線型代数学（佐武一郎 著） 個人ノート

数学愛好家
北條 弘

本文は、線型代数学を学ぶ人にとって、有名な佐武先生の本（原書と呼ぶ）を読むための、私も含め、初心者のために行間を具体的に補足した個人ノートである。したがって、本文を読むためには、佐武先生の本を購入し、併読する必要がある。

内容は、第Ⅳ章までとし、例、問については選択して取り扱った。Ⅴ章については、抽象度がたかく割愛した。また、各章にある研究課題についても流す程度にした。しかし、基本的な内容に関しては紙数を惜しまず解説したつもりである。くどすぎる程の説明に退屈さを感じる人もいるだろうが、最後まで読み進めてもらえれば原書の内容がいかに精選されたものであるか感じてもらえると思う。そして、現代数学の理解に欠かすことができない線型代数学の力が身につくはずである。

また、線型代数入門（齋藤正彦 著 東大出版）、線型代数入門（松坂和夫 著 岩波書店）の内容も時折引用させてもらった。これら3冊の本は日本を代表する線型代数の入門書といっても過言ではないと思う。

（P．10 積ABの転置）のように、原書の各ページに対応するようになっているので、目次も索引もない。フォントについてもできるだけ大きくしたが、ところによっては小さくなってしまい読みづらいところもあるかもしれないが是非ご理解いただきたい。

参考文献

線型代数入門（齋藤正彦 著 東大出版）、線型代数入門 代数系入門（松坂和夫 著 岩波書店）、線型代数学（川久保勝夫 著 日本評論社）、線型代数学（笠原晧司 著 サイエンス社）、線型代数入門講義（長岡亮介 著 東京図書）、線型代数と固有値問題（笠原晧司 著 現代数学社）、線形代数と群（赤尾和男 著 共立出版）、解析入門Ⅰ Ⅱ（杉浦光夫 著 東大出版）、代数学講義（高木貞治 著 共立出版）、線型代数の世界（斎藤 毅 著 東大出版）、ベクトルと行列（高橋恒郎 著 筑摩書房）

（P．８　行列の演算の結合法則）

行列の乗法：$A=(a_{ij})$, $B=(b_{jk})$（$1\leqq i\leqq n$, $1\leqq j\leqq m$, $1\leqq k\leqq \ell$）とする（n , m）型、（m , ℓ）型の行列としたとき、AB の（i,k）成分を c_{ik} とすれば

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}$$

となる。ここできちんと理解し、慣れておかなければならないことは

$$c_{i\,k}=\sum_{j=1}^{m}a_{i\,j}\,b_{j\,k}$$　（j を１から n へとすべらす）

同じ添字

（AB）C の（i,h）成分

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kh}$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}(a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{ij}b_{jk}+\cdots+a_{im}b_{mk})c_{kh}$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}(a_{i1}b_{1k}c_{kh}+a_{i2}b_{2k}c_{kh}+\cdots+a_{ij}b_{jk}c_{kh}+\cdots+a_{im}b_{mk}c_{kh})$$

$$\begin{aligned}
=\ & a_{i1}b_{11}c_{1h}+a_{i2}b_{21}c_{1h}+\cdots+a_{ij}b_{j1}c_{1h}+\cdots+a_{im}b_{m1}c_{1h}\\
& +a_{i1}b_{12}c_{2h}+a_{i2}b_{22}c_{2h}+\cdots+a_{ij}b_{j2}c_{2h}+\cdots+a_{im}b_{m2}c_{2h}\\
& +a_{i1}b_{13}c_{3h}+a_{i2}b_{23}c_{3h}+\cdots+a_{ij}b_{j3}c_{3h}+\cdots+a_{im}b_{m3}c_{3h}\\
& \qquad\vdots\\
& +a_{i1}b_{1\ell}c_{\ell h}+a_{i2}b_{2\ell}c_{\ell h}+\cdots+a_{ij}b_{j\ell}c_{\ell h}+\cdots+a_{im}b_{m\ell}c_{\ell h}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{j1}c_{1h}+a_{ij}b_{j2}c_{2h}+a_{ij}b_{j3}c_{3h}+\cdots+a_{ij}b_{j\ell}c_{\ell h})$$　← 横の和を縦の和にする。

$$=\sum_{j=1}^{m}(b_{j1}c_{1h}+b_{j2}c_{2h}+b_{j3}c_{3h}+\cdots+b_{j\ell}c_{\ell h})a_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{\ell}b_{jk}c_{kh}\right)$$

　以上のように味気ない記述であるが、佐武先生の本を読みながら、疑問を感じたところで付け足すように読んでいただければ理解が深まると思う。

（P．9　例1）

$\boldsymbol{AB}$ =

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,m_1} & a_{1,m_1+1} & \cdots & a_{1,m} \\
a_{i,1} & \boldsymbol{A}_{1,1} & a_{i,m_1} & a_{i,m_1+1} & \boldsymbol{A}_{1,2} & a_{i,m} \\
a_{n_1,1} & \cdots & a_{n_1,m_1} & a_{n_1,m_1+1} & \cdots & a_{n_1,m} \\
\hline
a_{n_1+1,1} & \cdots & a_{n_1+1,m_1} & a_{n_1+1,m_1+1} & \cdots & a_{n_1+1,m} \\
 & \boldsymbol{A}_{2,1} & & & \boldsymbol{A}_{2,2} & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,m_1} & a_{n,m_1+1} & \cdots & a_{n,m}
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{ccccc|ccc}
b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,\ell_1} & b_{1,\ell_1+1} & \cdots & b_{1,\ell} \\
 & & \boldsymbol{B}_{1,1} & & & & \boldsymbol{B}_{1,2} & \\
b_{m_1,1} & \cdots & b_{m_1,k} & \cdots & b_{m_1,\ell_1} & b_{m_1,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1,\ell} \\
\hline
b_{m_1+1,1} & \cdots & b_{m_1+1,k} & \cdots & b_{m_1+1,\ell_1} & b_{m_1+1,\ell_1+1} & \cdots & b_{m_1+1,\ell} \\
 & & \boldsymbol{B}_{2,1} & & & & \boldsymbol{B}_{2,2} & \\
b_{m,1} & \cdots & b_{m,k} & \cdots & b_{m,\ell_1} & b_{m,\ell_1+1} & \cdots & b_{m,\ell}
\end{array}\right)
$$

$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$ （P.8 (11) , (12) から）

$$
= \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{B}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{B}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \right.
$$

$$
\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} \end{pmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}
$$

（P．10　積$\boldsymbol{AB}$の転置）

$(\,n,m\,)$ 行列 $\boldsymbol{A} = (\,a_{ij}\,)$、$(\,m,\ell\,)$ 行列 $\boldsymbol{B} = (\,b_{jk}\,)$ とする。

したがって、$\boldsymbol{AB}$ は $(\,n,\ell\,)$ 行列になる。

$$
\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}
\sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j\ell} \\
\sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j\ell} \\
 & & \cdots & \\
\sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j\ell}
\end{pmatrix} \quad \leftarrow (\,n,\ell\,) \text{行列}
$$

$$
{}^{t}(\boldsymbol{AB}) = \begin{pmatrix}
\sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j1} \\
\sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j1} \\
 & & \cdots & \\
\sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j\ell} & \sum_{j=1}^{m} a_{2j}b_{j\ell} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} a_{nj}b_{j\ell}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\sum_{j=1}^{m} b_{j1}a_{1j} & \sum_{j=1}^{m} b_{j1}a_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b_{j1}a_{nj} \\
\sum_{j=1}^{m} b_{j2}a_{1j} & \sum_{j=1}^{m} b_{j2}a_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b_{j1}a_{nj} \\
 & & \cdots & \\
\sum_{j=1}^{m} b_{j\ell}a_{1j} & \sum_{j=1}^{m} b_{j\ell}a_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b_{j\ell}a_{nj}
\end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ & & \cdots & \\ b_{1\ell} & b_{2\ell} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \cdots & \\ a_{1m} & a_{2\mathrm{m}} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = {}^t\!B\,{}^t\!A$$

${}^tB$ は（ℓ,m）、${}^tA$ は（m,n）行列であり、${}^tB\,{}^tA$ は（ℓ,n）行列となる。

（P．12　例　行列単位）

（n,n）型の行列単位 $\boldsymbol{E}_{ij}$ の（p,q）成分は $\delta_{ip}\delta_{jq}$ で表せる。$i=p$ 、$p=j$ のときのみ、1 になる。

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} & j\text{列} \\ & \begin{pmatrix} 0 & & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \vdots & \\ 0 & & \vdots & 0 \end{pmatrix} i\text{行} \end{array}$$

$\boldsymbol{E}_{ij}\,\boldsymbol{E}_{k\ell}$ の（q,r）成分 $= \sum_{q=1}^{n}(\delta_{ip}\delta_{jq})(\delta_{kq}\delta_{\ell r}) = (\delta_{ip}\delta_{\ell r})\sum_{q=1}^{n}(\delta_{jq}\delta_{kq})$

ここで、$\sum_{q=1}^{n}(\delta_{jq}\delta_{kq}) = \delta_{j1}\delta_{k1} + \delta_{j2}\delta_{k2} + \cdots + \delta_{jn}\delta_{kn}$ つまり、$j \neq k$ のとき 0

$j=k$ のとき 1 、よって、δ_{jk} に等しい。q の値を 1 から n まで増やしていけばわかる。

$\boldsymbol{E}_{ij}\,\boldsymbol{E}_{k\ell}$ の（q,r）成分 $= \delta_{jk}(\delta_{ip}\delta_{\ell r}) = \delta_{jk}(\boldsymbol{E}_{i\ell}$ の（p,r）成分）

よって

$\boldsymbol{E}_{ij}\,\boldsymbol{E}_{k\ell} = \delta_{jk}\,\boldsymbol{E}_{i\ell}$

特に

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{e}_k = \begin{array}{cc} & j \\ i \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \vdots & \\ 0 & & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

$= \delta_{jk}\boldsymbol{e}_i$ （$k=j$ のとき 1 なので、そのとき $\boldsymbol{e}_i$ になる。）

$$\boldsymbol{e}_i\,{}^t\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0) = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \vdots & \\ 0 & & \vdots & 0 \end{pmatrix} i \end{array} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

$${}^t\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = (0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \delta_{ij}$$

（P．15　対角行列の積）

A の（i,j）成分 = $a_i\delta_{ij}$　、 B の（j,k）成分 = $b_j\delta_{jk}$ とおく

AB の（i,k）成分 = $\sum_{j=1}^{n} a_i\delta_{ij}b_j\delta_{jk} = a_i\sum_{j=1}^{n} b_j\delta_{ij}\delta_{jk}$

$i<k$ としておく、逆にしても問題ない

$= a_i(b_1\delta_{i1}\delta_{1k}+\cdots+b_i\delta_{ii}\delta_{ik}+\cdots+b_k\delta_{ik}\delta_{kk}+\cdots+b_n\delta_{in}\delta_{nk})$

（$i\neq k$）の場合

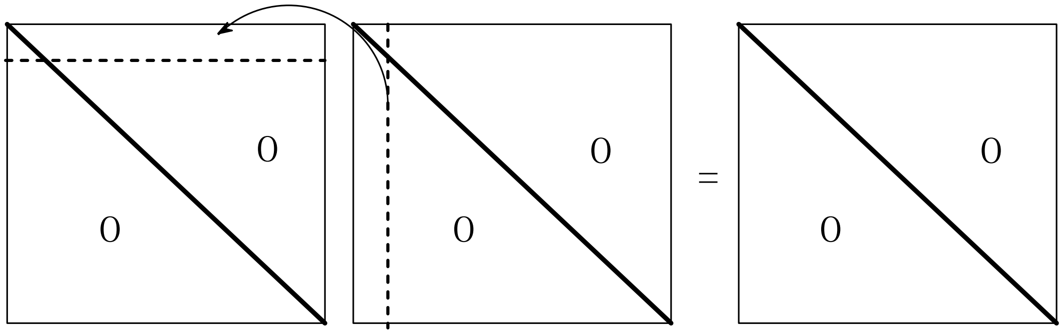
$= a_i(0+\cdots+0+\cdots+0+\cdots+0) = 0$

