c_{ik}\boldsymbol{a}_i{}'\ (r+1\leqq k\leqq n)\ ,\ C=(c_{jk}) $$

C は $(r,n-r)$ 行列

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{a}_{r+1}{}' &= c_{1,r+1}\boldsymbol{a}_1{}'+c_{2,r+1}\boldsymbol{a}_2{}'+\cdots+c_{r,r+1}\boldsymbol{a}_r{}'\\ \boldsymbol{a}_{r+2}{}' &= c_{1,r+2}\boldsymbol{a}_1{}'+c_{2,r+2}\boldsymbol{a}_2{}'+\cdots+c_{r,r+2}\boldsymbol{a}_r{}'\\ \boldsymbol{a}_{r+3}{}' &= c_{1,r+3}\boldsymbol{a}_1{}'+c_{2,r+3}\boldsymbol{a}_2{}'+\cdots+c_{r,r+3}\boldsymbol{a}_r{}'\\ &\ \ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n{}' &= c_{1,n}\boldsymbol{a}_1{}'+c_{2,n}\boldsymbol{a}_2{}'+\cdots+c_{r,n}\boldsymbol{a}_r{}' \end{aligned} \ \rightarrow\ C=\begin{pmatrix}c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & c_{1,r+3} & \cdots & c_{1n}\\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & c_{2,r+3} & \cdots & c_{2n}\\ c_{3,r+1} & c_{3,r+2} & c_{3,r+3} & \cdots & c_{3n}\\ & & & \ddots & \\ c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & c_{r,r+3} & \cdots & c_{rn}\end{pmatrix} $$

$$ (\boldsymbol{a}_{r+1}{}',\cdots,\boldsymbol{a}_n{}')=(\boldsymbol{a}_1{}',\cdots,\boldsymbol{a}_r{}')\begin{pmatrix}c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & c_{1,r+3} & \cdots & c_{1n}\\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & c_{2,r+3} & \cdots & c_{2n}\\ c_{3,r+1} & c_{3,r+2} & c_{3,r+3} & \cdots & c_{3n}\\ & & & \ddots & \\ c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & c_{r,r+3} & \cdots & c_{rn}\end{pmatrix} $$

$$\begin{pmatrix} A_{12}' \\ A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1' \\ {}^tA_{12}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & c_{1,r+3} & \cdots & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & c_{2,r+3} & \cdots & c_{2n} \\ c_{3,r+1} & c_{3,r+2} & c_{3,r+3} & \cdots & c_{3n} \\ & & & \ddots & \\ c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & c_{r,r+3} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1' \\ {}^tA_{12}' \end{pmatrix} C$$

ここまでで

$$A' = {}^tA_\sigma A A_\sigma = \begin{pmatrix} A_1' & A_{12}' \\ {}^tA_{12}' & A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1' & A_1'C \\ {}^t(A_1'C) & {}^tA_{12}'C \end{pmatrix}$$

$A_{12}' = A_1'C$ から $A_2' - {}^tA_{12}'C = {}^tA_{12}'C - {}^tA_{12}'C = 0$

したがって $A \simeq A' \cong \begin{pmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rank\, A = r$ であるから、P. 111定理8より $rank\, A_1' = r$ 、よって $|A_1'| \neq 0$ でなければならないことになる。係数の行列が $\neq 0$ であるような二次形式を”正則”な二次形式ということにすれば、任意の二次形式 $A[x]$ は、$rank\, A = r$ のとき、r 個の文字に関する正則な二次形式に同値であるといえる。

以後 A は A_σ によって $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_2 \end{pmatrix}$ （A_1：正則）になっているという前提で進める。

つまり、基底の順番を変えておくことにする。

（P. 183　定理A）

任意の対称行列（成分が体 K ）は対角行列に同値である。

(2) $A \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

二次形式に関していえば、$A[x]$ は変数の適当な正則一次変換により、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i'^2$ なる形に変換される。

（証明）

n に関する帰納法で証明する。$n = 1$ のときは明らかである。故に、$n > 1$ とする。また、$A \neq 0$ とする。$a_{11} \neq 0$ ならば、(1) により

$A \simeq \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix}$ （$P = \begin{pmatrix} E & a_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ）

帰納法の仮定で P_1 があって、$D = {}^tP_1A_1'P_1$（D：対角行列）$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} P$ とすれば

$${}^tP'\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_1'\end{pmatrix}P' = {}^tP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & {}^tP_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}P$$

$$= {}^tP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & {}^tP_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_1'P_1\end{pmatrix}P = {}^tP\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & {}^tP_1A_1'P_1\end{pmatrix}P = {}^tP\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}P = A$$

よって、A は対角行列に同値である。

「$a_{11} = 0$ のとき、$A \neq 0$ であるから、$A[\boldsymbol{x}_0] \neq 0$ なる $\boldsymbol{x}_0$ がある。」について

P.161の問1をどのように活用したらよいのかわからないので、実際に $n = 4$ の場合の $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ を求めてみる。

$(n = 4)$ $a_{11} = 0$

$A[\boldsymbol{x}] = a_{44}x_4^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{34}x_3x_4+2a_{14}x_1x_4+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4$

もし a_{ii} のうち一つでも 0 でないものがあったとすれば、そのうちの一つを選び、その項の変数 x_i を 1 、他の変数を 0 とすればよい。

例えば $a_{44} \neq 0$ ならば、${}^t\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0,1,0,\ldots,0)$ とすれば $A[\boldsymbol{x}_0] = a_{44} \neq 0$ となる。

次に、すべての $a_{ii} = 0$ ならば $A \neq 0$ だったので

$A[\boldsymbol{x}] = 2a_{34}x_3x_4+2a_{14}x_1x_4+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4$

となり、$a_{ij} \neq 0$ となる項が一つはあるはずである。そのうちの一つを選び、その項の変数 x_i , x_j をそれぞれ 1 とし、他の変数を 0 とすればよい。

例えば $a_{14} \neq 0$ ならば、${}^t\boldsymbol{x}_0 = (1,0,0,1,0,\ldots,0)$ とすれば $A[\boldsymbol{x}_0] = 2a_{14} \neq 0$ となる。

このようにして、一般の n 次の場合も $\boldsymbol{x}_0$ を選べば、$A[\boldsymbol{x}_0] \neq 0$ とすることができる。

そこで第1列を $\boldsymbol{x}_0$ とする正則行列 P を適当に作り

$P = (\ \boldsymbol{x}_0\ ,\boldsymbol{p}_2\ ,\ \cdots\ ,\boldsymbol{p}_n\ )$ とすれば

$${}^tPAP = \begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{p}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}A(\ \boldsymbol{x}_0\ ,\boldsymbol{p}_2\ ,\ \cdots\ ,\boldsymbol{p}_n\ ) = \begin{pmatrix}A[\boldsymbol{x}_0] & *\\ * & *\end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{(} {}^t({}^tPAP) = {}^tPAP \text{ なので対称行列)}$$

したがって、$(1\ ,1)$ 成分は $\neq 0$ の対称行列となる。よって上記により、${}^tPAP$、したがって A は対角行列に同値である。

$K = C$, $rank\ A = r$ ならば

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

, $P' = PQ$ とすれば $A \simeq \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

しかし、一般の体では平方根は存在しないので次のような考察をする。

正則な二次形式 $A_1[x]$ が $x_1 \neq 0$, $A[x_1] = 0$ なる（K の）ベクトル x_1 が存在するとき、"零を表す" あるいは "零形式" という。任意の二次形式 $A[x]$ はそれと同値な（変数の数の少ない）正則二次形式 $A_1[x']$ が零形式であるとき零形式という。

この条件は、$Ax_1 \neq 0$, $A[x_1] = 0$ なるベクトル x_1 が存在することと同値である。実際、任意の対称行列に A_σ , (1) , 定理A の処理を施し、次のようになっていると仮定してもよい。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha_i \neq 0 , 1 \leqq i \leqq r)$$

正則な二次形式 $A_1[x]$ が $x_1 \neq 0$, $A[x_1] = 0$ なる（K の）ベクトル x_1 が存在するならば

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$ として $A_1[x_1] = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2 = 0$ となる x_1 が存在する。そのとき

$Ax_1 \neq 0$ である。（$x_1 \sim x_r$ の中には 0 でないものが存在し、$\alpha_i \neq 0$ であるからである。）

また $A[x_1] = {}^t x_1 A x_1 = A_1[x_1] = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2 = 0$

逆に $Ax_1 \neq 0$, $A[x_1] = 0$ となる x_1 が存在すれば

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ とおけば $Ax_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \vdots \\ \alpha_r x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $A[x_1] = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_1^2 = 0$

なので、$x_1 \sim x_r$ の中には 0 でないものが存在する。よって

$\boldsymbol{x}_1 \neq 0$ であり、$\boldsymbol{A}_1[\boldsymbol{x}_1] = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_1^2 = 0$ となる。

実係数の二次形式はその不定符号が（$p > 0$, $q > 0$）のとき、またそのときに限り零形式となる。実際、$\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_p x_p^2 - \alpha_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - \alpha_{p+q} x_{p+q}^2 = 0$ 、x_1 , x_{p+1} 以外の変数を 0 としても、$\alpha_1 x_1^2 - \alpha_{p+1} x_{p+1}^2 = 0$ となる x_1 , $x_{p+1} \neq 0$ が存在するからである。また、実数の平方は正なのでそのときに限る。

複素係数の二次形式については $rank\,A > 1$ ならば $rank\,A \geqq 2$ なので上と同様に2つ以上の変数を 0 として、たとえば簡単に

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \ , \ \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0 \ \rightarrow \ \alpha_1 x_1^2 = -\alpha_2 x_2^2 \ \rightarrow \ x_1^2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2^2$$

$x_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\, i x_2$ とすればよい。

$A[\boldsymbol{x}]$ が零を表すとし、$A\boldsymbol{x}_1 \neq 0$, $A[\boldsymbol{x}_1] = 0$ なる $\boldsymbol{x}_1$ を1つとる。これに対し、$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \neq 0$ となる $\boldsymbol{x}_2$ が存在する。（実際、K^n の底を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ としたとき、$A\boldsymbol{x}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$ に対し $\alpha_i \neq 0$ ならば $\boldsymbol{x}_2 = \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{a}_n$ とおいたとき、$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_n \beta_n \neq 0$ とすることができる。たとえば、$\beta_i = 1$ とすればよい。）$\boldsymbol{x}_2$ を $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)} \boldsymbol{x}_2$ でおきかえることにより

$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = \left(A\boldsymbol{x}_1, \dfrac{1}{(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)} \boldsymbol{x}_2\right) = \dfrac{1}{(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)} (A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$ なので $(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$ としてよい。

そのとき、任意の λ に対し、$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{x}_1) = (A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \lambda (A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)$

$= 1 + \lambda\, {}^t\boldsymbol{x}_1 A \boldsymbol{x}_1 = 1 + \lambda A[\boldsymbol{x}_1] = 1$

$A[\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{x}_1] = {}^t(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{x}_1) A (\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{x}_1) = ({}^t\boldsymbol{x}_2 + \lambda\, {}^t\boldsymbol{x}_1) A (\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{x}_1)$

$= ({}^t\boldsymbol{x}_2 + \lambda\, {}^t\boldsymbol{x}_1)(A\boldsymbol{x}_2 + \lambda A\boldsymbol{x}_1) = A[\boldsymbol{x}_2] + \lambda\, {}^t\boldsymbol{x}_2 A \boldsymbol{x}_1 + \lambda\, {}^t\boldsymbol{x}_1 A \boldsymbol{x}_2 + \lambda^2 A[\boldsymbol{x}_1]$

$= A[\boldsymbol{x}_2] + 2\lambda$

よって、$\lambda = -\dfrac{A[\boldsymbol{x}_2]}{2}$ とし、$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 - \dfrac{A[\boldsymbol{x}_2]}{2} \boldsymbol{x}_1$ とすれば

$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = 1$, $A[\boldsymbol{x}_3] = 0$ もう一度 $\boldsymbol{x}_3$ を $\boldsymbol{x}_2$ におきかえて

$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$, $A[\boldsymbol{x}_2] = 0$ となる。