（$i=k$）の場合

$= a_i(b_1\delta_{i1}\delta_{1k}+\cdots+b_i\delta_{ii}\delta_{ii}+\cdots+b_n\delta_{in}\delta_{nk})$

$= a_i(0+\cdots+b_i\delta_{ii}\delta_{ii}+\cdots+0) = a_ib_i$

直感的には、直線と直線は 1 点で交わり、かつ、傾きは －1 である。



（P．15　例2　三角行列の積）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i<j \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{22} & & \vdots \\ & & & b_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow j<k$$

$\uparrow$ $i>j\ (a_{ij}=0)$　　　　$\uparrow$ $j>k\ (b_{jk}=0)$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{22} & & \vdots \\ & & & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i<k$$

$i=k$

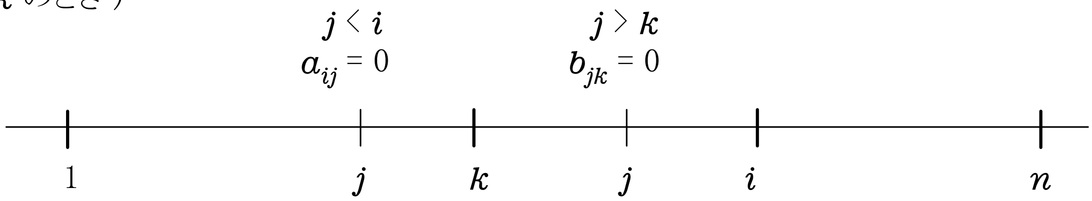
$\uparrow$ $i>k$

$AB=C$ の（i,k）成分は

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

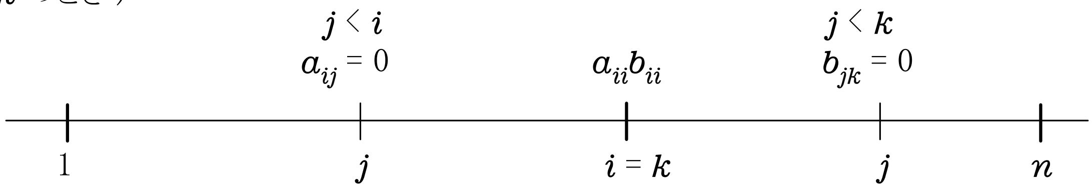
$= a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{ij}b_{jk}+\cdots+a_{in}b_{nk}$

（ $i > k$ のとき ）



よって、j を 1 から順に n まで大きくしていくと、$j < i$ のうちは $a_{ij} = 0$、$j > k$ となったときから $b_{jk} = 0$ 、つまり、ずっと $a_{ij}b_{jk} = 0$ なので $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = 0$

（ $i = k$ のとき ）



同様に、j を 1 から順に n まで大きくしていくと、$j < i$ のうちは $a_{ij} = 0$、$j > k$ となったときから $b_{jk} = 0$ 、$j = i = k$ のきだけ $a_{ii}b_{ii}$ である。 よって、$c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

以上により、AB は上三角行列となる。

A が上三角行列として、$XA = E$ となる n 次正方行列 X を（ x_{ij} ）とおく

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{11}a_{11} = 1 \quad \to \quad x_{11} = \frac{1}{a_{11}} \quad (a_{ii} \neq 0)$$

$$x_{21}a_{11} = 0 \qquad x_{21} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{n1}a_{11} = 0 \qquad x_{n1} = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

次に2列目

$$x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} = 0 \to x_{12} = -\frac{x_{11}a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}}$$

$$x_{22}a_{22} = 1 \to x_{22} = \frac{1}{a_{22}}$$

$$x_{32}a_{22} = 0 \to x_{32} = 0$$

$$\vdots$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

3列目は同様にして、x_{13}、x_{23} が解け、$x_{33} = \dfrac{1}{a_{33}}$ となる。$x_{43} \sim x_{n3} = 0$ となる。

以下同様にして、A^{-1} は上三角行列となる。対角成分は $\dfrac{1}{a_{ii}}$ である。

（P. 20　例）

$Y = g_A(X)$ について同様に

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1+a_3x_2 & a_2x_1+a_4x_2 \\ a_1x_3+a_3x_4 & a_2x_3+a_4x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = a_1x_1+a_3x_2 \\ y_2 = a_2x_1+a_4x_2 \\ y_3 = a_1x_3+a_3x_4 \\ y_4 = a_2x_3+a_4x_4 \end{cases}$$

よって、対応する行列は

$$R_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

となる。

（P. 21　例）

$g_A(g_B(X)) = (XB)A = X(BA) = g_{BA}$ よって、$R_AR_B = R_{BA}$

$$L_A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \quad , \quad R_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$L_AR_B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_3 & a_2b_1 & a_2b_3 \\ a_1b_2 & a_1b_4 & a_2b_2 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_3 & a_4b_1 & a_4b_3 \\ a_3b_2 & a_3b_4 & a_4b_2 & a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$R_BL_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_3 & a_2b_1 & a_2b_3 \\ a_1b_2 & a_1b_4 & a_2b_2 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_3 & a_4b_1 & a_4b_3 \\ a_3b_2 & a_3b_4 & a_4b_2 & a_4b_4 \end{pmatrix}$$

（P. 25　3行目）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

（P. 25　3行目）

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1-a_2b_2 & -a_1b_2-a_2b_1 \\ a_1b_2+a_2b_1 & a_1b_1-a_2b_2 \end{pmatrix} = (a_1b_1-a_2b_2)E+(a_1b_2+a_2b_1)J$$

（P．27　問2）

そのような解 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ が存在したとすれば

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}x_{11}^2+x_{12}x_{21} & x_{11}x_{12}+x_{12}x_{22}\\ x_{11}x_{21}+x_{21}x_{22} & x_{12}x_{21}+x_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$x_{11}x_{12}+x_{12}x_{22}=x_{12}(x_{11}+x_{22})=0\ \rightarrow\ x_{12}=0$ または $x_{11}+x_{22}=0$

$x_{11}x_{21}+x_{21}x_{22}=x_{21}(x_{11}+x_{22})=0\ \rightarrow\ x_{21}=0$ または $x_{11}+x_{22}=0$

ここで、$x_{12}=0$ または $x_{21}=0$ とすれば $x_{11}^2=x_{22}^2=-1$ となる。実数にしたければ（複素数ならば、$x_{12}=0$ とした場合 $x_{11}=\pm i$, $x_{22}=\pm i$ 同符号ならば $x_{21}=0$ 、異符号ならば, x_{21} は任意でよい。当然、x_{12} と x_{21} の立場は同じである。） $x_{12}\neq 0$, $x_{21}\neq 0$ とする。すると、$x_{22}=-x_{11}$ となる。そこで、$x_{11}=\alpha$ とすれば、$x_{22}=-\alpha$

となる。$x_{12}x_{21}=-1-\alpha^2$ なので、$x_{12}=\beta\neq 0$ とすれば $x_{21}=\dfrac{-1-\alpha^2}{\beta}$ となり

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \dfrac{-1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha\end{pmatrix}\ (\ \beta\neq 0\ )$$

を得る。実際に代入してみると

$$\boldsymbol{X}^2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \dfrac{-1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \dfrac{-1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \dfrac{-1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{E}$$

となる。よって解は無限個ある。

複素数でよければ

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}i & 0\\ \alpha & -i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-i & 0\\ \alpha & i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}i & \alpha\\ 0 & -i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-i & \alpha\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

たとえば

$$\begin{pmatrix}-i & 0\\ \alpha & i\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-i & 0\\ \alpha & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 0\\ \alpha & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

（P．29　問3　ハミルトンの四元数）

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{J}^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{F}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{G}^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

$aE+bJ=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $cF+dG=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aE+bJ & -(cF+dG) \\ cF+dG & aE+bJ \end{pmatrix}$$

$$=(aE+bJ)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(cF+dG)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=(aE+bJ)E+(cF+dG)J$$

$$B=\begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} wE+xJ & -(yF+zG) \\ yF+zG & wE+xJ \end{pmatrix}$$

$$=(wE+xJ)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(yF+zG)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=(wE+xJ)E+(yF+zG)J$$

$(A+B)+C=A+(B+C)$ は明らか

$A\times B=\{(aE+bJ)E+(cF+dG)J\}\{(wE+xJ)E+(yF+zG)J\}$

$=(aE+bJ)(wE+xJ)E+(aE+bJ)(yF+zG)J+(cF+dG)(wE+xJ)J-(cF+dG)(yF+zG)E$

$=\{(aE+bJ)(wE+xJ)-(cF+dG)(yF+zG)\}E+\{(aE+bJ)(yF+zG)+(cF+dG)(wE+xJ)\}J$

複素数の積の式に似ている。$(cF+dG)$ を何と言ったらよいかわからない。

元に戻るとする

$A\times B$

$$=\begin{pmatrix} aw-bx-cy-dz & -ax-bw-cz+dy & -ay+bz-cw-dx & -az-by+cx-dw \\ ax+bw+cz-dy & aw-bx-cy-dz & -az-by+cx-dw & ay-bz+cw+dx \\ ay-bz+cw+dx & az+by-cx+dw & aw-bx-cy-dz & -ax-bw-cz+dy \\ az+by-cx+dw & -ay+bz-cw-dx & ax+bw+cz-dy & aw-bx-cy-dz \end{pmatrix}$$

$B\times A$

$$=\begin{pmatrix} aw-bx-cy-dz & -ax-bw+cz-dy & -ay-bz-cw+dx & -az+by-cx-dw \\ ax+bw-cz+dy & aw-bx-cy-dz & -az+by-cx-dw & ay+bz+cw-dx \\ ay+bz+cw-dx & az-by+cx+dw & aw-bx-cy-dz & -ax-bw+cz-dy \\ az-by+cx+dw & -ay-bz-cw+dx & ax+bw-cz+dy & aw-bx-cy-dz \end{pmatrix}$$

$A\times B\neq B\times A$ （非可換）

$A+B$、$A\times B$ も四元数の形になっている。つまり、加法および乗法に関して閉じていることがわかる。次に転置であるが、閉じている。また、逆数は

$${}^tA=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\ {}^t\!A$$

ここで

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と置くと

$$\boldsymbol{i}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{j}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{k}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{i}$$

$$ik = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -j$$

$$ki = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = j$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

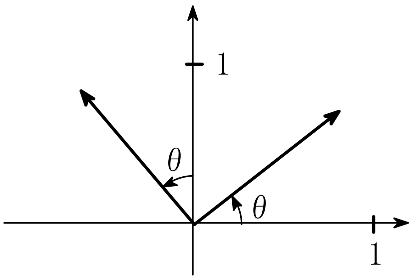
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aE + bi + cj + dk$$

（P．30　回転行列）

$$Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



（P．31　解が n 個）

$$\frac{\theta+2\pi\times 0}{n} \neq \frac{\theta+2\pi\times 1}{n} \neq \frac{\theta+2\pi\times 2}{n} \neq \cdots \neq \frac{\theta+2\pi\times(n-1)}{n} \neq \frac{\theta+2\pi\times n}{n}$$

$$\neq \frac{\theta+2\pi\times(n+1)}{n}$$

$k = n$ の場合

$$\cos\left(\frac{\theta+2\pi\times n}{n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \quad （k = 0 に等しい）$$

$$\sin\left(\frac{\theta+2\pi\times n}{n}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) \quad （k = 0 に等しい）$$

$k = n+1$ の場合

$$\cos\left(\frac{\theta+2\pi\times(n+1)}{n}\right) = \cos\left(\frac{\theta+2\pi n+2\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\theta+2\pi\times 1}{n}+2\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\theta+2\pi\times 1}{n}\right)$$