$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ は一次独立である。もし $\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2=0$ となる自明ではない α , β があったとすれば $\boldsymbol{x}_2=-\dfrac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{x}_1$ となり、$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)=-\dfrac{\alpha}{\beta}(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)=-\dfrac{\alpha}{\beta}A[\boldsymbol{x}_1]=0$ となり矛盾する。

そこで、$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を第 1 , 第 2 列とする n 次正則行列を P とすれば

$$A'={}^tPAP=\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ {}^t\boldsymbol{p}_3 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}A(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n)=\left(\begin{array}{cc:c} A[\boldsymbol{x}_1] & (\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2) & \\ (\boldsymbol{x}_2, A\boldsymbol{x}_1) & A[\boldsymbol{x}_2] & * \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{*} & * \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & * \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{*} & * \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^tA_{12} & A_2 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ Q=\begin{pmatrix} E & A_1^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

となる。よって、(1) により、 $A\cong A''\simeq{}^tQA'Q\simeq\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & B \end{array}\right)$

ここまでで、$\boldsymbol{x}=P(Q\boldsymbol{x}'')=P\boldsymbol{x}'$

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{x}'{}^tPAP\boldsymbol{x}'={}^t\boldsymbol{x}'\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & * \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{*} & * \end{array}\right)\boldsymbol{x}'={}^t(Q\boldsymbol{x}'')\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & * \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{*} & * \end{array}\right)Q\boldsymbol{x}''$$

$$={}^t\boldsymbol{x}''{}^tQ\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & * \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{*} & * \end{array}\right)Q\boldsymbol{x}''={}^t\boldsymbol{x}''\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & B \end{array}\right)\boldsymbol{x}''$$

B が零を表せばこの操作をさらに続けることができる。

具体的には、$B\boldsymbol{x}_3'\neq 0$, $B[\boldsymbol{x}_3']=0$ となる $\boldsymbol{x}_3'$ をとる。それに対し、$(B\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4'')=1$ となるように $\boldsymbol{x}_4''$ をとる。そして、$\boldsymbol{x}_4'=\boldsymbol{x}_4''-\dfrac{B[\boldsymbol{x}_4'']}{2}\boldsymbol{x}_3'$ でおきかえて、$(B\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4')=1$, $B[\boldsymbol{x}_4']=0$ となる。$\boldsymbol{x}_3'$, $\boldsymbol{x}_4'$ は一次独立なので正則行列 C をつくり、P を次のようにする。

$C=(\boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4', \boldsymbol{p}_5, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$, $P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$$
{}^{t}P\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & B \end{array}\right)P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & {}^{t}C \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & B \end{array}\right)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & {}^{t}C \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & BC \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & {}^{t}CBC \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}\boldsymbol{x}_3{}'B\boldsymbol{x}_3{}' & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & {}^{t}\boldsymbol{x}_4{}'B\boldsymbol{x}_4{}' & \\ \hline & 0 & * & & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline & 0 & * & & * \end{array}\right)
$$

よって、(1) により

$$
A \simeq \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline & 0 & & & B' \end{array}\right)
$$

最後に零を表さない二次形式が得られるが、それに定理 A の変形を行えば

$$
(3)\ A \simeq \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & & 0 \\ & \overset{\leftrightarrow\, t}{\ddots} & & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & \\ & & & \alpha_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \alpha_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

となる。ここに、$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i^2$ は零を表さない二次形式である。すなわち

$$
\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i^2 = 0 \ (x_i \in K) \iff x_i = 0 \ (1 \leqq i \leqq s)
$$

上の結果を二次形式に関していえば、$A[\boldsymbol{x}]$ は適当な正則一次変換により

$$
\alpha_1 x'^2_1 + \cdots + \alpha_s x'^2_s + 2x'_{s+1}x'_{s+2} + \cdots + 2x'_{s+2t-1}x'_{s+2t}
$$

なる形に変形される。

具体的には

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & x_5' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \\ x_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & x_5' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'\alpha_1 \\ x_3' \\ x_2' \\ x_5' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

$= \alpha_1 x_1'^2 + 2x_2'x_3' + 2x_4'x_5'$

(P.192 *Witt* の定理)

実係数の場合には、$s = |p - q|$, $t = Min\{p, q\}$ となる。

複素数の場合は、$rank\, A = r$ のとき

(r : 偶数) $s = 0$, $t = \dfrac{r}{2}$ 　　　,(r : 奇数) $s = 1$, $t = \dfrac{r-1}{2}$

s , t は A によって一意的に定まる。

(証明　実の場合のみ) 定理5をヒントにして、実係数の二次形式 $A[x]$ に対し、適当に正則変数変換 $x = Px'$ を行えば、A の固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p > 0$, $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_{p+q} < 0$, $\alpha_{p+q+1}, \cdots, \alpha_n = 0$ ($p > q$) として

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& 0 \\ & -1 &&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& -1 &&&&& \\ &&&&& \alpha_{q+1} &&&& \\ &&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&& \alpha_p && \\ &&&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&&& \ddots \\ 0 &&&&&&&&& 0 \end{pmatrix} = B $$

とすることができる。(対角成分を $\alpha_1, -\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_q, -\alpha_q, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_p, 0, \cdots, 0$ のの順にして、対角成分を ($\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_1}}, -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_{p+1}}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_q}}, -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_q}}, 1, \cdots, 1$) とする行列を施せばよい。)

$$ Bx_1 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& 0 \\ & -1 &&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& -1 &&&&& \\ &&&&& \alpha_{q+1} &&&& \\ &&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&& \alpha_p && \\ &&&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&&& \ddots \\ 0 &&&&&&&&& 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} $$

$B[\boldsymbol{x}_1] = {}^t\boldsymbol{x}_1 B \boldsymbol{x}_1 = x_{11}^2 - x_{12}^2$

${}^t\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0)$をとる。次に、${}^t\boldsymbol{x}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right)$をとる。

$$B\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},\ B[\boldsymbol{x}_1] = 0,\ (B\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1 \neq 0,\ B[\boldsymbol{x}_2] = 0$$

$$B\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -1 & & & & & \\ & & & & & \alpha_{q+1} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \alpha_p & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{33} \\ x_{34} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{33} \\ -x_{34} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B[\boldsymbol{x}_3] = {}^t\boldsymbol{x}_1 B \boldsymbol{x}_1 = x_{33}^2 - x_{34}^2$

${}^t\boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1, -1, 0, \cdots, 0)$をとる。次に、${}^t\boldsymbol{x}_4 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right)$をとる。

$$B\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},\ B[\boldsymbol{x}_3] = 0,\ (B\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = 1 \neq 0,\ B[\boldsymbol{x}_4] = 0$$

以下同様にして $2t$ ($t = Min\{p, q\}$) 個のベクトルを作る。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{2t-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルを第 1 〜 第 $2t$ 列とする n 次正則行列 P を次のようにとれば

$$
P = \left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & & & & & & & \mathbf{0} \\
1 & -\frac{1}{2} & & & & & & & \\
 & & 1 & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & 1 & -\frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & 1 & \frac{1}{2} & & \\
 & & & & & 1 & -\frac{1}{2} & & \\
\hline
\mathbf{0} & & & & & & & & \boldsymbol{E}_{n-2t}
\end{array}\right)
$$

$$
{}^t\!PBP =
$$

$$
\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ {}^t\boldsymbol{x}_3 \\ {}^t\boldsymbol{x}_4 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_{2t-1} \\ {}^t\boldsymbol{x}_{2t} \\ {}^t\boldsymbol{e}_{2t+1} \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & & 0 \\
0 & -1 & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & 0 & -1 & & & & & & \\
 & & & & & \alpha_{q+1} & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & \alpha_p & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \cdots, \boldsymbol{x}_{2t-1}, \boldsymbol{x}_{2t}, \boldsymbol{e}_{2t+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
B[\boldsymbol{x}_1] & (\boldsymbol{x}_1, B\boldsymbol{x}_2) & & & & & & & & & 0 \\
(\boldsymbol{x}_2, B\boldsymbol{x}_1) & B[\boldsymbol{x}_2] & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & B[\boldsymbol{x}_{2t-1}] & (\boldsymbol{x}_{2t-1} B\boldsymbol{x}_{2t}) & & & & & & \\
 & & & (\boldsymbol{x}_{2t}, B\boldsymbol{x}_{2t-1}) & B[\boldsymbol{x}_{2t}] & & & & & & \\
 & & & & & \alpha_{q+1} & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & \alpha_p & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & \alpha_{q+1} & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & \alpha_p & & & & \\ & & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

よって、s , t は A によって一意的に定まることがわかる。

複素係数の場合は、$z = re^{i\theta} \to \sqrt{z} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ なので 主値をとって $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ とする。

実係数の場合を真似すれば、次の条件をみたす複素数を成分とする2つベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ が存在すればよい。

$A[\boldsymbol{x}] = (x\ ,\ y)\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x^2 + \beta y^2$　　（α , β , x , y は複素数）

$A\boldsymbol{x}_1 \neq 0$, $A[\boldsymbol{x}_1] = 0$, $(A\boldsymbol{x}_1\ ,\ \boldsymbol{x}_2) \neq 0$

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \\ i\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば　$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \\ i\dfrac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \end{pmatrix} \neq 0$

$A[\boldsymbol{x}_1] = \alpha\left(\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^2 + \beta\left(i\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\alpha\beta - \alpha\beta}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2} = 0$

$(A\boldsymbol{x}_1\ ,\ \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \times 1 + \left(i\dfrac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right) \times 0 = \dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \neq 0$

$\alpha = \beta$ でも問題ない。あとは、P191に習って $\boldsymbol{x}_2$ をつくればよい。

$(\alpha_1\ ,\ \alpha_2)$, $(\alpha_3\ ,\ \alpha_4)$, $\cdots$, α_r のように2つずつセットにしていけば、$rank\, A = r$ が偶数ならば $t = \dfrac{r}{2}$, $s = 0$ 、奇数ならば $t = \dfrac{r-1}{2}$, $s = 1$ となる。

二次形式 $A[x]$（$A \neq 0$）がどのような場合に一次式の積に分解されるかについて

斉一次式は（$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$）$= {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}$ なので、もし分解できたとすれば、その場合は

$A[x] = (\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$

A は対称行列なので ${}^tA[x] = A[x] = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \to 2A[x] = {}^t\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$

$\to {}^t\boldsymbol{x}(2A)\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \to A = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{a})$

したがって、$rank\,A \leqq 2$ （P.112（例1）、P. 113（例3）参照）

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立でなければ、$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ と書けるので、$b_i\boldsymbol{a}+a_i\boldsymbol{b} = (b_i+ka_i)\boldsymbol{a}$ となり $rank\,A = 1$ となる。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立のとき、$rank\,A = 2$ となることについては

$(b_1\boldsymbol{a}+a_1\boldsymbol{b} , \cdots , b_n\boldsymbol{a}+a_n\boldsymbol{b})$ のなかに一次独立な列ベクトルは2つあり、それ以上もそれ以下もないことを示せばよい。

もし、一次独立なもの存在しなければ、ある j に対し $b_i\boldsymbol{a}+a_i\boldsymbol{b} = k_i(b_j\boldsymbol{a}+a_j\boldsymbol{b})$ （$1\leqq i\leqq n$ ）となる k_i が存在するはずである。

$(b_i-k_ib_j)\boldsymbol{a}+(a_i-k_ia_j)\boldsymbol{b} = 0$　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立なので

$$b_i-k_ib_j = 0 \ (1\leqq i\leqq n) \ \rightarrow \ \boldsymbol{b} = b_j\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} , \ a_i-k_ia_j = 0 \ (1\leqq i\leqq n) \ \rightarrow \ \boldsymbol{a} = a_j\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

となり、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立であることに反する。ゆえに一次独立な列ベクトルは2つ以上ある。

一次独立であるもののなかの2つを選び、$b_i\boldsymbol{a}+a_i\boldsymbol{b}$, $b_j\boldsymbol{a}+a_j\boldsymbol{b}$ とする。

$$x(b_i\boldsymbol{a}+a_i\boldsymbol{b})+y(b_j\boldsymbol{a}+a_j\boldsymbol{b}) = (xb_i+yb_j)\boldsymbol{a}+(xa_i+ya_j)\boldsymbol{b} = 0$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立であるので

$$\begin{cases} xb_i+yb_j = 0 \\ xa_i+ya_j = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 自明な解しかもたないということは $\begin{vmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix} \neq 0$ と同値である。