$sin(\dfrac{\theta+2\pi\times(n+1)}{n}) = sin(\dfrac{\theta+2\pi\times 1}{n})$ （$k=1$ に等しい）

よって、$k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ とすればよい。

特に、1のn乗根は、$r=1$、$\theta=0$ として、

$1, \zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}$; $\zeta = cos(\dfrac{2\pi}{n}) + i\,sin(\dfrac{2\pi}{n})$

$\zeta^k = (cos(\dfrac{2\pi}{n}) + i\,sin(\dfrac{2\pi}{n}))^k = cos(\dfrac{2\pi k}{n}) + i\,sin(\dfrac{2\pi k}{n})$ だからである。

（P. 33 双一次形式の脚注）

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \boldsymbol{a}_\nu, \sum_{\mu=1}^{m} d_\mu \boldsymbol{b}_\mu\right)$$
$$= \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \boldsymbol{a}_\nu, d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + d_m\boldsymbol{b}_m\right)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu d_1(\boldsymbol{a}_\nu, \boldsymbol{b}_1) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu d_2(\boldsymbol{a}_\nu, \boldsymbol{b}_2) + \cdots + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu d_m(\boldsymbol{a}_\nu, \boldsymbol{b}_m)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu d_\mu(\boldsymbol{a}_\nu, \boldsymbol{b}_\mu)$$
$$= \sum_{\nu,\mu} c_\nu d_\mu(\boldsymbol{a}_\nu, \boldsymbol{b}_\mu)$$

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に関して双一次形式とすれば、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に関して線形なので $\boldsymbol{e}_i$（$1 \leqq i \leqq n$）$\boldsymbol{e}_j'$（$1 \leqq j \leqq m$）を n 次元、m 次元の単位ベクトル、$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j' \rangle = a_{ij}$ とおくとき

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{m} y_j\boldsymbol{e}_j' \rangle$ は線形なので

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j' \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_1 a_{i1} + y_2 a_{i2} + \cdots + y_m a_{im})$$
$$= x_1(y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \cdots + y_m a_{1m}) + x_2(y_1 a_{21} + y_2 a_{22} + \cdots + y_m a_{2m}) + x_n(y_1 a_{n1} + y_2 a_{n2} + \cdots + y_m a_{nm})$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

したがって、$A = (a_{ij})$ とした場合

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ となる。

（P．34　双対写像）

$f : y \to Ay$ を m 次元ベクトル空間から n 次元ベクトル空間への一次写像とすれば

任意の n 次元ベクトル x に対して、写像 $y \to (x, Ay)$ は m 次元ベクトル空間から普通の 1 次元の数の空間への一次写像 g になる。したがって、定理 2 から $(1, n)$ 行列、${}^t z$ があって $g(y) = {}^t zy = (z, y) = (x, Ay)$ とかける。(29) からこの z が ${}^t Ay$ で与えられることになる。

一次写像 $x \to {}^t Ax$ を f の双対写像といい、${}^t f$ で表す。

（P．34　トレイス　trA）

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ を2つの n 次正方行列とする。

AB の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ なので、(i, i) 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ となる。

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) = tr(BA)$$

なぜなら

$$\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + a_{i3}b_{3i} + \cdots + a_{in}b_{ni})$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

$$+ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2}$$　　↓縦に加えると

$$+ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + \cdots + a_{3n}b_{n3}$$

$$\vdots$$

$$+ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}b_{j1} + a_{2j}b_{j2} + a_{3j}b_{j3} + \cdots + a_{nj}b_{jn})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (b_{j1}a_{1j} + b_{j2}a_{2j} + b_{j3}a_{3j} + \cdots + b_{jn}a_{nj})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij})$$

$A \to tr\,A$ が n^2 ベクトル空間から普通の数の空間への一次写像であるということは、たとえば $tr(A + B) = tr\,A + tr\,B$ であるということである。これは明らかであるので証明しないが、定理 2 から $(1, n^2)$ 行列 ${}^t b$ があって、A の成分を縦一列に並べたとき、それを x とすれば $tr\,A = {}^t bx$ とすることができることになる。

（例）

順番は勝手に決めてよい

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to {}^t x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

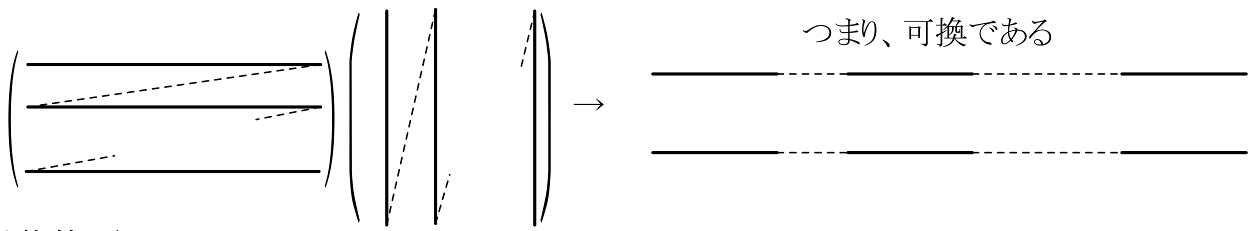
としたとき、${}^t\boldsymbol{b}$ = (1　0　0　0　1　0　0　0　1) とすれば

$tr\,A = {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$ となる。この内容は双対空間へと関係してくる。

n 次正方行列の空間を n^2 次元のベクトル空間とみなすとき、内積 $(A\,,B) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}b_{ij}$ とすれば、$(A\,,B) = tr({}^tAB) = tr(A\,{}^tB)$ となる。

なぜなら、$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) = tr(BA)$ なので

$tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}) = tr(A\,{}^tB)$　←（$i\,,j$ の順番に注意）



（具体的に）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\ r({}^tAB) = tr(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix})$$

$$= tr\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{31}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}+a_{31}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{21}b_{23}+a_{31}b_{33} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{32}b_{31} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{32} & a_{12}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{32}b_{33} \\ a_{13}b_{11}+a_{23}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{13}b_{12}+a_{23}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{31}b_{31}+a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{32}+a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}+a_{33}b_{33}$$

$$= \sum_{i=1,j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}$$

$$A \to \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{33} \end{pmatrix},\ B \to \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{33} \end{pmatrix},\ (A\,,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{33} \end{pmatrix} = tr({}^tAB)$$

つまり、列配置の成分を行列型に配置仕直すと tr が上手に使えるということである。

（P．34　問2）

$f : Y \to AY$ は スカラー乗法の定義と (11) から、n^2 次元ベクトル空間から n^2 次元ベクトル空間への一次変換である。また、任意の n^2 次元ベクトル X に対して、写像 $Y \to (AY\,,X)$ は n^2 次元ベクトル空間から普通の数の空間への一次写像である。よって、ある $(1\,,n^2)$行列、すなわち 横ベクトル ${}^tZ$ があって、$Y = {}^tZY = (Y\,,Z) = (AY\,,X)$ とすることができる。$(AY\,,X) = tr({}^tY\,{}^tAX) = (Y\,,{}^tAX) = (Y\,,Z)$ よって、$X \to {}^tAX$ が f の双対写像となる。あとは同様にしてわかる。

（P. 33　複素数の内積）

$$\alpha\overline{\beta} = \overline{\overline{\alpha}\beta} = \overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta} = \overline{\beta}\,\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\beta\overline{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n} = \overline{\beta_1\overline{\alpha_1}} + \cdots + \overline{\beta_n\overline{\alpha_n}} = \overline{\beta_1\overline{\alpha_1} + \cdots + \beta_n\overline{\alpha_n}}$$

$$= \overline{(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a}})}$$

したがって　$(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) + (\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a}}) = 2\mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})$

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\overline{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) + (\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a}}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$(\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

よって、$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2$ と $(\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2$ の大小は $\mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ に帰着される。

$\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$　に対し

$$\|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \overline{\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}) = (\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \lambda\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}})$$

$$= \lambda^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + \lambda(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) + \lambda(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a}}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$= \lambda^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})\lambda + \|\boldsymbol{b}\|^2 \geqq 0$$

判別式により

$$4\mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})^2 - 4\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq 0 \quad \to \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

$(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) \neq 0$ のとき、$\zeta = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})}{|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})|}$　$(\|\zeta\| = 1)$ とおく

$$|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})| = \frac{|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})|^2}{|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})|} = \frac{(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})\overline{(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})}}{|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})|} = \overline{\zeta}(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) = (\overline{\zeta}\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})$$

$|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})|$ は実数なので、$(\overline{\zeta}\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})$ は実数である。よって

$$|(\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}})| = \mathcal{R}(\overline{\zeta}\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) \leqq \|\overline{\zeta}\boldsymbol{a}\|\cdot\|\overline{\boldsymbol{b}}\| = \|\overline{\zeta}\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|$$

（P. 37　行列の指数関数に関する微分方程式）

$\lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{A}_\nu = \boldsymbol{A}$, $\lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{B}_\nu = \boldsymbol{B}$　のとき　$\lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{B}_\nu = \boldsymbol{AB}$ については、行列の内積からノルムを定義すればよいが、ここでは省略する。

$$E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{\nu\,!}A^{\nu}+\cdots$$

が収束することについては、(*) $|a_{ij}{}^{(\nu)}| \leqq n^{\nu-1}M^{\nu}$ （$1 \leqq i, j \leqq n$）と正級数

$$\frac{1}{n}e^{nM}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu\,!}n^{\nu}M^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu\,!}n^{\nu-1}M^{\nu}$$

が収束することから、$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu\,!}a_{ij}{}^{(\nu)}$ が絶対収束し、したがって、各成分が収束するので収束することがわかる。よって、その和を $exp\ A$ で表す。

$exp\,(tA)=E+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{t^{v}}{v!}A^{v}+\cdots$ 　は収束するので

$A\cdot exp\,(tA)=exp\,(tA)\cdot A=A+tA^2+\frac{t^2}{2!}A^3+\cdots+\frac{t^{v}}{v!}A^{v+1}+\cdots$ 　交換可能！

$$\frac{d}{dt}F(t)=A\cdot F(t)$$

$$\frac{d}{dt}F(t)=\frac{d}{dt}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & & y_j & & \\ & & \downarrow & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ & & \vdots & & \\ y_{n1} & \cdots & y_{nj} & \cdots & y_{nn}\end{pmatrix}\end{array}=A\cdot\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ & & \vdots & & \\ y_{n1} & \cdots & y_{nj} & \cdots & y_{nn}\end{pmatrix}$$

$=(A\boldsymbol{y}_1, \cdots, A\boldsymbol{y}_j, \cdots, A\boldsymbol{y}_n)$

したがって

$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}_j=A\boldsymbol{y}_j$ なので $F(t)=exp\,(tA)$ がわかれば、その j 列が $\boldsymbol{y}_j$ となる。各 j に対し

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ 、$\boldsymbol{y}_j=(y_{ij}(t)) \rightarrow \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}_j=\begin{pmatrix} y_{1j}(t) \\ y_{2j}(t) \\ \vdots \\ y_{nj}(t)\end{pmatrix}$ とおけば、次の様な連立線型微分方程式の一つの解を与えることになる。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n\end{pmatrix}=A\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} a_{11}y_1+\cdots+a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1+\cdots+a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1+\cdots+a_{nn}y_n\end{pmatrix}$$

それが $1 \leqq j \leqq n$ なので、n 個解があることになる。

また、$F(0)=exp\,(0A)=E$ なので、

それぞれの初期条件は $(\boldsymbol{y}_1(0), \cdots, \boldsymbol{y}_j(0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(0))=E$ 　つまり

$\boldsymbol{y}_j(0)=\boldsymbol{e}_j$ 　あるいは　$\begin{pmatrix} y_{1j}(0) \\ \vdots \\ y_{jj}(0) \\ \vdots \\ y_{jn}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

に対応する解であるから、連立線型微分方程式の基本解が $exp\,(tA)$ の n 個の列ベクトル（それらが一次独立であることは Ⅲ 章でわかる）によって与えられるのである。