次に上の2つの列ベクトルとは別の列ベクトル $b_k\boldsymbol{a}+a_k\boldsymbol{b}$ 選ぶ。このベクトルが上の2つのベクトルの線形結合で表すことができれば $rank\,A = 2$ であることを示すことができる。つまり

$$b_k\boldsymbol{a}+a_k\boldsymbol{b} = x(b_i\boldsymbol{a}+a_i\boldsymbol{b})+y(b_j\boldsymbol{a}+a_j\boldsymbol{b})$$

となる x , y が存在すればよい。

$$b_k\boldsymbol{a}+a_k\boldsymbol{b} = (b_ix+b_jy)\boldsymbol{a}+(a_ix+a_jy)\boldsymbol{b}$$

$$\begin{cases} b_ix+b_jy = b_k \\ a_ix+a_jy = a_k \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_k \\ a_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix} \neq 0 \text{ だったので } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ は存在する。}$$

END

そして、その場合 $A[x]$ は零形式になる。例えば、$(\boldsymbol{a} , \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ なる $\boldsymbol{x}$ をとれば

$A[\boldsymbol{x}] = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0$

逆に $rank\, A = 1$ または $rank\, A = 2$ （$A[\boldsymbol{x}]$ が零形式）ならば、$A[\boldsymbol{x}]$ は2つの一次形式の積に分解されることを示す。

まず、$rank\, A = 1$ ならば、定理 A により

$$\boldsymbol{A} = {}^t\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

よって、$\boldsymbol{Q}$ の第 1 行を $\boldsymbol{a}$ とすれば、$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & \ddots & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ a_2 & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ & & \ddots & \\ a_n & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & \ddots & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ a_2 & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ & & \ddots & \\ a_n & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 & \alpha_1 a_2 & \cdots & \alpha_1 a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_n \\ & & \ddots & \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a}$$

よって、$A[\boldsymbol{x}] = {}^t\boldsymbol{x}\,\alpha_1\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \alpha_1\,{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \alpha_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$

次に $rank\, A = 2$ かつ $A[\boldsymbol{x}]$ が零形式ならば 上記の変形をおこなえば (3) から

$$\boldsymbol{A} = {}^t\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

となる。$\boldsymbol{Q}$ の第 1 行を ${}^t\boldsymbol{a}$ 、第 2 行を ${}^t\boldsymbol{b}$ とすれば

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & \ddots & \\ q_{n1} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ & & \ddots & \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & \ddots & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ & & \ddots & \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11}q_{21}+q_{21}q_{11} & q_{11}q_{22}+q_{21}q_{12} & q_{11}q_{23}+q_{21}q_{13} & \cdots & q_{11}q_{2n}+q_{21}q_{1n} \\ q_{12}q_{21}+q_{22}q_{11} & q_{12}q_{22}+q_{22}q_{12} & q_{12}q_{23}+q_{22}q_{13} & \cdots & q_{12}q_{2n}+q_{22}q_{1n} \\ q_{13}q_{21}+q_{23}q_{11} & q_{13}q_{22}+q_{23}q_{12} & q_{13}q_{23}+q_{23}q_{13} & \cdots & q_{13}q_{2n}+q_{23}q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{1n}q_{21}+q_{2n}q_{11} & q_{1n}q_{22}+q_{2n}q_{12} & q_{1n}q_{23}+q_{2n}q_{13} & \cdots & q_{1n}q_{2n}+q_{2n}q_{1n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11}q_{21} & q_{11}q_{22} & q_{11}q_{23} & \cdots & q_{11}q_{2n} \\ q_{12}q_{21} & q_{12}q_{22} & q_{12}q_{23} & \cdots & q_{12}q_{2n} \\ q_{13}q_{21} & q_{13}q_{22} & q_{13}q_{23} & \cdots & q_{13}q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{1n}q_{21} & q_{1n}q_{22} & q_{1n}q_{23} & \cdots & q_{1n}q_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{21}q_{11} & q_{21}q_{12} & q_{21}q_{13} & \cdots & q_{21}q_{1n} \\ q_{22}q_{11} & q_{22}q_{12} & q_{22}q_{13} & \cdots & q_{22}q_{1n} \\ q_{23}q_{11} & q_{23}q_{12} & q_{23}q_{13} & \cdots & q_{23}q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{2n}q_{11} & q_{2n}q_{12} & q_{2n}q_{13} & \cdots & q_{2n}q_{1n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ \vdots \\ q_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ \vdots \\ q_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \end{pmatrix}$$

$= \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{a}$

よって、$A[\boldsymbol{x}] = {}^t\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$

（P. 186　交代行列の標準化）

一般の体における交代行列 A に対して、双一次形式 $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$ を考える。

${}^tA = -A$ なので $(\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}) = ({}^tA\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (-A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$

逆に、$(\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ としたら

$$(\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + \cdots + a_{1n}x_ny_1 + a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_ny_2 + \cdots + a_{n1}x_1y_n$
$+ a_{n2}x_2y_n + \cdots + a_{nn}x_ny_n$

$$-(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{Ay}) = -(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= -(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n \end{pmatrix}$$

$= -a_{11}x_1y_1-a_{12}x_1y_2-\cdots-a_{1n}x_1y_n-a_{21}x_2y_1-a_{22}x_2y_2-\cdots-a_{2n}x_2y_n-\cdots-a_{n1}x_ny_1-a_{n2}x_ny_2-\cdots-a_{nn}x_ny_n$

よって、$a_{ii}x_iy_i = -a_{ii}x_iy_i \ \rightarrow\ 2a_{ii}x_iy_i = 0 \ \rightarrow\ a_{ii} = 0$

$a_{ij}x_jy_i = -a_{ji}x_jy_i \ \rightarrow\ a_{ij} = -a_{ji}$

以上により、${}^t\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$（交代行列）となる。

ここで変数に正則一次変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Px}'$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Py}'$ を行えば

$(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{Px}'\,,\boldsymbol{APy}') = (\boldsymbol{x}'\,,{}^t\boldsymbol{PAPy}')$ すなわち、係数行列は ${}^t\boldsymbol{PAP}$ に変換される。$\boldsymbol{A}' = {}^t\boldsymbol{PAP}$（$\boldsymbol{P}$: 正則）のとき、$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}'$ と書く。

1）$rank\, \boldsymbol{A} = r$ ならば、$\boldsymbol{A}$ の r 次の主小行列式の中に $\neq 0$ なるものがある。それを $\boldsymbol{A}_1$ とすれば

$$\boldsymbol{A} \simeq \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（証明）

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ -{}^t\boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$（$\boldsymbol{A}_1$: 正則と仮定する。）

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ -{}^t\boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ -{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2+{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \\ 0 & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ が成立する。

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ -{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ 0 & \boldsymbol{A}_2+{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ -{}^t\boldsymbol{A}_{12} & -{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_2+{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix}$$

よって

$$(1') \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ -{}^t\boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2+{}^t\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix}$$

この式は $\boldsymbol{A}_1$ が正則でなくても、$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_{12}$ となるような $\boldsymbol{C}$ が存在すれば成立する。実際

${}^tA_{12}={}^tC\,{}^tA_1=-{}^tCA_1$ に注意すれば

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_1C \\ {}^tCA_1 & A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^tC & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2-{}^tCA_1C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^tC & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_1C \\ 0 & A_2-{}^tCA_1C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_1C \\ {}^tCA_1 & {}^tCA_1C+A_2-{}^tCA_1C \end{pmatrix}$$

$rank\,A=r$ ならば、A の列ベクトルの中に r 個一次独立なものが存在し、他はそれらの一次結合になる。まず、第 1 〜 第 r 列 $a_1,\cdots,a_r$ が一次独立であるように置換したい。例によってA_σ をほどこしてみる。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & a_{14} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ -a_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \qquad (\ b_2,b_3\ \text{列が一次独立とする})$$

$$=a_{14}x_1y_4-a_{14}x_4y_1+b_{12}x_1y_2-b_{12}x_2y_1+b_{13}x_1y_3-b_{13}x_3y_1+b_{23}x_2y_3-b_{23}x_3y_2+b_{24}x_2y_4-b_{24}x_4y_2+b_{34}x_3y_4-b_{34}x_4y_3$$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\quad A_\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tx\,{}^tA_\sigma AA_\sigma y=\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & a_{14} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ -a_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{23} & -b_{12} & b_{24} \\ -b_{23} & 0 & -b_{13} & b_{34} \\ b_{12} & b_{13} & 0 & a_{14} \\ -b_{24} & -b_{34} & -a_{14} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \left(A_\sigma y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right)$$

$$=a_{14}x_1y_4-a_{14}x_4y_1+b_{12}x_1y_2-b_{12}x_2y_1+b_{13}x_1y_3-b_{13}x_3y_1+b_{23}x_2y_3-b_{23}x_3y_2+b_{24}x_2y_4-b_{24}x_4y_2+b_{34}x_3y_4-b_{34}x_4y_3$$

当然だが、変数の置換をして一次独立の列を前にもってくることができることが確認できた。

$$a_k=\sum_{i=1}^{r}c_{ik}a_i\ (\ r+1\leqq k\leqq n\ ),\quad C=(\ c_{ik}\ )$$

$$a_{k+1}=c_{1,k+1}a_1+c_{2,k+1}a_2+\cdots+c_{r,k+1}a_r$$

$$a_{k+2}=c_{1,k+2}a_1+c_{2,k+2}a_2+\cdots+c_{r,k+2}a_r$$

$$a_{k+3}=c_{1,k+3}a_1+c_{2,k+3}a_2+\cdots+c_{r,k+3}a_r \qquad \to (\ a_1,a_2,\cdots,a_r\ )\begin{pmatrix} c_{1,k+1} & c_{1,k+2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,k+1} & c_{2,k+2} & \cdots & c_{2,n} \\ & & \vdots & \\ c_{r,k+1} & c_{r,k+2} & \cdots & c_{r,n} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$a_n=c_{1,n}a_1+c_{2,n}a_2+\cdots+c_{r,n}a_r$$

とおけば $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ -{}^t A_{12} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} A_1 C \\ {}^t C A_1 C \end{pmatrix}$ したがって、(1) により $A \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

$rank\, A = r$ なので $rank\, A_1 = r$, $|A_1| \neq 0$

以後 A は A_σ によって $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ -{}^t A_{12} & A_2 \end{pmatrix}$ (A_1 : 正則) になっているという前提で進める。

(定理 B) 任意の正則交代行列は次の形の行列と同値である。

(2') $$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & & & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & \alpha_2 & & & & \\ & & -\alpha_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \alpha_p \\ 0 & & & & & & -\alpha_p & 0 \end{pmatrix}$$ ($\alpha_i \neq 0$, $1 \leqq i \leqq p$)

(証明) n が奇数の場合は正則ではないので(P.85参照) n は偶数である。よって、$n = 2k$ として、k についての帰納法で証明する。

$k = 1$ の場合は明らかである。$k-1$ が成り立つと仮定し、k の場合に成り立つことを証明する。

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & a_{12} & * \\ -a_{12} & 0 & \\ \hdashline * & & * \end{array}\right)$$

とおくとき、$a_{12} \neq 0$ ならば $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$ は正則なので (1) により $A \cong \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix}$

また、$|A| = |A_1||A_2'| \neq 0$ から $|A_2'| \neq 0$ となり、A_2' は正則である。

また、$PA{}^tP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix}$ なので ${}^t(PA{}^tP) = P{}^tA{}^tP = -PA{}^tP$ であり $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix}$ は交代行列である。したがって、${}^t\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & {}^t(A_2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & -A_2' \end{pmatrix}$ となることから A_2' も交代行列となる。よって帰納法の仮定から、A_2' は (2') の形の行列に同値となる。

$a_{12} = 0$ の場合は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & & 0 \end{pmatrix}$$ ($a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$)

$|A| \neq 0$ なので 第二行に 0 でないものある。それを a_{2i} とする。そこで A_σ を第一列と第 i 列を入れかえるものとすると ${}^t A_\sigma A A_\sigma$ の (1 , 1) 成分は 0 、(2 , 1) 成分は a_{2i} 、(2 , 2) 成分は 0 (1 , 2) 成分は $-a_{2i}$ となる。なぜなら、(1 , 2) には a_{i2} が入るからである。