また、任意のスカラー α に対し、$\dfrac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{y} = \alpha A\boldsymbol{y} = A(\alpha\boldsymbol{y})$ なので、$\alpha\boldsymbol{y}$ も解となる。したがって、この解は n 個あり、一般解はその線型結合で表すことができるので、

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{y}_1 + \alpha_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{y}_n$$

となる。

（P. 40　問）

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A = E + K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ とすれば、

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3K$$ 　また E , K は交換可能なので

$A^2 = (E+K)^2 = E + 2K + 3K = E + 5K$, $A^3 = (E+K)^3 = E + 3K + 9K + 9K = E + 21K$

$A^4 = (E+K)^4 = E + 4K + 6\cdot 3K + 4\cdot 9k + 27K = E + (4+18+36+27)K = E + 85K$

ν	1	2	3	4	5
	1	5	21	85	?
差	4	16	64		
	4^1	4^2	4^3		

$$4s = 4 + \cdots + 4^{\nu}$$
$$s = 1 + \cdots + 4^{\nu-1} \rightarrow 3s = 4^{\nu} - 1 \rightarrow s = \frac{4^{\nu}-1}{3}$$

$A^{\nu} = E + (1 + 4 + \cdots + 4^{\nu-1})K = E + \dfrac{4^{\nu}-1}{3}K$ と予想できる。

$\nu = 1$ のときは成り立つので、$\nu-1$ で成り立つと仮定して帰納法で証明する。

$$A^{\nu} = (E+K)^{\nu} = (E+K)^{\nu-1}(E+K) = \left(E + \frac{4^{\nu-1}-1}{3}K\right)(E+K)$$

$$= E + K + \frac{4^{\nu-1}-1}{3}K + \frac{4^{\nu-1}-1}{3}K^2 = E + K + \frac{4^{\nu-1}-1}{3}K + \frac{4^{\nu-1}-1}{3}\cdot 3K$$

$$= E + \frac{3 + 4^{\nu-1} - 1 + 3(4^{\nu-1}-1)}{3}K = E + \frac{4\cdot 4^{\nu-1}-1}{3}K = E + \frac{4^{\nu}-1}{3}K \quad (END)$$

よって

$$exp\ tA = E + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}t^{\nu}\left(E + \frac{4^{\nu}-1}{3}K\right)$$

$$= e^tE + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}t^{\nu}\frac{4^{\nu}-1}{3}K = e^tE + \frac{e^{4t}-e^t}{3}K$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{4t}+2e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}+2e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}+2e^t}{3} \end{pmatrix}$$

$$exp\ tA = \begin{pmatrix} \frac{e^{4t}+2e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}+2e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}-e^t}{3} & \frac{e^{4t}+2e^t}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{y}_3 \end{pmatrix}$$ ← 基本解

$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{y}_1 + \alpha_2\boldsymbol{y}_2 + \alpha_3\boldsymbol{y}_3$ ← 基本解の線型結合

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{e^{4t}+2e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}+2e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}-e^t}{3} \\ \frac{e^{4t}+2e^t}{3} \end{pmatrix}$$

初期条件から $y_1(0) = \alpha = 1$, $y_2(0) = \beta = 1$, $y_3(0) = \gamma = 1$ なので

$$y_1(t) = \frac{e^{4t}+2e^t}{3} + \frac{e^{4t}-e^t}{3} + \frac{e^{4t}-e^t}{3} = e^{4t} \ ,\ y_2(t) = e^{4t} \ ,\ y_3(t) = e^{4t}$$

（P. 41　有限集合の定義）

有限集合の自分自身への一対一の写像は必ず上への写像になる。有限集合の自分自身への上への写像は必ず一対一の写像になる。

有限集合を A とおく、そして、A の元の個数を n とする。自分自身への一対一の写像 f があったとして、f が上への写像になることを示す。

f がもし上への写像でなければ、$f(A) \subset A$ となり、A に含まれていて、$f(A)$ に含まれていない元があるはずである。しかし、f は一対一の写像なので、$f(A)$ の元の個数は n 個、つまり、A の元の個数が n 個以上あることになり矛盾する。

後半は、上への写像 f が一対一の写像ではないと仮定して矛盾を示す。

もし、A の異なる元 a , b において、$f(a) = f(b)$ であったとすれば、$f(A)$ の元の個数が n 個未満となってしまい、$f(A) = A$ に矛盾する。

（P. 43　11行）

置換 σ , τ が与えられたとき、$\sigma\xi = \tau$ または $\xi\sigma = \tau$ となるような置換 ξ が一意的に存在し、それぞれ $\xi = \sigma^{-1}\tau$, $\xi = \tau\sigma^{-1}$ （これらは一般に相異なる）で与えられる。

（証明）

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対し、$\rho = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ とおけば

$\rho\sigma(i) = i$ であり、$\sigma\rho(i_k) = i_k$ なので $\rho\sigma = \sigma\rho = 1$ となる。また、他に $\rho'\sigma = \sigma\rho' = 1$ となる ρ' があったとすれば、$\rho = \rho 1 = \rho\sigma\rho' = 1\rho' = \rho'$

したがって、$\rho\sigma = \sigma\rho = 1$ となる ρ は一意的に存在する。そこで、$\rho = \sigma^{-1}$ とすれば

$\sigma\xi = \tau$ の両辺に左から σ^{-1} をほどこせば、$\xi = \sigma^{-1}\tau$ を得る。

$\sigma\xi' = \tau$ となる ξ' が存在したとすれば、$\sigma^{-1}\sigma\xi' = \sigma^{-1}\tau = \xi$ となり ξ が一意的に定まることがわかる。$\xi\sigma = \tau$ についても同様である。

用語 $GL(n, R)$：一般線型群 general linear group 正則 n 次正方行列のつくる群

（P. 44 例）

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$1, \sigma(1) = 4, \sigma^2(1) = 3, \sigma^3(1) = 1 \to (1, 4, 3)$

$2, \sigma(2) = 5, \sigma^2(2) = 2 \quad \to (2, 5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1, 4, 3)(2, 5)$$

（問1）背理法で証明

もし、$\sigma^i(1) = \sigma^j(k')$ となる i, j があったとする。$\sigma^{r'-j}\sigma^i(1) = \sigma^{r'-j}\sigma^j(k')$

$= \sigma^{r'}(k') = k'$ 　（$k', \sigma^1(k'), \sigma^2(k'), \sigma^3(k'), \cdots, \sigma^{r'-1}(k')$ なので）

したがって、k' が $1 = \sigma^0(1), \sigma^1(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1), \cdots$ に含まれることになるので矛盾する。

（問2）巡回置換の逆は並びを逆にすればよい

$$(k_1, k_2, \cdots, k_r)^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_r & k_{r-1} & \cdots & k_2 & k_1 \\ k_{r-1} & k_{r-2} & \cdots & k_1 & k_r \end{pmatrix} = (k_r, k_{r-1}, \cdots, k_1)$$

（問3）

$\sigma = (k_1, k_2, \cdots, k_r)(k_{r+1}, k_{r+2}, \cdots, k_{r+r'})\cdots$

$$\tau = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_{r+r'} & \cdots \\ \ell_1 & \cdots & \ell_r & \ell_{r+1} & \cdots & \ell_{r+r'} & \cdots \end{pmatrix}$$

$\tau\sigma\tau^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_{r+r'} & \cdots \\ \ell_1 & \cdots & \ell_r & \ell_{r+1} & \cdots & \ell_{r+r'} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r & k_{r+1} & k_{r+2} & \cdots & k_{r+r'} & \cdots \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 & k_{r+2} & k_{r+3} & \cdots & k_{r+1} & \cdots \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_r & \ell_{r+1} & \cdots & \ell_{r+r'} & \cdots \\ k_1 & \cdots & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_{r+r'} & \cdots \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_r & \ell_{r+1} & \ell_{r+2} & \cdots & \ell_{r+r'} & \cdots \\ \ell_2 & \ell_3 & \cdots & \ell_1 & \ell_{r+2} & \ell_{r+3} & \cdots & \ell_{r+1} & \cdots \end{pmatrix}$

$= (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_r)(\ell_{r+1}, \ell_{r+2}, \cdots, \ell_{r+r'})\cdots$

（問4）

$(k_1, k_2, \cdots, k_r) = (k_1, k_r)(k_1, k_{r-1})\cdots(k_1, k_3)(k_1, k_2)$ を証明する。

$k_1, k_2, \cdots, k_r$ に (k_1, k_2) をほどこせば、$k_2, k_1, k_3, \cdots, k_r$ になる。次に、(k_1, k_3) をほどこせば、$k_2, k_3, k_1, \cdots, k_r$ 、よって、$(k_1, k_{r-1}), (k_1, k_r)$ まで次々とほどこしていけば、$k_2, k_3, k_4, \cdots, k_r, k_1$ となる。

つまり、$(k_1, k_2, \cdots, k_r)$ に等しい。

（例） $(2, 4, 5, 1, 3) = (2, 3)(2, 1)(2, 5)(2, 4)$

$(2, 3)(2, 1)(2, 5)(2, 4)(1) = 3$, $(2, 3)(2, 1)(2, 5)(2, 4)(2) = 4$

$(2, 3)(2, 1)(2, 5)(2, 4)(3) = 2$, $(2, 3)(2, 1)(2, 5)(2, 4)(4) = 5$

$(2, 3)(2, 1)(2, 5)(2, 4)(5) = 1$

(5) $(j, k) = (i, j)(i, k)(i, j)$

$1, \cdots, i, \cdots, j, \cdots, k, \cdots, n$ に

(i, j) をほどこすと、$1, \cdots, j, \cdots, i, \cdots, k, \cdots, n$ となる。 次に

(i, k) をほどこすと、$1, \cdots, j, \cdots, k, \cdots, i, \cdots, n$

(i, j) をほどこすと、$1, \cdots, i, \cdots, k, \cdots, j, \cdots, n$ つまり、(j, k) に等しい。

（P. 45　σf）

$(\tau f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \cdots, x_{\tau(n)})$ である。$g = \tau f$ とし、σを作用させると $\sigma g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$

$y_1 = x_{\sigma(1)}, y_2 = x_{\sigma(2)}, \cdots, y_n = x_{\sigma(n)}$ とおけば

$\sigma g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

一方、$g = \tau f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \cdots, y_{\tau(n)})$

$y_j = x_{\sigma(j)}$ に $j = \tau(q)$ を代入すると $y_{\tau(q)} = x_{\sigma(\tau(q))}$ これより

$$\begin{aligned}(\sigma(\tau f)(x_1, x_2, \cdots, x_n))) &= (\tau f)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \\ &= (\tau f)(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &= f(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \cdots, y_{\tau(n)}) \\ &= f(x_{\sigma(\tau(1))}, x_{\sigma(\tau(2))}, \cdots, x_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= f(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, \cdots, x_{\sigma\tau(n)}) = (\sigma\tau)f\end{aligned}$$

（P. 46　互換の積の符号）

偶数個の互換の積の符号

$\sigma=(a,b)(c,d)$ の2つの互換を考える。

（ｉ）$a=b=c=d$ の場合（０個の積）

$\varepsilon(\sigma)=(a,a)(a,a)=+1$

（ⅱ）3つ等しく1つだけ違う場合

$(a,a)(a,b)\quad(a,a)(b,a)\quad(a,b)(a,a)\quad(b,a)(a,a)$

$(a,a)(a,b)=(a,b)$ は奇数個の置換（他も同じ）なので考えない。

（ⅲ）2つずつ等しい場合（０個、または、２個の互換の積）

$(a,a)(c,c)\quad(a,d)(a,d)\quad(a,c)(c,a)$

$\sigma=1$ なので、$\varepsilon(\sigma)=+1$

（ⅳ）2つだけ等しい場合

$(a,a)(c,d)\quad(a,b)(a,d)\quad(a,b)(c,a)$

$(a,a)(c,d)$ は奇数個の置換なので考えない。他の2つは２個の互換の積

$(j,k)=(i,j)(i,k)(i,j)$ に $j=d,k=a,i=b$ として代入すると

$(a,d)=(d,a)=(b,d)(b,a)(b,d)$

$(a,b)(a,d)=(a,b)(b,d)(a,b)(b,d)$

$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon((a,b)(b,d)(a,b)(b,d))=\varepsilon((a,b))^2\cdot\varepsilon((b,d))^2=+1$