よって、上記により、A は (2') の形の行列と同値となる。***END***

また、1) から、$rank\,A$ は $rank\,A_1$ と等しく $|A_1| \neq 0$ なので $rank\,A$ は偶数となる。

以上をまとめると、任意の交代行列は次の形をしている行列と同値である。

$$A \cong \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & & & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & \alpha_p & & & \\ & & & -\alpha_p & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

次に、交代行列 A に対し、二次形式 $A[\boldsymbol{x}] = (\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x}\,,A\boldsymbol{x}) = -A[\boldsymbol{x}]$

よって、交代行列の二次形式は任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $A[\boldsymbol{x}] = 0$ であり、常に零形式である。

$A \neq 0$ ならば、$A\boldsymbol{x} \neq 0$, $A[\boldsymbol{x}] = 0$ となる $\boldsymbol{x}$ が存在する。

そのような $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_1$ とする。これに対し、$(A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2) \neq 0$ となる $\boldsymbol{x}_2$ が存在する。

必要があれば $\boldsymbol{x}_2$ を $-\dfrac{1}{(A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2)}\boldsymbol{x}_2$ でおきかえれることにより、$(A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2) = -1$ としてよい。

そのとき、$A[\boldsymbol{x}_2] = 0$ である。

$\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2$ は一次独立である。もし $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 = 0$ となる自明ではない α , β があったとすれば $\boldsymbol{x}_2 = -\dfrac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{x}_1$ となり、$(A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2) = -\dfrac{\alpha}{\beta}(A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_1) = -\dfrac{\alpha}{\beta}A[\boldsymbol{x}_1] = 0$ となり矛盾する。

そこで、$\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2$ を第 1 , 第 2 列とする n 次正則行列を P とすれば

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ {}^t\boldsymbol{p}_3 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} A(\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2\,,\boldsymbol{p}_3\,,\cdots,\boldsymbol{p}_n) = \begin{pmatrix} A[\boldsymbol{x}_1] & (\boldsymbol{x}_1\,,A\boldsymbol{x}_2) & \\ (\boldsymbol{x}_2\,,A\boldsymbol{x}_1) & A[\boldsymbol{x}_2] & * \\ & & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{x}_2\,,A\boldsymbol{x}_1) = -1$ ならば $(\boldsymbol{x}_1\,,A\boldsymbol{x}_2) = ({}^tA\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2) = (-A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2) = -(A\boldsymbol{x}_1\,,\boldsymbol{x}_2) = 1$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & * \\ & & & \\ & * & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ {}^{t}A_{12} & A_2 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ Q = \begin{pmatrix} E & A_1^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

となる。よって、(1') により、 $A \cong A'' \simeq {}^{t}QA'Q \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & B \end{pmatrix}$

このとき、B は交代行列である。${}^{t}({}^{t}Q{}^{t}PAPQ) = {}^{t}Q{}^{t}P{}^{t}APQ = -{}^{t}Q{}^{t}PAPQ$ なので

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & B \end{pmatrix}$ は交代行列である。

$${}^{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & {}^{t}B \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & -B \end{pmatrix}$$

よって、${}^{t}B = -B$ である。

つまり、B は零形式なのでこの操作をつづけることができる。しかし、最後に零を表わさない二字形は得られない。なぜなら、交代行列は常に零形式だからである。結局

$$A \cong \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

あるいは、P.189問9のように底の順をかえれば

$$A \cong \begin{pmatrix} 0 & E_p & 0 \\ -E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この結果により、A を任意の $2p$ 次交代行列とすれば(体 K のなかで)

$$A = {}^{t}PJP \ , \ J = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}$$

と表わされる。このとき、$|P|$ は A によって一意的に定まる。

それを示すには、${}^tTJT=J$ のとき $|T|=1$ なることを示せばよい。

なぜなら、$A={}^tQJQ$ となる Q が存在したとする。P , Q ともに正則なので ${}^tPJP={}^tQJQ$ となる。

$({}^tQ)^{-1}\,{}^tPJPQ^{-1}=J \quad\rightarrow\quad {}^t(PQ^{-1})\,J\,(PQ^{-1})=J$

つまり、$|PQ^{-1}|=\dfrac{|P|}{|Q|}=1$ となり、$|P|=|Q|$ となることがわかる。

そこで、$T=\begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}$ とおけば

$${}^tTJT=\begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tT_{21} \\ {}^tT_{12} & {}^tT_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tT_{21} \\ {}^tT_{12} & {}^tT_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{21} & T_2 \\ -T_1 & -T_{12} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} {}^tT_1T_{21}-{}^tT_{21}T_1 & {}^tT_1T_2-{}^tT_{21}T_{12} \\ {}^tT_{12}T_{21}-{}^tT_2T_1 & {}^tT_{12}T_2-{}^tT_2T_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}$$

よって、${}^tT_1T_2-{}^tT_{21}T_{12}=E_p$, ${}^tT_1T_{21}={}^tT_{21}T_1$, ${}^tT_{12}T_2={}^tT_2T_{12}$

$|T_1|\neq 0$ ならば、P.69（例1）から

$|T|=|T_1|\,|T_2-T_{21}T_1^{-1}T_{12}|=|{}^tT_1|\,|T_2-T_{21}T_1^{-1}T_{12}|=|{}^tT_1T_2-{}^tT_1T_{21}T_1^{-1}T_{12}|$

$=|{}^tT_1T_2-{}^tT_{21}T_1T_1^{-1}T_{12}|=|{}^tT_1T_2-{}^tT_{21}T_{12}|=|E_p|=1$

$|T_1|=0$ の場合は？？？

次に、A によって $|P|$ が確定するので、$Pf\,A=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}|P|$ と定義できる。

$Pf\,({}^tQAQ)=Pf\,({}^tQ\,{}^tPJPQ)=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}|PQ|=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}|P|\,|Q|=|Q|\,Pf\,A$

$Pf\,J=Pf\,({}^t(P^{-1})AP^{-1})=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}|P|\,|P|^{-1}=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$

$\dfrac{p(p-1)}{2}={}_p\mathrm{C}_2$ についてはわからない。（ここまでにする。）

逆については、有理関数体についてもう少し調べる必要がある。（数学の基礎　齋藤正彦 著 P.65　参照）

（P. 187　研究課題 2　直交群の *Lie* 環）できるだけ！

$O(n)$ の一点における接平面について考える。

3 次元空間の中に1つの微分可能な曲面 α が与えられたとする。$P_0\in\alpha$ の近傍におけるパラメータ表示を

$$\alpha\ :\quad \begin{cases} x_1 = x_1(u_1\ ,u_2) \\ x_2 = x_2(u_1\ ,u_2) \\ x_3 = x_3(u_1\ ,u_2) \end{cases}$$

とし、P_0 はパラメータの値 ($u_1^0\ ,u_2^0$) に対応するものとする。α の接平面 π は次の式で定義される平面である。

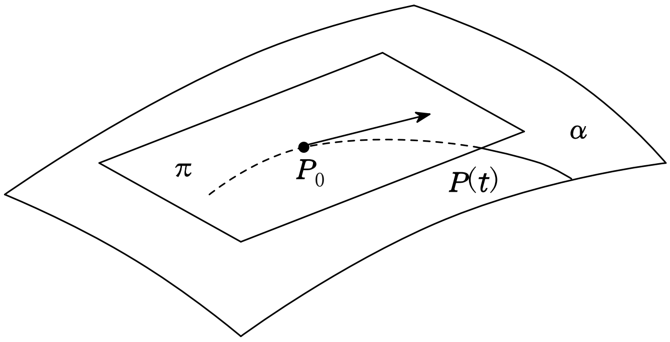
$$f(u_1\ ,u_2) = \begin{pmatrix} x_1(u_1\ ,u_2) & x_2(u_1\ ,u_2) & x_3(u_1\ ,u_2) \end{pmatrix}$$

$$f'(u_1^0\ ,u_2^0)du = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1-u_1^0 \\ u_2-u_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}(u_1-u_1^0)+\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}(u_2-u_2^0) \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}(u_1-u_1^0)+\dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}(u_2-u_2^0) \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1}(u_1-u_1^0)+\dfrac{\partial x_3}{\partial u_2}(u_2-u_2^0) \end{pmatrix}$$

また、π は P_0 を通り

$$a_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \end{pmatrix}\ ,\ a_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$ によって張られる平面である。

さて、α の上に P_0 を通る任意の微分可能な曲線 $P = P(t) = (u_1(t)\ ,u_2(t))$ を引きその P_0 における接ベクトルを求めればその成分は



$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du_1}{dt} \\ \dfrac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \dfrac{du_1}{dt} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \dfrac{du_2}{dt}$$

で与えられる。よって、$a_1\ ,a_2$ の一次結合になる。P_0 を通り、接ベクトル全体によって張られる平面が、P_0 における α の接平面 π に他ならない。言いかえれば、P_0 を通る任意の微分可能な曲線の P_0 における接ベクトル全体によって張られる平面であるといえる。接平面上にあるベクトル全体の作るベクトル空間を”接ベクトル空間”という。上の例では、接ベクトル空間は $\{\{a_1\ ,a_2\}\}$

$O(n)$ の単位元（ E ）における接ベクトル空間を求める。

$T(t)$ （ $T(0)=E$ ）を $O(n)$ 上の任意の曲線とする。

$T(t) \in O(n)$ なので、${}^tT(t)T(t)=E$

行列値関数の微分

$\lim_{t \to a} \dfrac{A(t)-A(a)}{t-a}$ が存在するとき、$A'(a)$ で表す。

（ｉ）$A(t)$ が（ n, m ）行列、$B(t)$ が（ m, ℓ ）行列で、ともに微分可能ならば、$A(t)B(t)$ も微分可能であって （ $A(t)B(t)$ ）' $= A(t)'B(t)+A(t)B(t)'$

（ⅱ）$A(t)$ が n 次正則行列で微分可能ならば、$A(t)^{-1}$ も微分可能で

$(A(t)^{-1})' = -A(t)^{-1} \cdot A(t)' \cdot A(t)^{-1}$

（証明ｉ）

$A(t)=(a_{ij}(t))$, $B(t)=(b_{jk}(t))$ とすれば、$A(t)B(t)=(c_{ik}(t))$ としたとき

$c_{ik}(t)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)b_{jk}(t)=a_{i1}(t)b_{1k}(t)+a_{i2}(t)b_{2k}(t)+\cdots+a_{im}(t)b_{mk}(t)$

$c_{ik}(t)'=a_{i1}(t)'b_{1k}(t)+a_{i1}(t)b_{1k}(t)'+a_{i2}(t)'b_{2k}(t)+a_{i2}(t)b_{2k}(t)'+\cdots+a_{im}(t)'b_{mk}(t)+a_{im}(t)b_{mk}(t)'$

$=a_{i1}(t)'b_{1k}(t)+a_{i2}(t)'b_{2k}(t)+\cdots+a_{im}(t)'b_{mk}(t)+a_{i1}(t)b_{1k}(t)'+a_{i2}(t)b_{2k}(t)'+\cdots+a_{im}(t)b_{mk}(t)'$

$=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)'b_{jk}(t)+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)b_{jk}(t)'$

よって （ $A(t)B(t)$ ）' $=\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)'b_{jk}(t)+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)b_{jk}(t)'\right)=A(t)'B(t)+A(t)B(t)'$

（証明ⅱ） 線型代数入門　齋藤正彦 著　P. 204

$A(t)$ の余因子を Δ_{ij} とすれば、$A(t)^{-1}$ の（ i, j ）成分は $\dfrac{\Delta_{ji}}{|A(t)|}$ である。分子分母ともに $a_{ij}(t)$ の多項式であり、$A(t)$ は正則なので、$|A(t)| \neq 0$ であるから、$A(t)^{-1}$ は微分可能である。

$A(t)A(t)^{-1}=E$ の両辺を微分すれば

$A(t)'A(t)^{-1}+A(t)(A(t)^{-1})'=0 \quad \to \quad (A(t)^{-1})'=-A(t)^{-1}A(t)'A(t)^{-1}$　　（END）

${}^tT(t)T(t)=E$ の両辺を微分すると

$$\frac{d\,{}^tT(t)}{dt}T(t)+{}^tT(t)\frac{dT(t)}{dt}=0$$

よって E における接ベクトル（ n 次ベクトルで表される）を $X=\left[\dfrac{dT}{dt}\right]_{t=0}$ とおけば、$T(0)=E$ なので

${}^tX+X=0 \quad \leftarrow \quad X$ は交代行列となる。

逆に任意の交代行列 X が $O(n)$ の E における接ベクトルになることは、たとえば $Cayley$ 変換によって定義される曲線

$T(t) = (E+\frac{t}{2}X)(E-\frac{t}{2}X)^{-1}$ （注　${}^t(\frac{t}{2}X) = -\frac{t}{2}X$ なので、交代行列である）

${}^tT(t)T(t) = (E+\frac{t}{2}X)^{-1}(E-\frac{t}{2}X)(E+\frac{t}{2}X)(E-\frac{t}{2}X)^{-1} = E$　←　交換可能

$T(t) \in O(n)$ であり、$T(0) = E$

$T(t)' = \frac{1}{2}(E-\frac{t}{2}X)^{-1}+(E+\frac{t}{2}X)((E-\frac{t}{2}X)^{-1})'$

$= \frac{1}{2}X(E-\frac{t}{2}X)^{-1}+(E+\frac{t}{2}X)((E-\frac{t}{2}X)^{-1} \cdot \frac{1}{2}X \cdot (E-\frac{t}{2}X)^{-1})$

$T(0)' = \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X = X$

よって、E における接ベクトルが X になる。

他の例として指数関数（P. 36 参照）を使って

(4) $T(t) = exp\ tX = E+tX+\frac{1}{2!}(tX)^2+\frac{1}{3!}(tX)^3+\cdots$

なる曲線を考えれば

${}^tT(t) = E+t{}^tX+\frac{1}{2!}(t{}^tX)^2+\frac{1}{3!}(t{}^tX)^3+\cdots = E-tX+\frac{1}{2!}(-tX)^2+\frac{1}{3!}(-tX)^3+\cdots$

$= exp\ (-tX)$

${}^tT(t)T(t) = exp\ tX \cdot exp\ (-tX) = exp\ (tX-tX) = exp\ 0 = E$

よって、$T(t) \in O(n)$, $T(0) = E$, $T(0)' = X$ なので、$T(t)$ は $O(n)$ 上の曲線であって、その E における接ベクトルは X となる。

よって、$O(n)$ の E における接ベクトル空間は交代行列全体の作るベクトル空間である？？？

(4) で定義される曲線は、$O(n)$ の部分群になっている。このような部分群を "1 パラメータ部分群" という。仮にその集合を G とすれば、$T_1(t) = exp\ tX_1$, $T_2(t) = exp\ tX_2$ としたとき、$T_1(t)T_2(t) = exp\ (tX_1+tX_2) = exp\ t(X_1+X_2)$, ${}^t(X_1+X_2) = {}^tX_1+{}^tX_2 = -(X_1+X_2)$ なので、$T_1(t)T_2(t) \in G$　単位元は E で逆元は ${}^tT(t)$ で与えられる。よって、G は群である。

上記の考察は、任意の Lie 群（行列の）に適用される。行列の Lie 群 G に対して、その単位元 E における接ベクトル空間 L をつくることができる。またそのとき逆に G の単位元 E を含む連結成分は $exp\ X$ ($X \in L$) によって生成される。

L は単にベクトル空間であるばかりではなく次のような性質をもっている。

$X , Y \in L$ ならば、$[X , Y] = XY-YX \in L$

実際、$X \in L$ ならば、$tX \in L$ なので　$exp\ (tX) \in G$ であるから、$X , Y \in L$ ならば

$C(t) = exp\ (tX) \cdot exp\ (tY) \cdot exp\ (-tX) \cdot exp\ (-tY) \in G$

これを t の冪級数に展開すれば（ t^2 までの項を前に出せば）

$C(t) = (E+tX+\frac{t^2}{2!}X^2+\cdots)(E+tY+\frac{t^2}{2!}Y^2+\cdots)(E-tX+\frac{t^2}{2!}X^2-\cdots)(E-tY+\frac{t^2}{2!}Y^2-\cdots)$

$= (E+tY+\frac{t^2}{2!}Y^2+tX+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\cdots)(E-tY+\frac{t^2}{2!}Y^2-tX+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\cdots)$

$= (E+tY+tX+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^2}{2!}Y^2+\cdots)(E-tY-tX+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^2}{2!}Y^2+\cdots)$

$= E-tY-tX+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^2}{2!}Y^2+tY(E-tY-tX)+tX(E-tY-tX)+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^2}{2!}$

$Y^2+\cdots$

$= E-tY-tX+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^2}{2!}Y^2+tY-t^2Y^2-t^2YX+tX-t^2XY-t^2X^2+t^2XY+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^2}{2!}Y^2$

$+\cdots$

$= E-tY-tX+t^2XY+t^2X^2+t^2Y^2+tY-t^2Y^2-t^2YX+tX-t^2XY-t^2X^2+t^2XY+\cdots$

$= E+t^2XY-t^2YX+\cdots$

$= E+t^2(XY-YX)+\cdots$

よって、$C(\sqrt{t}) = E+t\,(XY-YX)+\cdots$ なる曲線を考えれば、$C(0) = E$, $(C(\sqrt{0}))' = XY-YX$

その E における接ベクトルは $[X, Y]$ になる。

$[X, Y]$ は X についても Y についても線型である。

$[\alpha X_1+\beta X_2, Y] = (\alpha X_1+\beta X_2)Y-Y(\alpha X_1+\beta X_2) = \alpha X_1Y+\beta X_2Y-\alpha YX_1-\beta YX_2 = \alpha$

$X_1Y-\alpha YX_1+\beta X_2Y-\beta YX_2$

$=\alpha[X_1, Y]+\beta[X_2, Y]$

$[X, \alpha Y_1+\beta Y_2] = X(\alpha Y_1+\beta Y_2)-(\alpha Y_1+\beta Y_2)X = \alpha XY_1+\beta XY_2-\alpha Y_1X-\beta Y_2X = \alpha X$

$Y_1-\alpha Y_1X+\beta XY_2-\beta Y_2X$

$=\alpha[X, Y_1]+\beta[X, Y_2]$

普通の積と異なり次の様な法則を満足する。(P. 197問2)

(5) $[X, X] = XX-XX = 0$

(6) $[X, [Y, Z]] = [X, YZ-ZY] = X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X = XYZ-XZY-YZX+ZYX$

$[Y, [Z, X]] = [Y, ZX-XZ] = Y(ZX-XZ)-(ZX-XZ)Y = YZX-YXZ-ZXY+XZY$

$[Z, [X, Y]] = [Z, XY-YX] = Z(XY-YX)-(XY-YX)Z = ZXY-ZYX-XYZ+YXZ$

$[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]] = XYZ-XZY-YZX+ZYX+YZX-YXZ-ZXY+XZY$

$+ZXY-ZYX-XYZ+YXZ = 0$ (*Jacobi* の等式)

このような乗法の定義されたベクトル空間を一般に **Lie 環** という。

(P. 197　問3)

任意の n 次正方行列 X , Y に対し

$$\left[\frac{d}{dt}(\,exp\ tX\,)Y(\,exp\ tX\,)^{-1}\right]_{t=0} = [X\ ,\ Y]$$

$$(\,exp\ tX\,)Y(\,exp\ tX\,)^{-1} = (\,E+tX+\frac{t^2}{2!}X^2+\cdots\,)\,Y\,(\,E-tX+\frac{t^2}{2!}X^2-\cdots\,)$$

$$= (\,Y+tXY+\frac{t^2}{2!}X^2Y+\cdots\,)(\,E-tX+\frac{t^2}{2!}X^2-\cdots\,)$$

$$= Y-tYX+\frac{t^2}{2!}YX^2+tXY+\frac{t^2}{2!}YX^2+\cdots$$

$$\frac{d}{dt}(\,Y-tYX+\frac{t^2}{2!}YX^2+tXY+\frac{t^2}{2!}YX^2+\cdots\,) = (\,XY-YX\,)+tYX^2+\cdots$$

$$\left[\frac{d}{dt}(\,exp\ tX\,)Y(\,exp\ tX\,)^{-1}\right]_{t=0} = [X\ ,\ Y]$$

Lie 群 G の局所的な解析的な議論　⇔　***Lie*** 環 L の代数的な議論

(P. 197　$O(3)$ の *Lie* 環について)

$O(3)$ の1パラメータ部分群として P. 181の例から、一つの軸のまわりの等速回転を考えてみる。

$$T(t) = P\begin{pmatrix} cos\ \omega t & -sin\ \omega t & 0 \\ sin\ \omega t & cos\ \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\ ,\ |\,P\,| = 1\ ,\ {}^tP = P^{-1}$$

この回転軸の正の方向の単位ベクトルは P の第 3 ベクトル $\begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}$ だった。

$$T(0) = PEP^{-1} = E$$

群になっているかは

$$T_1(t) = P\begin{pmatrix} cos\ \omega_1 t & -sin\ \omega_1 t & 0 \\ sin\ \omega_1 t & cos\ \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\ ,\ T_2(t) = P\begin{pmatrix} cos\ \omega_2 t & -sin\ \omega_2 t & 0 \\ sin\ \omega_2 t & cos\ \omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$ に対し

$$T_1(t)T_2(t) = P\begin{pmatrix} cos\ \omega_1 t & -sin\ \omega_1 t & 0 \\ sin\ \omega_1 t & cos\ \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} cos\ \omega_2 t & -sin\ \omega_2 t & 0 \\ sin\ \omega_2 t & cos\ \omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} cos\ \omega_1 t & -sin\ \omega_1 t & 0 \\ sin\ \omega_1 t & cos\ \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\ \omega_2 t & -sin\ \omega_2 t & 0 \\ sin\ \omega_2 t & cos\ \omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \cos(\omega_1+\omega_2)t & -\sin(\omega_1+\omega_2)t & 0 \\ \sin(\omega_1+\omega_2)t & \cos(\omega_1+\omega_2)t & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

単位元は E 、逆元は $-\omega$ とすればよい。

さて、$T(0) = E$ における接ベクトルは

$$X = T(0)' = \left[P\begin{pmatrix}-\omega\sin\omega t & -\omega\cos\omega t & 0\\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right]_{t=0} = P\begin{pmatrix}0&-\omega&0\\ \omega&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$$

である。

$$P = \begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-&0\end{pmatrix}$$ とおけば

$$\begin{pmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\omega&0\\ \omega&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}{}^t\!\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\omega&0\\ \omega&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}&p_{21}&p_{31}\\p_{12}&p_{22}&p_{32}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p_{12}\omega&-p_{22}\omega&-p_{32}\omega\\ p_{11}\omega&p_{21}\omega&p_{31}\omega\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & -p_{11}p_{22}\omega+p_{12}p_{21}\omega & -p_{11}p_{32}\omega+p_{12}p_{31}\omega\\ p_{11}p_{22}\omega-p_{12}p_{21}\omega & 0 & -p_{21}p_{32}\omega+p_{22}p_{31}\omega\\ p_{11}p_{32}\omega-p_{12}p_{31}\omega & p_{21}p_{32}\omega-p_{22}p_{31}\omega & 0\end{pmatrix}$$

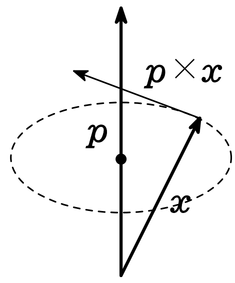
$$= \begin{pmatrix}0 & -\begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{vmatrix}\omega & -\begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{31}&p_{32}\end{vmatrix}\omega\\ \begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{vmatrix}\omega & 0 & -\begin{vmatrix}p_{21}&p_{22}\\p_{31}&p_{32}\end{vmatrix}\omega\\ \begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{31}&p_{32}\end{vmatrix}\omega & \begin{vmatrix}p_{21}&p_{22}\\p_{31}&p_{32}\end{vmatrix}\omega & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-\omega p_{33}&\omega p_{23}\\ \omega p_{33}&0&-\omega p_{13}\\ -\omega p_{23}&\omega p_{13}&0\end{pmatrix}$$ ← P.130問5
P.321 上4行

$$\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{z}{\omega}\\ \dfrac{y}{\omega}\\ -\dfrac{x}{\omega}\end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}-z\\y\\-x\end{pmatrix} \rightarrow \omega\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\y\\-x\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-z\\y\\-x\end{pmatrix}$ は回転軸の正の方向を向き、長さが ω であるベクトルとなる。このベクトルをあらためて