（ｖ）4つとも違う場合（２個の互換の積）

$\sigma=(a,b)(c,d)=(a,b)(a,d)(d,a)(d,c)$　したがって、（ⅳ）から

$\varepsilon(\sigma)=+1$ となる。

$(a,b)(a,d)(d,a)(d,c)$ は、$a\to b,\ b\to a,\ c\to d,\ d\to c$ なので $(a,b)(c,d)$ に等しい。

（例）

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&3&2\end{pmatrix}=(1,4,3)(2,5)=(1,3)(1,4)(2,5)\ \to\ \varepsilon(\sigma)=-1$$

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}=(2,5)(1,4)(1,3)\ \to\ \varepsilon(\sigma^{-1})=-1$$

σ の逆元は互換の順を逆にすればよいので個数は変わらない。

以上のことから、すべての置換 σ に対して $\sigma f=\pm f$ になる場合を考えているので $\varepsilon(\sigma)$ の符号によって符号が決まるのであるから、σ が偶数個の互換の積ならば、2つずつのペアにするこ

とができるので $\varepsilon(\sigma)=+1$ となる。よって、ある σ_1 に対して $\varepsilon(\sigma_1)=-1$ であるとすれば、σ_1 は奇数個の互換の積でなければならないことになる。逆に σ_2 を奇数個の互換の積であるような任意の置換とすれば、$\sigma_1^{-1}\sigma_2$ は偶数個の互換の積であるから $\varepsilon(\sigma_1^{-1}\sigma_2)=1$ したがって $\varepsilon(\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_1^{-1}\sigma_2)=-1$ となる。

群論の復習

群 G の部分集合 H が G の乗法に関して群になるための必要十分条件は、τ、$\sigma\in H$ のとき、$\sigma\tau\in H$、$\sigma^{-1}\in H$ である。

なぜなら、(Ⅰ) 結合法則は σ、τ、$\rho\in H$ のとき、$(\sigma\tau)\in H$ なので、$(\sigma\tau)\rho\in H$ である。また、同様に $\sigma(\tau\rho)\in H$、$H\subset G$ なので、$(\sigma\tau)\rho=\sigma(\tau\rho)$、したがって、一致していて共に H の元なので、結合法則は成り立つ。(Ⅱ) 任意の $\sigma\in H$ に対し、$\sigma^{-1}\in H$ なので、$\sigma\sigma^{-1}$、$\sigma^{-1}\sigma\in H\subset G$、$G$ の元なので、$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=1$ よって、H の元として、$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=1\in H$ となる。

(Ⅲ) $1\in H\subset G$ なので、任意の $\sigma\in H$ に対し、1σ、$\sigma 1\in H$ であり、$H\subset G$ なので $1\sigma=\sigma 1=\sigma\in H$ となる。

傍系分解

$\sigma_1 H$ の元の個数は H の位数に等しい。

($\sigma_1 H$ の元の個数) $\leqq$ (H の位数) は明らかである。

($\sigma_1 H$ の元の個数) $<$ (H の位数) だとしたら、$h\neq h'$ で $\sigma_1 h=\sigma_1 h'$ となる $h, h'\in H$ が存在するはずである。しかし、$\sigma_1^{-1}\sigma_1 h=h=\sigma_1^{-1}\sigma_1 h'=h'$ となり、矛盾する。

(P. 48 例)

任意の交代式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は差積で割り切れる。

(剰余定理) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において、$x_1=h(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ とおいたとき

$f(h(x_2, x_3, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)=0$ ならば、f は $(x_1-h(x_2, x_3, \cdots, x_n))$ で割り切れる。

したがって、$x_1=h(x_2, x_3, \cdots, x_n)=x_2$ とした場合、x_1-x_2 で割り切れることになる。よって同様に繰り返していけば

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

f は交代式だったので、任意の互換 τ に対し

$\tau f = \tau(\Delta \cdot g) = \tau \Delta \cdot \tau g = -\Delta \cdot \tau g = -f = -\Delta \cdot g$

よって、$\tau g = g$ となる。

任意の置換は互換の積に分解できるので、g は対称式となる。

（P．48　問5）

f を任意の（n 変数）多項式とするとき

（ i ）$\sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ は対称式である。

（証）$\tau \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma} f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, \cdots, x_{\tau\sigma(n)})$

任意の置換 τ を一つ定めたとき、S_n を n 次対称群とすれば、σ が S_n のなかをもれなく動いたとすれば $\tau\sigma$ も S_n の中をもれなく動く。なぜなら、$\sigma \neq \sigma'$ ならば $\tau\sigma \neq \tau\sigma'$ なので $\sigma \to \tau\sigma$ の対応は、S_n から S_n への単射であり、有限集合（$n!$ 個）の場合は全射でもあるので全単射となるからである。したがって、

$\tau \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$

となり、対称式といえる。

（ ii ）$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ は交代式である。

（例）

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2$ とすれば

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \right\}$

$\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = 1$, $\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = -1$, $\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = -1$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (1, 2, 3) = (2, 3)(1, 3)$ なので $\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = 1$, $\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = -1$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (1, 3, 2) = (3, 2)(1, 2)$ なので $\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = 1$

$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 - x_3^2 x_2 + x_3^2 x_1$

$\tau = (2, 3)$ とすれば

$\tau \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_1^2 x_2 = x_1^2 x_3 - x_1^2 x_2 - x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 - x_2^2 x_3 + x_2^2 x_1 = -\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_1^2 x_2$

τ を任意の互換とすれば、（ i ）と同様に

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\tau\sigma) f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, \cdots, x_{\tau\sigma(n)})$$

$$\tau \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\tau\sigma) f(x_{\tau\tau\sigma(1)}, x_{\tau\tau\sigma(2)}, \cdots, x_{\tau\tau\sigma(n)})$$

$$= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

$$= -\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

(P. 50　例　三角行列の行列式)

$$det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma) x_{1i_1} x_{2i_2} \cdots x_{ni_n}$$

の x_{ij} に a_{ij} を代入した場合、$a_{ij} = 0\ (i > j)$ である。よって、$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ のある k に対して $\sigma(k) = i_k < k$ となるような σ に対応する項はすべて = 0 になる。つまりすべての k に対し $\sigma(k) = i_k \geqq k$ となる項だけが ≠ 0 、それは、σ = 1 の場合だけである。なぜなら、仮にすべての k に対し $\sigma(k) \geqq k$ となる $\sigma \neq 1$ が存在してとすれば、$\sigma(1) \geqq 1$, $\sigma(2) \geqq 2$, $\sigma(3) \geqq 3$, ⋯ , $\sigma(n) \geqq n$ となる。n より大きいことはありえないので、$\sigma(n) = n$ とせざるおえない、$\sigma(n-1) \geqq n-1$ すでに n はつかってしまったので、$\sigma(n-1) = n-1$ とするしかない。最終的に、$\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 3$, ⋯ , $\sigma(n) = n$ つまり、$\sigma \neq 1$ に反する。

(P. 48　例2)

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n})$ は一次変換である。よってそれに対応する行列 A が存在する。

$$Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ x_{k_2} \\ \vdots \\ x_{k_n} \end{pmatrix} \quad \to \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n)\, {}^t\! A = (x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n})$$

${}^t\! A$ を A_τ とする。

$(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, \cdots, x_{\sigma\tau(n)}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A_{\sigma\tau} = (x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, \cdots, x_{\ell_n}) A_\tau = ((x_1, x_2, \cdots, x_n) A_\sigma) A_\tau = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A_\sigma A_\tau$

$\boldsymbol{A}_{\sigma}\boldsymbol{A}_{\sigma^{-1}} = \boldsymbol{A}_{\sigma\sigma^{-1}} = \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}$ なので $\boldsymbol{A}_{\sigma^{-1}} = \boldsymbol{A}_{\sigma}^{-1}$

(例)

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow{\boldsymbol{f}} (x_3, x_4, x_2, x_1)$$ という写像 $\boldsymbol{f}$ を考えたとき、

$k_1\ k_2\ k_3\ k_4$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4), \qquad \alpha, \beta \in \boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{f}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$

$= (\alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1)$

$= (\alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_2, \alpha x_1) + (\beta y_3, \beta y_4, \beta y_2, \beta y_1)$

$= \alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \beta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

よって、線型写像なので一次変換である。

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ という行列で表現できる。

j

↓

$\tau(1) = k_1$ 行を1にする

↓

$$^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 1 \quad (i = \tau(j))$

$a_{ij} = 0 \quad (i \neq \tau(j))$

例	
	$a_{11} = 0\ (1 \neq \tau(1) = 3)$
	$a_{21} = 0\ (2 \neq \tau(1))$
	$a_{31} = 1\ (3 = \tau(1))$
	$a_{41} = 0\ (4 \neq \tau(1))$

一般には、$\boldsymbol{A}_{\tau} = (\delta_{i,\tau(j)})$ となる。

定義から、$|\boldsymbol{A}|$ は $|\boldsymbol{X}| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$ の x_{ij} に a_{ij} を代入して求める。

ので、例えば

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31}$$

に a_{ij} を代入して求めることになる。つまり、すべての σ が施されてから代入することになる。したがって、次のように $\tau\ \sigma$ の順になる。

$$\det \boldsymbol{A}_{\tau} = \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma)\, \delta_{1,\tau\sigma(1)}\, \delta_{2,\tau\sigma(2)} \cdots \delta_{n,\tau\sigma(n)}$$

$\delta_{1,1}=\delta_{2,2}=\delta_{3,3}=\cdots=\delta_{n,n}=1$ なので　$\tau\sigma(1)=1$，$\tau\sigma(2)=2$，$\tau\sigma(3)=3$，$\cdots$，$\tau\sigma(n)=n$　となる項だけが生き残る。つまり、$\tau\sigma=1$　、　$\sigma=\tau^{-1}$ の項だけである。よって、$det\,A_{\tau}=\varepsilon(\tau^{-1})=\varepsilon(\tau)$ となる。

（P．51 (7) の一般項（具体的に））

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(2,3)(2,1)\to\varepsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}x_{3\sigma(3)}=x_{13}x_{21}x_{32}=x_{21}x_{32}x_{13}$

$=x_{\sigma^{-1}(1)1}x_{\sigma^{-1}(2)2}x_{\sigma^{-1}(3)3}$

（具体的に）

$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ とする。$det(x_{ij})=\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}x_{3\sigma(3)}$

$\{\sigma_1=\sigma_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\sigma_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\sigma_3=\sigma_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$，$\sigma_4=\sigma_6^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$，$\sigma_5=\sigma_5^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$，$\sigma_6=\sigma_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\}=S_3$

$=\varepsilon(\sigma_1)x_{1\sigma_1(1)}x_{2\sigma_1(2)}x_{3\sigma_1(3)}+\varepsilon(\sigma_2)x_{1\sigma_2(1)}x_{2\sigma_2(2)}x_{3\sigma_2(3)}+\varepsilon(\sigma_3)x_{1\sigma_3(1)}x_{2\sigma_3(2)}x_{3\sigma_3(3)}+$
$\varepsilon(\sigma_4)x_{1\sigma_4(1)}x_{2\sigma_4(2)}x_{3\sigma_4(3)}+\varepsilon(\sigma_5)x_{1\sigma_5(1)}x_{2\sigma_5(2)}x_{3\sigma_5(3)}+\varepsilon(\sigma_6)x_{1\sigma_6(1)}x_{2\sigma_6(2)}x_{3\sigma_6(3)}$