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ とおけば、$X = \begin{pmatrix} 0 & -P_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$ であって、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\left[\frac{d}{dt}T(t)\boldsymbol{x}\right]_{t=0} = X\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -P_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_3x_2+p_2x_3 \\ -p_1x_3+p_3x_1 \\ p_1x_2-p_2x_1 \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & x_2 \\ p_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_3 & x_3 \\ p_1 & x_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_1 & x_1 \\ p_2 & x_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x}$$

したがって、等速回転運動 $\boldsymbol{x}(t) = T(t)\boldsymbol{x}$ の $t = 0$ における速度

ベクトルは $[\,\boldsymbol{x}(t)' = T(t)'\boldsymbol{x}]_{t=0} = X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x}$ で与えられる。空間の点 $\boldsymbol{x}$ にベクトル $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x}$ を対応させる対応を($\boldsymbol{p}$ を回転軸とする)”瞬間回転”(あるいは”無限小回転”)という。

Lie 群、*Lie* 環に関しては発展課題であって、説明が不十分である。他書で学んだ方がよい。

(P. 200　双対空間) (ベクトルと行列　高橋恒郎 著　第5章参照)

計量ベクトル空間では内積が定義されているので、すべての一次写像(一次形式)はベクトルとの内積の形で表すことができた。内積の定義されてない一般のベクトル空間ではどうであろうかということである。

双対空間の定義

V を K 上の n 次元ベクトル空間とする。V 上の斉一次関数、すなわち V から K への一次写像全体の集合を V^* で表す。

$f\,, g \in V^*\,,\ \alpha \in K$ に対し、和 $f+g$ およびスカラー倍 αf を

(1) $(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$, $(\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$　$(\boldsymbol{x} \in V)$

により定義する。

(定理 1) V^* は上記の演算に関して K 上の n 次元ベクトル空間になる。そして、V^* を V の双対空間という。

(証明) (1) から、任意の $f\,, g \in V^*$ に対し、$\boldsymbol{x} \in V$, $\alpha \in K$ のとき

$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$, $(\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$

どちらも右辺は一次写像であり、K の元なので加法とスカラー倍が定義されているから

$(f+g)(x+y)=f(x+y)+g(x+y)=f(x)+f(y)+g(x)+g(y)$　（ $x, y\in V$ ）

$=f(x)+g(x)+f(y)+g(y)=(f+g)(x)+(f+g)(y)$

$(\alpha f)(\kappa x)=\alpha f(\kappa x)=\alpha\kappa f(x)=\kappa(\alpha f)(x)$　（ $\alpha, \kappa\in K, x\in V$ ）

よって、$f+g, \alpha f\in V^*$ となる。

ベクトル空間であることは、第Ⅲ章の(1.1) ～ (2.4) を検証すればよい。特に零ベクトル（写像）に当たるものは V のすべてのベクトルに 0 を対応させる一次写像 ($0(x)=0$)で与えられると考えればよい。たとえば、(1.1) は、任意の $x\in V$ に対して

$((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)=f(x)+(g+h)(x)=(f+(g+h))(x)$

よって、$(f+g)+h=f+(g+h)$ である。

（補題） V の基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に対して、V^* の基底 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ で、

(2)　$f_i(e_j)=\delta_{ij}$（ $i, j=1, 2, \cdots, n$ ）

をみたすものが唯一つ存在する。したがって、特に $dim\ V=dim\ V^*$ である。

（証明） $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を V の基底とする。V のベクトルに対して、この基底に関する i 番目の成分を対応させる写像を f_i とすると、

$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$, $y=y_1e_1+\cdots+y_ne_n$ なる V の任意のベクトル x, y に対して

（ⅰ） $f_i(x)=x_i$, $f_i(y)=y_i$ （ $i=1, 2, \cdots, n$ ）

であり、任意のスカラー α , β に対して

$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1)e_1+\cdots+(\alpha x_n+\beta y_n)e_n$

であるから

$f_i(\alpha x+\beta y)=\alpha x_i+\beta y_i=\alpha f_i(x)+\beta f_i(y)$

となって、f_i は $V\to K$ の一次写像である。すなわち、$f_i\in V^*$ であり、特に e_j に対して (2) が成り立つ。

$f\in V^*$ を任意の一次写像とし

（ⅱ） $f(e_i)=\alpha_i$ （ $i=1, 2, \cdots, n$ ）

とすると、$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in V$ に対して

$(\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_nf_n)(x)=\alpha_1f_1(x)+\cdots+\alpha_nf_n(x)=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$

$=f(e_1)x_1+\cdots+f(e_n)x_n=f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=f(x)$

となり、$\boldsymbol{x}$ は V の任意のベクトルだから

（iii）$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$

を得る。つまり、任意の $f \in V^*$ は f_i の一次結合で表すことができることになる。

次に $f_1, \cdots, f_n$ が一次独立であることを示す。

$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$ （任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $0(\boldsymbol{x}) = 0$）

$\alpha_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_n f_n(\boldsymbol{x}) = 0$

が恒等的に成り立つのであるから、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ としてみると

$\alpha_1 f_1(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + \alpha_n f_n(\boldsymbol{e}_1) = \alpha_1 = 0$

同様に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ としてみると

$\alpha_1 f_1(\boldsymbol{e}_i) + \cdots + \alpha_n f_n(\boldsymbol{e}_i) = \alpha_i = 0$

となり、$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ とならなければならない。よって、一次独立である。

これを与えられた V の底 $(\boldsymbol{e}_i)$ と双対的な V^* の底、または単に $(\boldsymbol{e}_i)$ の**双対底**という。底の個数から $dim\ V = dim\ V^* = n$ である。

$(f_1', \cdots, f_n')$ が (4) をみたす V^* の基底とすると、任意の $\boldsymbol{x}$ に対して

$f_i'(\boldsymbol{x}) = f_i'(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_i = f_i(\boldsymbol{x})$

だから $f_i' = f_i$ である。したがって (4) をみたす V^* の基底は $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に対して唯一つ存在する。

$dim\ V^* = dim\ K^n = n$ であり、ともに次数の等しい有限ベクトル空間なので $V^* \cong K^n$ である。
(P.125参照)

ここで注目する点は V の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に対する V^* の基底 $(f_1, \cdots, f_n)$ の間に次のような関係がある。

任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して、$f_i(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{e}_i$ に関する成分なので

$\boldsymbol{x} = f_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + f_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \cdots + f_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_n$ …（iv）

任意の一次写像 $f \in V^*$ に対して

$f = f(\boldsymbol{e}_1)f_1 + f(\boldsymbol{e}_2)f_2 + \cdots + f(\boldsymbol{e}_n)f_n$ …（v）

特に（v）は任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して成り立つので $\boldsymbol{x}$ の存在を忘れてもよい。

定理 1 から V^{**} は V^* から K への一次写像全体の作るベクトル空間であることがわかる。

（定理 2）$V^{**} \cong V$

ともに有限次元ベクトル空間で $dim\ V^{**} = dim\ V$ なので同型になることは明らかであるが、特別な同型写像が存在する。それを次のように定義しΦとする。

まず、V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、V^* 上の一次写像 ϕ_x を次のように定める。任意の $\boldsymbol{f} \in V^*$ に対して

(4) $\phi_x(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

とする。$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in V^*$, α, $\beta \in K$ としたとき

$\phi_x(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \beta \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \alpha \phi_x(\boldsymbol{f}) + \phi_x(\boldsymbol{g})$

となるから ϕ_x は V^* 上の一次写像である。したがって、$\phi_x \in V^{**}$ となる。よって

V から V^{**} への写像Φ ($\Phi(\boldsymbol{x}) = \phi_x(\boldsymbol{f})$) が得られる。

この写像Φは一次写像である。実際 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, α, $\beta \in K$ としたとき、任意の $\boldsymbol{f} \in V^*$ に対して

$\Phi(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \beta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \alpha \phi_x(\boldsymbol{f}) + \beta \phi_y(\boldsymbol{f}) = \alpha \Phi(\boldsymbol{x}) + \beta \Phi(\boldsymbol{y})$

となる。

また、Φの核 ($\Phi^{-1}(0)$) を考えてみる。($\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$) を V の基底とし、($\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$) をその双対基底とする。もし $\Phi(\boldsymbol{x}) = 0$ とすると、すべての $\boldsymbol{f} \in V^*$ に対して $\phi_x(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ となるから特に $\boldsymbol{f}_i \in V^*$ であることから $\phi_x(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) = 0$ となる。したがって（ⅳ）から $\boldsymbol{x} = 0$ を得る。

つまり、Φの核は {0} ということになり単射である。$dim\ V^{**} = dim\ V$ だったのでΦは同型写像ということになる。

また $\phi_{e_i}(\boldsymbol{f}_j) = \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{e}_i) = \delta_{ij}$

となるので V^{**} の基底は ($\phi_{e_1}, \cdots, \phi_{e_n}$) となり、($\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$) の双対底になる。

（証明）

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_n \in V$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{f}_2 + \cdots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{f}_n \in V^*$

ϕ_x を V^{**} の任意の一次写像とし

$\phi_x(\boldsymbol{f}_i) = \alpha_i$ （$i = 1, 2, \cdots, n$）

とすると、$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{f}_2 + \cdots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{f}_n$ に対して

$(\alpha_1 \phi_{e_1} + \alpha_2 \phi_{e_2} + \cdots + \alpha_n \phi_{e_n})(\boldsymbol{f})$

$= \alpha_1 \phi_{e_1}(\boldsymbol{f}) + \alpha_2 \phi_{e_2}(\boldsymbol{f}) + \cdots + \alpha_n \phi_{e_n}(\boldsymbol{f})$

$= \alpha_1 \phi_{e_1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{f}_2 + \cdots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{f}_n) + \alpha_2 \phi_{e_2}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{f}_2 + \cdots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{f}_n) +$

$\cdots + \alpha_n \phi_{e_n}(f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \cdots + f(e_n)f_n)$

$= \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \cdots + \alpha_n f(e_n)$

$= \phi_x(f_1)f(e_1) + \phi_x(f_2)f(e_2) + \cdots + \phi_x(f_n)f(e_n)$

$= \phi_x(f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \cdots + f(e_n)f_n)$

$= \phi_x(f)$

$f \in V^*$ は任意だったので

$\phi_x = \alpha_1 \phi_{e_1} + \alpha_2 \phi_{e_2} + \cdots + \alpha_n \phi_{e_n}$

を得る。

もしスカラー $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ に対して

$\beta_1 \phi_{e_1} + \beta_2 \phi_{e_2} + \cdots + \beta_n \phi_{e_n} = 0$

とすると、任意の f_j に対して $\phi_{e_j}(f_j) = 1$ で、$i \neq j$ ならば $\phi_{e_i}(f_j) = 0$ だから

$0 = 0(f_j) = (\beta_1 \phi_{e_1} + \beta_2 \phi_{e_2} + \cdots + \beta_n \phi_{e_n})(f_j) = \beta_j$

となり $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$ を得る。したがって（$\phi_{e_1}, \cdots, \phi_{e_n}$）は一次独立である。

$\phi_x = \phi_x(f_1)\phi_{e_1} + \phi_x(f_2)\phi_{e_2} + \cdots + \phi_x(f_n)\phi_{e_n}$

$= f_1(x)\phi_{e_1} + f_2(x)\phi_{e_2} + \cdots + f_n(x)\phi_{e_n}$ …（vi）

このことは、（$\phi_{e_1}, \cdots, \phi_{e_n}$）を基底とした場合 ϕ_x の成分は（$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$）であり、$x$ の（$e_1, \cdots, e_n$）を基底とした成分に等しいことがわかる。

（P. 202　定理 2の意味）

写像Φは $x \in V$ に対して ϕ_x を対応させているので、この対応には基底が関係していない。したがって、自然に、内在的に定義されている。これを標準的な同型写像と呼ぶ。

そして、この同型により V と V^{**} を同一視することにすれば、V が有限次元の場合

(5)　$V = V^{**}$（すなわち、$x \in V$ と $\phi_x \in V^{**}$ を同一視するのである。）

これは、x はV のベクトルであると同時に V^* 上の一次写像である。逆に、f は V 上の一次写像であると同時に V^* のベクトルであると解釈するのである。言い方をかえればすれば、x に f を作用させた $f(x)$ を f に x を作用させたと考えてもよいだろうということである。いずれにしても $f(x)$ にかわりはないわけである。したがって $\phi_x = x$ としたことにより（iv）、（vi）を見比べると

$x = f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + \cdots + f_n(x)e_n$

$\phi_x = f_1(x)\phi_{e_1} + f_2(x)\phi_{e_2} + \cdots + f_n(x)\phi_{e_n}$

から納得がいける。

つまり、任意の $f \in V^*$ に対して、x を一次写像と考え

$x(f) = f(x)$

とみることができる。(x と f の双対性がはっきりする。) また、$V^{**} = (V^*)^* = V$ から V 自身を V^* の双対空間とみなすことができる。$(e_1, \cdots, e_n)$ と $(f_1, \cdots, f_n)$ は互いに他の双対基底とみなすことができるわけである。したがって、$x \in V$, $f \in V^*$ に対し、$f(x)$ とかくよりも

(6) $\langle f, x\rangle = f(x) = \phi_x(f) = \langle x, f\rangle$

のように内積の記号 $\langle\ \rangle$ を使って表す方が便利である。また、(2) は次のようになる。

(2') $\langle f_i, e_j\rangle = \langle e_j, f_i\rangle = \delta_{ij}$

$\langle f, x\rangle$ は f を固定したときには x について一次写像であり、x を固定したときには f について一次写像である。すなわち、$x \in V$, $f \in V^*$ に関する双一次形式である。この $\langle\ \rangle$ を V と V^* の双対性を表す内積という。

(P. 203　例1)

$(e_i), (f_i)$: $(e_i'), (f_i')$ を二組の互いの双対的な V, V^* の底とする。すなわち

$\langle e_i, f_j\rangle = \langle e_i', f_j'\rangle = \delta_{ij}$

底の変換 $(e_i) \to (e_i')$, $(f_i) \to (f_i')$ の行列をそれぞれ $P = (\lambda_{ij})$, $Q = (\mu_{ij})$ とすれば

$(e_1', \cdots, e_n') = (e_1, \cdots, e_n)P = (e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} \lambda_{11} & & \lambda_{1n} \\ & \ddots & \\ \lambda_{n1} & & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$ だから

$e_j' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i$ となる。同様に

$(f_1', \cdots, f_n') = (f_1, \cdots, f_n)Q = (f_1, \cdots, f_n)\begin{pmatrix} \mu_{11} & & \mu_{1n} \\ & \ddots & \\ \mu_{n1} & & \mu_{nn} \end{pmatrix}$ だから

$f_\ell' = \sum_{k=1}^{n} \mu_{k\ell} f_k$ となる。よって (2') の等式から

$\delta_{j\ell} = \langle e_j', f_\ell'\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i, f_\ell'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\langle e_i, f_\ell'\rangle = \sum_{i=1}^{n}\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ij}\mu_{k\ell}\langle e_i, f_k\rangle\}$

ここで、$i = k$ のとき $\langle e_i, f_k\rangle = 1$, $i \neq k$ のとき $\langle e_i, f_k\rangle = 0$ なので

$= \sum_{i=1}^{n}\{\lambda_{ij}\mu_{i\ell}\langle e_i, f_i\rangle\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\mu_{i\ell}$

$(c_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) \leftarrow AB$ なので λ_{ij} の ij に注意して P の j 列を j 行にするために ${}^tP$ とする。

${}^tPQ = E$ すなわち

(7) $Q = {}^tP^{-1}$

（P. 204　問1）

$(e_i') = (e_i)P$, $(f_i') = (f_i)P$ ならば $(f_i') = (f_i)Q$ でもあるので $P = Q = {}^tP^{-1}$ よって、P は直行行列となる。逆に P が直行行列ならば $P = {}^tP^{-1} = Q$ となり二つの同型対応が一致する。

（P. 204　部分空間の双対性）

(8) $W^{\perp} = \{ f \in V^* ; \langle f , x \rangle = 0 \ \ for\ all \ \ x \in W \}$

W を V の部分空間としたとき $W^{\perp}$ は V^* の部分空間となる。実際 $f , g \in W^{\perp}$ ， $\alpha , \beta \in K$ に対して、$\langle \alpha f + \beta g , x \rangle = \alpha \langle f , x \rangle + \beta \langle g , x \rangle = 0$

(9) $dim\ W^{\perp} = n - dim\ W$ （$W^{\perp}$ は直行補空間ではなく直行空間であることに注意したい。）

（証明）$dim\ W = r$ とする。V の底 (e_i) を $(e_1 , \cdots , e_r)$ が W の底となるようにすることができる。(f_i) を (e_i) の双対底とし、$f \in V^*$, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, $\alpha_i \in K$ とすれば $e_1 , \cdots , e_r \in W$ であり、$f = f(e_1)f_1 + \cdots + f(e_n)f_n$ だから

$f \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle f , e_i \rangle = f(e_i) = \alpha_i = 0 \ \ for\ 1 \leqq i \leqq r \ \Leftrightarrow f \in \{ f_{r+1} , \cdots , f_n \}_K$

特に、$dim\ W^{\perp} = n - r = n - dim\ W$ となる。

以上は W の（V^* における）直行空間であったが、$W^{\perp} \subset V^*$ の（V における）直行空間を定義することができる。

$(W^{\perp})^{\perp} = \{ x \in V ; \langle f , x \rangle = 0 \ \ for\ all \ \ f \in W^{\perp} \}$

やはり $(W^{\perp})^{\perp}$ も W の部分空間である。

実際 $x , y \in (W^{\perp})^{\perp}$ ， $\alpha , \beta \in K$ に対して $\langle \alpha x + \beta y , f \rangle = \alpha \langle x , f \rangle + \beta \langle y , f \rangle = 0$

また、$x \in W$ とすると、任意の $f \in W^{\perp}$ に対して $\langle x , f \rangle = f(x) = 0$ となるから $x \in (W^{\perp})^{\perp}$

よって $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である。一方 (9) から

$dim\ (W^{\perp})^{\perp} = dim\ V^* - dim\ W^{\perp} = dim\ V - (dim\ V - dim\ W) = dim\ W$ であるから P.101 (1) から $W = (W^{\perp})^{\perp}$ となる。

(10) $W = (W^{\perp})^{\perp} = W^{\perp\perp}$

さらに W_1 , W_2 を V の部分空間とするとき、P.108 (11) , (12) と同様に次の関係が成り立つ。

(11)’ $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

(12)’ $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

(11)’ の証明の前に次のことを証明しておく。A , B が V の部分空間であるとする。

$A \subset B$ ならば $A^{\perp} \supset B^{\perp}$

（証明）$f \in B^{\perp}$ ならば $f \in V^*$ であって $\langle f , x \rangle = 0$ $for\ all$ $x \in B$ である。したがって $A \subset B$ からそのような f は $\langle f , x \rangle = 0$ $for\ all$ $x \in A$ である。よって、$f \in A^{\perp}$

((11)' の証明） $W_1 \subset W_1 + W_2$, $W_2 \subset W_1 + W_2$ から $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1^{\perp}$, $W_2^{\perp}$ となる。
よって、$(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$
逆に $f \in W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$ ならば $W_1 + W_2$ の任意の元 $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in W_1 , x_2 \in W_2)$ に対し
$\langle f , x \rangle = \langle f , x_1 \rangle + \langle f , x_2 \rangle = 0$
したがって、$f \in (W_1 + W_2)^{\perp}$ ゆえに $(W_1 + W_2)^{\perp} \supset W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

((12)' の証明）(11)' から $(W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp} = (W_1^{\perp})^{\perp} \cap (W_2^{\perp})^{\perp} = W_1 \cap W_2$ よって
$W_1^{\perp} + W_2^{\perp} = (W_1 \cap W_2)^{\perp}$
また $V = W \dotplus W^{\perp}$ ならば $V^* = W^{\perp} \dotplus W'^{\perp}$ である。
なぜなら、$W^{\perp} \cap W'^{\perp} = (W + W')^{\perp} = V^{\perp} = \{0\}$ であり、$W^{\perp} + W'^{\perp} = (W \cap W')^{\perp} = \{0\}^{\perp}$ $= V^*$ である。

（商空間）

（P.149　補題 1）の次の準備にも記したが、もう一度確認する。
ベクトル空間 V とその部分空間 W があるとき、次の様に新しいベクトル空間を構成する。

$x \in V$ に対し、$x + W = \{ x + y \mid y \in W \}$ とする。
この集合を一点として考え直すことによって商ベクトル空間と定義する。

（補題　６．１２．１）
$x , y \in V$ に対して、次の2つの条件は同値である。
(1) $x + W = y + W$
(2) $x - y \in W$
ここで、V の二元 x , y に対し、$x - y \in W$ のとき、$x \sim y$ と定義すれば、$\sim$ は V の同値関係である。よってその商集合を V/W で表し、V の元 x が含まれる類を $x + W$ で表すとすると $V/W = \{ x + W \mid x \in V \}$ となる。
また、二つの類は互いに共通元をもたないか、または、完全に一致するということになる。
この V/W に足し算とスカラー倍を次の様に定義する。

（足し算）：$a , b \in V/W$ に対して、$a + b \in V/W$ を次の様に定める。

$a = x + W$, $b = y + W$ としたとき、$a + b = (x + y) + W$ とする。

（スカラー倍）：$a \in V/W$ とスカラー k に対して、$ka \in V/W$ を次の様に定める。

$a = x + W$ としたとき、$ka \in (kx) + W$ とする。

V/W がベクトル空間はベクトル空間の公理を満たしており、例えば、零ベクトルは $0 + W$ であり

任意の $x + W$ に対して、$0 + W + x + W = x + W$ となる。

（自然な射影）

V のベクトル x に対して、$x + W$ を対応させる写像 $p : V \to V/W$ を自然な射影と呼ぶ。

この p は上への一次写像である。$x , y \in V$ とスカラー k に対し

（ｉ）$p(x+y) = (x+y) + W = x + W + y + W = p(x) + p(y)$

（ⅱ）$p(kx) = kx + W = k(x + W) = kp(x)$

（定理　６．１２．１）

$dim(W/V) = dim\ V - dim\ W$

W の基底を $a_1 , \cdots , a_r$ とし、それに、V のベクトル $b_1 , \cdots , b_s$ を加えて V の基底をつくる。

このとき、$p(b_1) = b_1 + W , \cdots , p(b_s) = b_s + W$ は V/W の基底になる。

（佐武）線形代数学に戻る。

（佐武）線形代数学では $x + W = [x]$ と記している。

一般に一次写像 $\phi : V \to V'$ が与えられ $W \subset \phi^{-1}(0)$ であるとすれば

$x \equiv y\ (mod\ W) \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$

なぜなら、$x - y \in W \subset \phi^{-1}(0)$ なので $\phi(x-y) = 0$ よって $\phi(x) = \phi(y)$

このことから $\phi(x)$ は $[x]$ のみによって定まる。これを $\overline{\phi}([x])$ とおけば $\overline{\phi}$ は V/W から V' の

中への一次写像になる。実際、$[x] , [y] \in V/W , \alpha \in K$ に対して

$\overline{\phi}([x]+[y]) = \overline{\phi}([x+y]) = \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = \overline{\phi}([x]) + \overline{\phi}([y])$

$\overline{\phi}(\alpha[x]) = \overline{\phi}([\alpha x] = \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x) = \alpha\overline{\phi}([x])$

特に $W = \phi^{-1}(0)$ のときは、$[x] \neq [y]$ に対して、$\overline{\phi}([x]) \neq \overline{\phi}([y])$ である。なぜなら、もし