$=x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{23}x_{32}-x_{12}x_{21}x_{33}+x_{12}x_{23}x_{31}-x_{13}x_{22}x_{31}+x_{13}x_{21}x_{32}$

$=x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{32}x_{23}-x_{21}x_{12}x_{33}+x_{31}x_{12}x_{23}-x_{31}x_{22}x_{13}+x_{21}x_{32}x_{13}$

$=\varepsilon(\sigma_1)x_{\sigma_1^{-1}(1)1}x_{\sigma_1^{-1}(2)2}x_{\sigma_1^{-1}(3)3}+\varepsilon(\sigma_2)x_{\sigma_2^{-1}(1)1}x_{\sigma_2^{-1}(2)2}x_{\sigma_2^{-1}(3)3}$
$+\varepsilon(\sigma_3)x_{\sigma_3^{-1}(1)1}x_{\sigma_3^{-1}(2)2}x_{\sigma_3^{-1}(3)3}+\varepsilon(\sigma_4)x_{\sigma_4^{-1}(1)1}x_{\sigma_4^{-1}(2)2}x_{\sigma_4^{-1}(3)3}$
$+\varepsilon(\sigma_5)x_{\sigma_5^{-1}(1)1}x_{\sigma_5^{-1}(2)2}x_{\sigma_5^{-1}(3)3}+\varepsilon(\sigma_6)x_{\sigma_6^{-1}(1)1}x_{\sigma_6^{-1}(2)2}x_{\sigma_6^{-1}(3)3}$

$=\sum\varepsilon(\sigma^{-1})x_{\sigma^{-1}(1)1}x_{\sigma^{-1}(2)2}x_{\sigma^{-1}(3)3}$

$=\varepsilon(\sigma_1)x_{\sigma_1(1)1}x_{\sigma_1(2)2}x_{\sigma_1(3)3}+\varepsilon(\sigma_2)x_{\sigma_2(1)1}x_{\sigma_2(2)2}x_{\sigma_2(3)3}$
$+\varepsilon(\sigma_3)x_{\sigma_3(1)1}x_{\sigma_3(2)2}x_{\sigma_3(3)3}+\varepsilon(\sigma_6)x_{\sigma_6(1)1}x_{\sigma_6(2)2}x_{\sigma_6(3)3}$
$+\varepsilon(\sigma_5)x_{\sigma_5(1)1}x_{\sigma_5(2)2}x_{\sigma_5(3)3}+\varepsilon(\sigma_4)x_{\sigma_4(1)1}x_{\sigma_4(2)2}x_{\sigma_4(3)3}$

$=\sum\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}x_{\sigma(3)3}$

$=\begin{vmatrix}x_{11}&x_{21}&x_{31}\\x_{12}&x_{22}&x_{32}\\x_{13}&x_{23}&x_{33}\end{vmatrix}=|{}^tX|$

(一般的には)

$\boldsymbol{det\ X} = \sum \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{i\sigma(i)} \cdots x_{n\sigma(n)}$

σは全単射なので、$\sigma(1), \cdots, \sigma(n)$ は $1, \cdots, n$ の順列である。小さい順に並び替え、

$\sigma^{-1}(j) = i$ とすれば

$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma^{-1}(1)1} x_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots x_{\sigma^{-1}(j)j} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)n}$

σが S_n を動くとき、σ^{-1} も S_n をすべて動き、$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ なので

同じ σ^{-1} にすることが必要!

$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, x_{\sigma^{-1}(1)1} x_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots x_{\sigma^{-1}(j)j} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)n}$

$= \sum \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(i)i} \cdots x_{\sigma(n)n} = \boldsymbol{det}\ {}^t\boldsymbol{X}$

(P. 52 定理3)

A の j 列が、$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}\ (1 \leqq i \leqq n)$

$\boldsymbol{det\ A} = \sum \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$= \sum \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$

$= \sum \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a''_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

(P. 50 行列式が交代的)

(具体的に)

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$|\boldsymbol{X}| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(3)3} x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2}$

$= \varepsilon(\sigma_1) x_{\sigma_1(3)3} x_{\sigma_1(1)1} x_{\sigma_1(2)2} + \varepsilon(\sigma_2) x_{\sigma_2(3)3} x_{\sigma_2(1)1} x_{\sigma_2(2)2} + \varepsilon(\sigma_3) x_{\sigma_3(3)3} x_{\sigma_3(1)1} x_{\sigma_3(2)2}$

$+ \varepsilon(\sigma_4) x_{\sigma_4(3)3} x_{\sigma_4(1)1} x_{\sigma_4(2)2} + \varepsilon(\sigma_5) x_{\sigma_5(3)3} x_{\sigma_5(1)1} x_{\sigma_5(2)2} + \varepsilon(\sigma_6) x_{\sigma_6(3)3} x_{\sigma_6(1)1} x_{\sigma_6(2)2}$

$= \varepsilon(\sigma_1) x_{\sigma_1\tau(1)3} x_{\sigma_1\tau(2)1} x_{\sigma_1\tau(3)2} + \varepsilon(\sigma_2) x_{\sigma_2\tau(1)3} x_{\sigma_2\tau(2)1} x_{\sigma_2\tau(3)2}$

$+ \varepsilon(\sigma_3) x_{\sigma_3\tau(1)3} x_{\sigma_3\tau(2)1} x_{\sigma_3\tau(3)2} + \varepsilon(\sigma_4) x_{\sigma_4\tau(1)3} x_{\sigma_4\tau(2)1} x_{\sigma_4\tau(3)2}$

$+ \varepsilon(\sigma_5) x_{\sigma_5\tau(1)3} x_{\sigma_5\tau(2)1} x_{\sigma_5\tau(3)2} + \varepsilon(\sigma_6) x_{\sigma_6\tau(1)3} x_{\sigma_6\tau(2)1} x_{\sigma_6\tau(3)2}$

$= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma\tau(1)3} x_{\sigma\tau(2)1} x_{\sigma\tau(3)2}$

ここで、$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$ から $\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\tau)^2\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$

$= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma} \varepsilon(\tau\sigma) x_{\sigma\tau(1)3} x_{\sigma\tau(2)1} x_{\sigma\tau(3)2}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{23} & x_{21} & x_{22} \\ x_{33} & x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$ とおけば

$= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)3} x_{\sigma(2)1} x_{\sigma(3)2} = \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}$

$$= \varepsilon(\tau) \begin{vmatrix} x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{23} & x_{21} & x_{22} \\ x_{33} & x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$$

（一般的には）

i, j に関して大小を気にしなければ

$= \sum \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(k_1)k_1} a_{\sigma(k_2)k_2} \cdots a_{\sigma(k_i)k_i} \cdots a_{\sigma(k_n)k_n}$

$a_{\sigma(k_i)k_i}$ の $\sigma(k_i)$, k_i に注意、同じ k_i であることが重要である。

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ を任意の置換とする。

$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(k_1)k_1} a_{\sigma(k_2)k_2} \cdots a_{\sigma(k_i)k_i} \cdots a_{\sigma(k_n)k_n}$

$\sigma(k_i) = \sigma(\tau(i)) = (\sigma\tau)(i)$ だから、$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$、両辺に $\varepsilon(\tau)$ をかけると、$\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)$、これを代入して

同じ στ にすることが必要！

$= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{\sigma\tau(1)k_1} a_{\sigma\tau(2)k_2} \cdots a_{\sigma\tau(i)k_i} \cdots a_{\sigma\tau(n)k_n}$

σ が S_n を動くとき、$\sigma\tau$ も S_n をすべて動くので

$= \varepsilon(\tau) \boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)k_1} a_{\sigma(2)k_2} \cdots a_{\sigma(i)k_i} \cdots a_{\sigma(n)k_n}}$ ← 列を置換した行列 A' の $|A'|$

$= \varepsilon(\tau)\, det\ A'$

$\frac{1}{\varepsilon(\tau)} = \varepsilon(\tau)$ に注意して、$det\ A' = \varepsilon(\tau)\, det\ A$

（P. 55　例）

$$\begin{vmatrix} \alpha x_2+x_3 & \beta x_3+x_1 & \gamma x_1+x_2 \\ \alpha y_2+y_3 & \beta y_3+y_1 & \gamma y_1+y_2 \\ \alpha z_2+z_3 & \beta z_3+z_1 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix} \qquad \leftarrow 2^3 \text{ 個になる}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha x_2 & \beta x_3+x_1 & \gamma x_1+x_2 \\ \alpha y_2 & \beta y_3+y_1 & \gamma y_1+y_2 \\ \alpha z_2 & \beta z_3+z_1 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & \beta x_3+x_1 & \gamma x_1+x_2 \\ y_3 & \beta y_3+y_1 & \gamma y_1+y_2 \\ z_3 & \beta z_3+z_1 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha x_2 & \beta x_3 & \gamma x_1+x_2 \\ \alpha y_2 & \beta y_3 & \gamma y_1+y_2 \\ \alpha z_2 & \beta z_3 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha x_2 & x_1 & \gamma x_1+x_2 \\ \alpha y_2 & y_1 & \gamma y_1+y_2 \\ \alpha z_2 & z_1 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & \beta x_3 & \gamma x_1+x_2 \\ y_3 & \beta y_3 & \gamma y_1+y_2 \\ z_3 & \beta z_3 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & \gamma x_1+x_2 \\ y_3 & y_1 & \gamma y_1+y_2 \\ z_3 & z_1 & \gamma z_1+z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha x_2 & \beta x_3 & \gamma x_1 \\ \alpha y_2 & \beta y_3 & \gamma y_1 \\ \alpha z_2 & \beta z_3 & \gamma z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha x_2 & \beta x_3 & x_2 \\ \alpha y_2 & \beta y_3 & y_2 \\ \alpha z_2 & \beta z_3 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha x_2 & x_1 & \gamma x_1 \\ \alpha y_2 & y_1 & \gamma y_1 \\ \alpha z_2 & z_1 & \gamma z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha x_2 & x_1 & x_2 \\ \alpha y_2 & y_1 & y_2 \\ \alpha z_2 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & \beta x_3 & \gamma x_1 \\ y_3 & \beta y_3 & \gamma y_1 \\ z_3 & \beta z_3 & \gamma z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & \beta x_3 & x_2 \\ y_3 & \beta y_3 & y_2 \\ z_3 & \beta z_3 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & \gamma x_1 \\ y_3 & y_1 & \gamma y_1 \\ z_3 & z_1 & \gamma z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ y_3 & y_1 & y_2 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\beta\gamma|231| + \alpha\beta|232| + \alpha\gamma|211| + \alpha|212| + \beta\gamma|331| + \beta|332| + \gamma|311| + |312|$$

$$= \alpha\beta\gamma|231| + |312|$$

$$= |123|(\alpha\beta\gamma+1)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)(2\ 3)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(3\ 2)$$

（P. 55　例3　Vandermonde の行列式）

$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$= (x_1 \boxed{-x_2})(x_1 \boxed{-x_3})(x_1 \boxed{-x_4}) \quad \cdots \quad (x_1-x_n)$　$\leftarrow n-1$ 次

$\times(x_2 \boxed{-x_3})(x_2 \boxed{-x_4}) \quad \cdots \quad (x_2-x_n)$　$\leftarrow n-2$ 次

$\times(x_3 \boxed{-x_4})(x_3-x_5) \quad \cdots \quad (x_3-x_n)$　$\leftarrow n-3$ 次

$\cdots$

$\times(x_{n-3}-x_{n-2})(x_{n-3}-x_{n-2})(x_{n-3}-x_n)$　$\leftarrow 3$ 次

$\times(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)$　$\leftarrow 2$ 次

$\times(x_{n-1}-x_n)$　$\leftarrow 1$ 次

したがって、差積の次数は、$1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$(a+(-b))(a+(-c))(a+(-d))\times(b+(-c))(b+(-d))\times(c+(-d))$