$\overline{\phi}([x]) = \overline{\phi}([y])$ だとしたら、$\overline{\phi}([x]-[y]) = \overline{\phi}([x-y]) = \phi(x-y) = 0$ よって

$x - y \in \phi^{-1}(0) = W$ となり、$[x] \neq [y]$ に反する。よって、$\overline{\phi}$ は単射になるから

(12) $V/\phi^{-1}(0) \cong \phi(V)$

となる。（$dim(V/\phi^{-1}(0)) = dim(\phi(V)) = n - dim(\phi^{-1}(0) = n - dimW$）

次に $f \in W^{\perp} \subset V^*$ とすれば、任意の $x \in W$ に対し $f(x) = 0$ なので $x \in f^{-1}(0)$ となり

$W \subset f^{-1}(0)$ となり、上記により $\overline{f}$ は V/W 上の一次写像になる。すなわち、$\overline{f} \in (V/W)^*$ で

る。対応 $f \to \overline{f}$ は $W^{\perp} \to (V/W)^*$ の中への一次写像になる。

実際 $f , g \in W^{\perp} , \alpha \in K$ に対して、任意の $[x] \in V/W$ に対して

$\overline{(f+g)}([x]) = (f+g)(x) = f(x)+g(x) = \overline{f}([x])+\overline{g}([x])$

$\overline{f}(\alpha[x]) = \overline{f}([\alpha x]) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \overline{f}([x])$

である。

また、$W^{\perp}$ の底（$f_{r+1}, \cdots, f_n$）の像（$\overline{f}_{r+1}, \cdots, \overline{f}_n$）は V/W の底（$[e_{r+1}], \cdots, [e_n]$）の双対底になっている。

詳しくは、V の底を（$e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n$）、$W$ の底を（$e_{r+1}, \cdots, e_n$）、その双対空間 V^* の底を（$f_1, \cdots, f_n$）とする。このとき、$\overline{f_i}([e_j]) = f_i(e_j) = \delta_{ij}$（$r+1 \leqq i, j \leqq n$）ということである。

よってこの対応は同型となる。

(13) $W^{\perp} \cong (V/W)^*$

これも標準的同型だから、$W^{\perp} = (V/W)^*$ と一致させることができる。このことについては標準的同型の定義がはっきりしないので一致させてよいことの根拠がわからない。仮に認めたとして V, W を $V^*, W^{\perp}$ に置き換えたとして (13) と (5) を適用すれば $W^{\perp}$ は V^* の部分空間なので $(V^*/W^{\perp})^* \cong W^{\perp\perp} = W$ よって、(5) により $(V^*/W^{\perp})^{**} = V^*/W^{\perp} \cong W^*$

（直接証明）

$f \in V^*$ の W への制限を f_W とおけば、$f_W \in W^*$ である。対応 $\phi: f \to f_W$ は V^* から W^* への一次写像になる。

なぜなら、$f, g \in V^*$, α , $\beta \in K$ として、任意の $x \in W \subset V$ に対して

$\phi(\alpha f+\beta g)(x) = (\alpha f+\beta g)(x) = \alpha f_W(x)+\beta g_W(x) = \alpha \phi(f)(x)+\beta \phi(g)(x)$

したがって、$\phi(\alpha f+\beta g) = \alpha \phi(f)+\beta \phi(g)$ であり一次写像である。

また、ϕ の核（$\phi^{-1}(0)$）は $W^{\perp}$ になる。つまり、$\phi^{-1}(0) = W^{\perp}$

なぜなら、$f \in \phi^{-1}(0)$ ならば $\phi(f) = f_W = 0$ なので $\langle f, x\rangle = 0$ *for all* $x \in W$ となって $f \in W^{\perp}$ また逆に $f \in W^{\perp}$ ならば $\langle f, x\rangle = 0$ *for all* $x \in W$ したがって、$f_W = 0$ よって $\phi(f) = f_W = 0$ となるから $f \in \phi^{-1}(0)$

(12) から $V^*/W^{\perp} \cong \phi(V^*)$

このことについては、(11) の下に「一般に」と記してあるように、ϕ は V^* から W^* への一次写像であり、同じように $\overline{\phi}$ を定めれば同様な結果が得られるということである。$\phi^{-1}(0) = W^{\perp}$ であるから $V^*/W^{\perp} \cong \phi(V^*)$ となる。

(11) と (9) により $\dim \phi(V^*) = \dim V^* - \dim W^{\perp} = n - (n - \dim W) = \dim W = \dim W^*$

$\phi(V^*) \subset W^*$ なので $\phi(V^*) = W^*$ したがって $V^*/W^{\perp} \cong W^*$

やはり、「標準的」が気になる。すっきりしない証明だ！

（P. 205　双対写像）

V , V' をそれぞれ n 次元、m 次元のベクトル空間、$\phi : V \to V'$ の中への一次写像とする。

V^* , V'^* をそれぞれ V , V' の双対空間とすれば、次のようにして V'^* から V^* の中への一次写像 ${}^t\phi$ が定義される。

$f \in V'^*$ に対して ${}^t\phi(f) = f \circ \phi$ ($(f \circ \phi)(x) = f(\phi(x))$) とする。

f は $V' \to K$ への一次写像（一次関数）なので ${}^t\phi$ は $V \to K$ への一次写像となる。よって

${}^t\phi \in V^*$

次に ${}^t\phi$ が一次写像になることを示す。f , $g \in V'^*$, $\alpha \in K$ とする。任意の $x \in V$ に対して

${}^t\phi(f+g)(x) = (f+g)(\phi(x)) = f(\phi(x)) + g(\phi(x)) = {}^t\phi(f)(x) + {}^t\phi(g)(x)$

このことが任意の $x \in V$ に対して成り立つので ${}^t\phi(f+g) = {}^t\phi(f) + {}^t\phi(g)$

${}^t\phi(\alpha f)(x) = (\alpha f)(\phi(x)) = \alpha f(\phi(x)) = \alpha\, {}^t\phi(x)$

任意の $x \in V$ に対して成り立つので ${}^t\phi(\alpha f) = \alpha\, {}^t\phi(f)$

よって、${}^t\phi$ は V'^* から V^* の中への一次写像となる。この ${}^t\phi$ を ϕ の**双対写像**という。

V と V^* および V' と V'^* の双対性を表す内積を使えば

(14) $\langle f , \phi(x) \rangle = f(\phi(x)) = {}^t\phi(f)(x) = \langle {}^t\phi(f) , x \rangle$　($x \in V$, $f \in V'^*$)

となる。

V , V^* および V' , V'^* の互いに双対的な底 (e_1 , $\cdots$, e_n) , (f_1 , $\cdots$, f_n) : (e_1' , $\cdots$, e_m') ,

(f_1' , $\cdots$, f_m') をとり、ϕ の (e_i) の (e_i') に関する行列（表現行列）を A とすれば (P.19参照)

$$(\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)) = (e_1', \cdots, e_m')A = (e_1', \cdots, e_m')\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A は (m , n) 行列であり、$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i'$ $\cdots$ ①

また、${}^t\phi$ の (f_i') の (f_i) に関する行列を B とすれば

$$({}^t\phi(f_1'), \cdots, {}^t\phi(f_m')) = (f_1, \cdots, f_n)B = (f_1, \cdots, f_n)\begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ & \ddots & \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{pmatrix}$$

B は (n , m) 行列であり、${}^t\phi(f_\ell') = \sum_{k=1}^{n} b_{k\ell} f_k$ $\cdots$ ②

①から

$${}^t\phi(f_\ell')(e_j) = f_\ell'(\phi(e_j)) = f_\ell'(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i') = f_\ell'(a_{1j}\, e_1' + \cdots + a_{\ell j}\, e_\ell' + \cdots + a_{mj}\, e_m') = a_{\ell j}$$

一方②から

$${}^t\phi(f_\ell')(e_j) = (\sum_{k=1}^{n} b_{k\ell} f_k)(e_j) = (b_{1\ell} f_1 + \cdots + b_{j\ell} f_j + \cdots + b_{n\ell} f_n)(e_j) = b_{j\ell}$$

したがって

$a_{\ell j} = b_{j\ell}$

を得る。よって

${}^{t}B = A$

次に ${}^{tt}\phi = \phi$ についてだが、${}^{t}\phi$ は V'^{*} から V^{*} の中への一次写像だったので、${}^{tt}\phi$ は V^{**} から V'^{**} の中への一次写像となる。V , V' が有限次元であることから、$V^{**} = V$, $V'^{**} = V'$ とみなすことから、${}^{tt}\phi$ は V から V' の中への一次写像ということになる。

任意の $x \in V^{**} = V$ (x を $V^{*} \to K$ なる写像とみて) と任意の $f \in V'^{*}$ に対して、

$({}^{tt}\phi(x))(f) = (x \circ {}^{t}\phi)(f)$ であるから

$({}^{tt}\phi(x))(f) = (x \circ {}^{t}\phi)(f) = x({}^{t}\phi(f)) = ({}^{t}\phi(f))(x) = (f \circ \phi)(x) = f(\phi(x)) = (\phi(x))(f)$

となる。よって $f \in V'^{*}$ だから V'^{*} 上の一次写像とみて

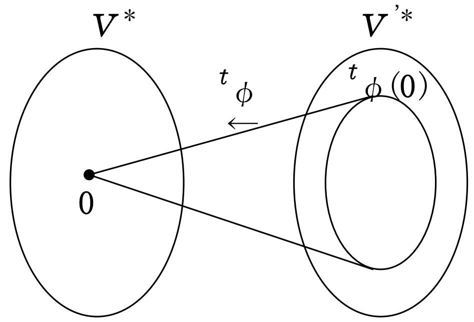
${}^{tt}\phi(x) = \phi(x)$

となるから ${}^{tt}\phi = \phi$ である。

(15') $({}^{t}\phi^{-1}(0)) = (\phi(V))^{\perp}$

(証明) $f \in ({}^{t}\phi^{-1}(0))$ とすると ${}^{t}\phi(f) = f \circ \phi = 0$ 、したがって任意の $x \in V$ に対して $f(\phi(x)) = 0$ となる。$\phi(V) \subset V'$ であり、$\phi(V)$ は V' の部分空間である。$y = \phi(x)$ ($x \in V$) とおけば $(\phi(V))^{\perp} = \{ f' \in V'^{*} ; \langle f', y \rangle = 0 \ \ for\ all\ \ y \in \phi(V) \}$ なので $f \in (\phi(V))^{\perp}$ となる。

逆に $f \in (\phi(V))^{\perp}$ とすれば、任意の $x \in V$ に対して $f(\phi(x) = 0$ となるから ${}^{t}\phi(f)(x) = 0$ となり ${}^{t}\phi(f) = 0$ すなわち $f \in {}^{t}\phi^{-1}(0)$ を得る。



(15) ${}^{t}\phi(V'^{*}) = (\phi^{-1}(0))^{\perp}$

(証明) ${}^{t}\phi = \eta$, ${}^{t}\eta = {}^{tt}\phi = \phi$ である。(15) より

${}^{t}\eta^{-1}(0) = (\eta(V'^{*}))^{\perp}$

であるから ${}^{t}\eta = \phi$, $\eta = {}^{t}\phi$ を代入すると

$\phi^{-1}(0) = ({}^{t}\phi(V'^{*}))^{\perp}$

また、${}^{t}\phi(V'^{*}) = ({}^{t}\phi(V'^{*}))^{\perp\perp}$ だから

$(\phi^{-1}(0))^{\perp} = {}^{t}\phi(V'^{*})$

形式的には理解できるが？すっきりしない。

Ⅲ章,§4,定理7 ($f: V^{m} \to V^{n}$ のとき $dim\, f(V^{m}) = m - dim\, f^{-1}(0)$) と (9) , (15) から

$rank\ {}^{t}\phi = dim\ {}^{t}\phi(V'^{*}) = dim\,(\phi^{-1}(0))^{\perp} = n - dim\ \phi^{-1}(0) = dim\ \phi(V) = rank\ \phi$

つまり、Ⅲ章, § 4,定理9（$rank\ {}^t\phi = rank\ \phi$）を得る。

≅ を = とみなすことから始まり、値としての = なのか 関数としての = なのか・・・？双対空間はイメージがつかめない。Ⅴ章についてはここまでとする。もう少し自分自身の視野を広げる必要があるようだ。

（終）