$=a^3b^2c-a^3b^2d-a^3bc^2+a^3bd^2+a^3c^2d-a^3cd^2-a^2b^3c+a^2b^3d+a^2bc^3-a^2bd^3-a^2c^3d+a^2cd^3+ab^3$
$c^2-ab^3d^2-ab^2c^3+ab^2d^3+ac^3d^2-ac^2d^3-b^3c^2d+b^3cd^2+b^2c^3d-b^2cd^3-bc^3d^2+bc^2d^3$

$(+bc^2d^3=(-b)\times(-c)^2\times(-d)^3)$

つまり結果から想像して、差積には同類項によって項がまとまることはないので、各項の係数は 1 か −1 である。

$x_2x_3^2x_4^3\cdots x_n^{n-1}$ の符号は、$(-x_2)$が1個、$(-x_3)$が2個、$(-x_4)$が3個、…、$(-x_n)$が$(n-1)$個ある積の項なので $(-x_2)\times(-x_3)^2\times(-x_4)^3\times\cdots\times(-x_n)^{n-1}$ の符号がわかればよいことになる。

よって、$(-1)^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Vandermonde の行列式の $\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\tau)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{1\sigma(1)}$ の $\sigma=1$ とした場合はちょうど対角線の積になるので、$1x_2x_3^2x_4^3\cdots x_n^{n-1}$ つまり、係数は 1

$1=c\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$　→　$c=\dfrac{1}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$　（c と $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ の符号は同じと考える）

（P. 56　$F(x_1,\cdots,x_n)=c\,det(x_{ij})$）

$x_j=\begin{pmatrix}x_{1j}\\ \vdots \\ x_{nj}\end{pmatrix}=x_{1j}e_1+\cdots+x_{nj}e_n$ だが、$x_j=\sum_{i_j=1}^{n}x_{i_jj}e_{i_j}$ とするかであるが、対称群 S_nを上手に使うためで

$F(x_1,\cdots,x_n)=F(\sum_{i_1=1}^{n}x_{i_11}e_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n}x_{i_22}e_{i_2},\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_nn}e_{i_n})$

$=F(x_{11}e_1+x_{21}e_1+\cdots+x_{n1}e_1,\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_nn}e_{i_n})$

$=x_{11}F(e_1,\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_nn}e_{i_n})+x_{21}F(e_1,\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_nn}e_{i_n})+\cdots+x_{n1}F(e_1,\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_nn}e_{i_n})$

$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}^{n}x_{i_11}x_{i_12}\cdots x_{i_1n}F(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$　←　n^n 個の項からできている

ここで、$i_1,i_2,\cdots,i_n$ の中に相等しいものがあれば、$F(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})=0$

したがって、$i_1,i_2,\cdots,i_n$ の中に相異なるものだけが $n!$ 個残る。すなわち、$1,2,\cdots,n$ の

順列にわたるものだけとなる。i_1 , i_2 , … , i_n が 1 , 2 , … , n の順列ならば

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ とするとき

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n}^{n} x_{i_1 1}x_{i_1 2}\cdots x_{i_1 n}\,\varepsilon(\sigma)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

$$= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)x_{i_1 1}x_{i_1 2}\cdots x_{i_1 n}$$

（P. 57　例4）

$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$ の列を動かすと A_{12} に影響してしまう。A_{21}が 0 であることから、全体としてみれば A_{22} の行に関しては性質(i)、(ii)があてはまる。よって

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = c|A_{22}|$$

$$c = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & E_{(n_2)} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n_1 i_{n_1}}\,\delta_{n_1+1, i_{n_1+1}}\cdots\delta_{n, i_n}$$

ここで

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n_1 & n_1+1 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n_1} & i_{n_1+1} & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$$

$\delta_{ij} = 1$ ($i = j$) なので、$n_1 + 1 = i_{n_1+1}$, … , $n = i_n$ となる項だけが残る。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n_1 & n_1+1 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n_1} & n_1+1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

よって、σ は、1 , 2, … , n_1 の順列にわたるものとしてよい。それを σ_1 とすれば $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)$ (互換の積と考えれば符号は一致する)なので

$$c = \sum_{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n_1 \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n_1} \end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma_1)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n_1 i_{n_1}} = |A_{11}|$$

（P. 58　c_k）

$$c_k = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \cdots & x_{2,k-1} & x_{2k} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{n,k-1} & x_{nk} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma) x_{1i_1}x_{2i_2}\cdots x_{ni_n}$$ （$i_1=k$ 以外で $x_{1i_1}=0$ 、$i_1=k$ のとき $x_{1k}=1$）

$$= \sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma) x_{2i_2}\cdots x_{ni_n}$$ であるが、直接求めてみると

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \cdots & x_{2,k-1} & x_{2k} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{n,k-1} & x_{nk} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

↓互換（k , $k-1$ ）

$$= (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} & x_{2,k-1} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} & x_{n,k-1} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

↓互換の積

$(k-1,k-2)\cdots(2,1)$

$$= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2k} & x_{21} & \cdots & x_{2,k-1} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{nk} & x_{n2} & \cdots & x_{n,k-1} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2,k-1} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2n} & \cdots & x_{n,k-1} & x_{n,k+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$\sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}} \varepsilon(\sigma) x_{2i_2}\cdots x_{ni_n}$ は $\tau=\begin{pmatrix}2 & \cdots & n\\ i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} \in S_{n-1}$ に対し、$\sigma=(1\ ,\ k)\tau$ を表していることになる。そのことが傍系分解につながっている。

（P. 61　例2）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_n^2-x_1^2 \\ & & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$ （第1列を引く）

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 & \cdots & x_n^2-x_1^2 \\ & & \cdots & \\ x_2^{n-1}-x_1^{n-1} & x_3^{n-1}-x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$ （第1行について展開）

$x_m^k - x_1^k - x_1(x_m^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_m^k - x_1 x_m^{k-1}$ なので

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n \\ & & \cdots & \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

（各行からその1つ上の行の x_1 倍を引く）

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ & & \cdots & \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

（2行目以降を因数分解する）

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)}_{\uparrow\ x_1\text{を前にする}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & \cdots & \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & \cdots & \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \times (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j) \quad \leftarrow \text{帰納法の仮定}$$

$$= (-1)^{n-1} \times (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \times \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \times \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

$$= (-1)^{\frac{2n-2}{2} + \frac{n^2-3n+2}{2}} \times \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \times \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \times \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\begin{aligned} = &(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_n) && \leftarrow \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \\ &\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_n) \\ &\times (x_3 - x_4)(x_3 - x_5) \cdots (x_3 - x_n) \\ &\cdots \\ &\times (x_{n-3} - x_{n-2})(x_{n-3} - x_{n-2})(x_{n-3} - x_n) && \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j) \\ &\times (x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n) \\ &\times (x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

（P. 62　例3）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1+i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & \cdots & y_n \end{vmatrix} x_i + (-1)^{2n+2} z|A| \quad \leftarrow \ n+1 \text{ 列で展開}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & \cdots & y_n \end{vmatrix} \quad \leftarrow \ \boldsymbol{y} \text{ の行で展開すると}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\uparrow \atop \frac{\Delta_{ij}}{(-1)^{i+j}}} y_j$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z|A| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1+i} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \frac{\Delta_{ij}}{(-1)^{i+j}} y_j \right) x_i$$

$$= z|A| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1+i} (-1)^{n-i} \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} y_j \right) x_i$$

$$= z|A| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2n+1} \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}\, y_j \right) x_i$$

$$= z|A| - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}\, y_j \right) x_i$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}\, y_j \right) x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{i1}\, y_1 + \Delta_{i2}\, y_2 + \cdots + \Delta_{ik}\, y_k + \cdots + \Delta_{in}\, y_n \right) x_i$$

$$\begin{aligned}
= \ & \Delta_{11}\, y_1\, x_1 + \Delta_{12}\, y_2 x_1 + \cdots + \Delta_{1k}\, y_k x_1 + \cdots + \Delta_{1n}\, y_n x_1 \\
+ \ & \Delta_{21}\, y_1\, x_2 + \Delta_{22}\, y_2 x_2 + \cdots + \Delta_{2k}\, y_k x_2 + \cdots + \Delta_{2n}\, y_n x_2 \\
+ \ & \Delta_{31}\, y_1\, x_3 + \Delta_{32}\, y_2 x_3 + \cdots + \Delta_{3k}\, y_k x_3 + \cdots + \Delta_{3n}\, y_n x_3 \\
& \qquad \cdots \\
+ \ & \Delta_{n1}\, y_1\, x_n + \Delta_{n2}\, y_2 x_n + \cdots + \Delta_{nk}\, y_k x_n + \cdots + \Delta_{nn}\, y_n x_n
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij}\, x_i \right) y_j$$

よって

$$= z|A| - \sum_{i=1, j=1}^{n} \Delta_{ij}\, x_i y_j$$

(P. 62　定理5)

(22)　$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$　(第 j 列に関する展開)

(22')　$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$　(第 i 行に関する展開)

(24)　$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \Delta_{ik} = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} = \delta_{jj}\,|A|$　$(j = k)$

$(j \neq k)$ の場合

(24)　$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \Delta_{ik} = a_{1j}\Delta_{1k} + a_{2j}\Delta_{2k} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nk}$

$$A \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & k & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

としておいて、k 列に関して展開したものが

$a_{1j}\Delta_{1k} + a_{2j}\Delta_{2k} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nk}$ である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$ なので、$\delta_{jk} = 0$（$j \neq k$）としておけば

$|A| \neq 0$ であっても、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \Delta_{ik} = \delta_{jk}|A|$ とかける。

(24) から

$$X = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1i} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{2i} & \cdots & \Delta_{2n} \\ & & & \cdots & \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{ni} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$ とおけば $${}^{t}X = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{1i} & \Delta_{2i} & \cdots & \Delta_{ni} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$${}^{t}XA = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{1i} & \Delta_{2i} & \cdots & \Delta_{ni} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= (a_{1j}\Delta_{1i} + a_{2j}\Delta_{2i} + \cdots + a_{nj}\Delta_{ni})$

$= (\delta_{ij}|A|)$

$$= |A| \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ & & \cdots & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |A|E$$

(24') $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \Delta_{kj} = a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta_{kn} = \delta_{ik}|A|$ なので

$$A\,{}^{t}X = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{j1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{jn} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$= (a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn})$

$= (\delta_{ij}|A|)$

$= |A|E$

よって、${}^{t}XA = A\,{}^{t}X = |A|E \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \dfrac{{}^{t}X}{|A|} = \left(\dfrac{\Delta_{ji}}{|A|} \right)$

（P. 64　$Cramer$の公式）

$$A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ij}\right)$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ij}$$

したがって

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|}$$

仮に、$\boldsymbol{b}$ が 0 ならば、$\boldsymbol{x} = (x_j) = 0$ ということがわかる。つまり、$|A| \neq 0$ の条件は大きい。

（P. 67　$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$）

$$\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn}\\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn}\\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{11}b_{12} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{21}b_{12} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn}\\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n1}b_{12} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn}\\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn}\end{vmatrix}$$

$$
= b_{12}\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{11} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{21} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}
$$

$$
= b_{12}\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{11} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{21} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix} + b_{22}\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{12} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{22} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{13}b_{32}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{23}b_{32}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{n3}b_{32}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{j_2=1}^{n} b_{j_2 2}\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & a_{1j_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & a_{2j_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & a_{nj_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}
$$

各列に対しても同様に繰り返していくと
↓

$$
= \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n = 1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ & & \cdots & \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n} \qquad \leftarrow n^n \text{ 項ある式となる}
$$

$j_1, j_2, \cdots, j_n$ の中に等しいものがあれば、$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ & & \cdots & \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$ は 0 である。

よって、$j_1, j_2, \cdots, j_n$ が $1, 2, \cdots, n$ の順列にわたって動くものだけが残る。

また、(15) により

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$ とすれば

$$\begin{vmatrix} a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & \cdots & a_{1\sigma(n)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & \cdots & a_{2\sigma(n)} \\ & & \cdots & \\ a_{n\sigma(1)} & a_{n\sigma(2)} & \cdots & a_{n\sigma(n)} \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n}^{n} \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \right)$$

$= |A|\,|B|$

（P. 68　注意）

$|AB| = |A||B|$ の証明

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (x_{ij})$, $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ とおく

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{Ax}_1, \cdots, \boldsymbol{Ax}_n)$ と定義すれば、P. 56の（ⅰ）,（ⅱ）を満たすので

$|\boldsymbol{AB}| = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{Ax}_1, \cdots, \boldsymbol{Ax}_n)$

$= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \cdot \boldsymbol{det}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$

$= \boldsymbol{det}(\boldsymbol{Ae}_1, \cdots, \boldsymbol{Ae}_n) \cdot \boldsymbol{det}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$

$= |A||B|$

（P. 69　例1　基本行列 具体的に！）線型代数学　笠原晧司 著　参照

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

(12)

$$\boldsymbol{P}(3:\boldsymbol{c}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & 3 & & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{det}\ \boldsymbol{P}(3:\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}$$

(16)

$$\boldsymbol{Q}(3:6) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & 3 & & & 6 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{det}\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{i}:\boldsymbol{j}) = -1 \times \boldsymbol{det}\ \boldsymbol{E} = -1$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}(3:6) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{00}} & \phantom{a_{00}} & 6 & \phantom{a_{00}} & \phantom{a_{00}} & 3 & \phantom{a_{00}} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} & a_{24} & a_{25} & a_{23} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{36} & a_{34} & a_{35} & a_{33} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{46} & a_{44} & a_{45} & a_{43} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{56} & a_{54} & a_{55} & a_{53} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} & a_{64} & a_{65} & a_{63} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{76} & a_{74} & a_{75} & a_{73} & a_{77} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{Q}(3:6)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} & a_{24} & a_{25} & a_{23} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{36} & a_{34} & a_{35} & a_{33} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{46} & a_{44} & a_{45} & a_{43} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{56} & a_{54} & a_{55} & a_{53} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} & a_{64} & a_{65} & a_{63} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{76} & a_{74} & a_{75} & a_{73} & a_{77} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} & a_{24} & a_{25} & a_{23} & a_{27} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} & a_{64} & a_{65} & a_{63} & a_{67} \\ a_{41} & a_{42} & a_{46} & a_{44} & a_{45} & a_{43} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{56} & a_{54} & a_{55} & a_{53} & a_{57} \\ a_{31} & a_{32} & a_{36} & a_{34} & a_{35} & a_{33} & a_{37} \\ a_{71} & a_{72} & a_{76} & a_{74} & a_{75} & a_{73} & a_{77} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ 6 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

(18)

$$\boldsymbol{R}(2,5:\boldsymbol{c})=\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccccc} & & & & 5 & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&\boldsymbol{c}&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ 2\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\boldsymbol{det\ R}(2,5:\boldsymbol{c})=1\ \leftarrow\ \boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{c}\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\times 1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AR}(2,5:\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{16}&a_{14}&a_{15}&a_{13}&a_{17}\\ a_{21}&a_{22}&a_{26}&a_{24}&a_{25}&a_{23}&a_{27}\\ a_{31}&a_{32}&a_{36}&a_{34}&a_{35}&a_{33}&a_{37}\\ a_{41}&a_{42}&a_{46}&a_{44}&a_{45}&a_{43}&a_{47}\\ a_{51}&a_{52}&a_{56}&a_{54}&a_{55}&a_{53}&a_{57}\\ a_{61}&a_{62}&a_{66}&a_{64}&a_{65}&a_{63}&a_{67}\\ a_{71}&a_{72}&a_{76}&a_{74}&a_{75}&a_{73}&a_{77} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&\boldsymbol{c}&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{16}&a_{14}&a_{12}c+a_{15}&a_{13}&a_{17}\\ a_{21}&a_{22}&a_{26}&a_{24}&a_{22}c+a_{25}&a_{23}&a_{27}\\ a_{31}&a_{32}&a_{36}&a_{34}&a_{32}c+a_{35}&a_{33}&a_{37}\\ a_{41}&a_{42}&a_{46}&a_{44}&a_{42}c+a_{45}&a_{43}&a_{47}\\ a_{51}&a_{52}&a_{56}&a_{54}&a_{52}c+a_{55}&a_{53}&a_{57}\\ a_{61}&a_{62}&a_{66}&a_{64}&a_{62}c+a_{65}&a_{63}&a_{67}\\ a_{71}&a_{72}&a_{76}&a_{74}&a_{72}c+a_{75}&a_{73}&a_{77} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}(2,5:\boldsymbol{c})\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&\boldsymbol{c}&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{16}&a_{14}&a_{15}&a_{13}&a_{17}\\ a_{21}&a_{22}&a_{26}&a_{24}&a_{25}&a_{23}&a_{27}\\ a_{31}&a_{32}&a_{36}&a_{34}&a_{35}&a_{33}&a_{37}\\ a_{41}&a_{42}&a_{46}&a_{44}&a_{45}&a_{43}&a_{47}\\ a_{51}&a_{52}&a_{56}&a_{54}&a_{55}&a_{53}&a_{57}\\ a_{61}&a_{62}&a_{66}&a_{64}&a_{65}&a_{63}&a_{67}\\ a_{71}&a_{72}&a_{76}&a_{74}&a_{75}&a_{73}&a_{77} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{16}&a_{14}&a_{15}&a_{13}&a_{17}\\ a_{21}+a_{51}c&a_{22}+a_{52}c&a_{26}+a_{56}c&a_{24}+a_{54}c&a_{25}+a_{55}c&a_{23}+a_{53}c&a_{27}+a_{57}c\\ a_{31}&a_{32}&a_{36}&a_{34}&a_{35}&a_{33}&a_{37}\\ a_{41}&a_{42}&a_{46}&a_{44}&a_{45}&a_{43}&a_{47}\\ a_{51}&a_{52}&a_{56}&a_{54}&a_{55}&a_{53}&a_{57}\\ a_{61}&a_{62}&a_{66}&a_{64}&a_{65}&a_{63}&a_{67}\\ a_{71}&a_{72}&a_{76}&a_{74}&a_{75}&a_{73}&a_{77} \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ （A が n 次正方行列、A_{11} が正則である）

つまり、A_{11} は m 次正方行列とする。

A_{12} は（m , $n-m$）行列、A_{21} は（$n-m$, m）行列、A_{22} は（$n-m$, $n-m$）正方行列となる。よって、次の計算が可能

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{vmatrix}$$

$$|A|=1\times|A_{11}||A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|=|A_{11}||A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

ここで、A_{11} と A_{12} が交換可能ならば

$$A_{11}^{-1}A_{11}A_{12}=A_{11}^{-1}A_{12}A_{11}$$

$$A_{12}=A_{11}^{-1}A_{12}A_{11}$$

$$A_{12}A_{11}^{-1}=A_{11}^{-1}A_{12}$$

A_{11}^{-1} も A_{12} が交換可能である。

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & A_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & A_{11}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}A_{11}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}A_{11}-A_{21}A_{12}\end{pmatrix}$$

よって、　$|A||A_{11}|=|A_{11}||A_{22}A_{11}-A_{21}A_{12}|$

$$|A|=|A_{22}A_{11}-A_{21}A_{12}|$$

（P. 69　例2）

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn}\\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,r} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,1} & \cdots & \Delta_{n1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \Delta_{r+1,r} & \cdots & \Delta_{nr}\\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,r+1} & \cdots & \Delta_{n,r+1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1,n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & |A| & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,r} & 0 & \cdots & |A|
\end{pmatrix}
$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\Delta_{r+1,j} = \delta_{1,r+1}|A| = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r,j}\Delta_{r+1,j} = \delta_{r,r+1}|A| = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r+1,j}\Delta_{r+1,j} = \delta_{r+1,r+1}|A| = |A|$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\Delta_{r+1,j} = \delta_{n,r+1}|A| = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\Delta_{n,j} = \delta_{1,n}|A| = 0$$

Jacobi の公式

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\
a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1,1} & \Delta_{n1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \Delta_{n-1,n-2} & \Delta_{n,n-2} \\
0 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1,n-1} & \Delta_{n,n-1} \\
0 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1,n} & \Delta_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\
a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & |A| & 0 \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & 0 & |A|
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
\Delta_{n-1,n-1} & \Delta_{n,n-1} \\
\Delta_{n-1,n} & \Delta_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,r+1} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2}
\end{vmatrix}
|A|
$$

（P．70　定理9）

定理に入る前に具体的に

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\quad
\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{A}$ が(m, n)行列で $m > n$ の場合

$$
\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\
a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\
a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}
\end{pmatrix}
$$

ここで

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\quad
\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}
$$

とおけば

$$|AB| = |\begin{pmatrix} b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{21}\boldsymbol{a}_2 & b_{12}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 & b_{13}\boldsymbol{a}_1 + b_{23}\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}|$$

$$= b_{11}b_{12}b_{13}|\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \frac{b_{21}}{b_{11}}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \frac{b_{22}}{b_{12}}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \frac{b_{23}}{b_{13}}\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}|$$ ↓第1列を2行、3行から引く

$$= b_{11}b_{12}b_{13}|\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \frac{b_{21}}{b_{11}}\boldsymbol{a}_2 & (\frac{b_{22}}{b_{12}} - \frac{b_{21}}{b_{11}})\boldsymbol{a}_2 & (\frac{b_{23}}{b_{13}} - \frac{b_{21}}{b_{11}})\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}| = 0$$

$|\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}| = 0$　　同じ列を使っている（線型独立ではない！）

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$　　*A が(m , n)行列で　$m < n$ の場合*

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

$|AB| = |\begin{pmatrix} b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{21}\boldsymbol{a}_2 + b_{31}\boldsymbol{a}_3 & b_{12}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + b_{32}\boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}|$ は 0 とは限らない。そのためには、$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2| \neq 0$, $|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3| \neq 0$, $|\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \neq 0$ （線型独立）の必要がある。

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{23}b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{13}b_{32} \\ a_{22}b_{21} & a_{23}b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} \\ a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{12}b_{22} \\ a_{23}b_{31} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} \\ a_{23}b_{31} & a_{23}b_{32} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{12}\cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{11}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22}$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} + b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{31}b_{12}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{31}b_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{31}b_{32}\cancel{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{13} \\ a_{23} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

（ 3^2 項ある ）

$$= b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{11}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$+ b_{31}b_{12}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{31}b_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$ ← ${}_3P_2 = 6$ 項になる。

${}_3C_2 = 3$　{ 1 , 2 } , { 1 , 3 } , { 2 , 3 } ← 3組ある

$$= \underbrace{\left\{ b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \right\}}^{\{1,2\}\text{組}} + \overbrace{\left\{ b_{11}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{31}b_{12}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \right\}}^{\{1,3\}\text{組}}$$

$$+ \underbrace{\left\{ b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{31}b_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} \right\}}_{\{2,3\}\text{組}}$$

{ 1 , 2 } 組の置換を σ^1 とする

$$\sigma^1_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma^1_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ ← 全部で $2! = 2$ つある

$$b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$= b_{\sigma^1_{\alpha_1}(1)1}b_{\sigma^1_{\alpha_1}(2)2}\begin{vmatrix} a_{1\,\sigma^1_{\alpha_1}(1)} & a_{1\,\sigma^1_{\alpha_1}(2)} \\ a_{2\,\sigma^1_{\alpha_1}(1)} & a_{2\,\sigma^1_{\alpha_1}(2)} \end{vmatrix} + b_{\sigma^1_{\alpha_2}(1)1}b_{\sigma^1_{\alpha_2}(2)2}\begin{vmatrix} a_{1\,\sigma^1_{\alpha_2}(1)} & a_{1\,\sigma^1_{\alpha_2}(2)} \\ a_{2\,\sigma^1_{\alpha_2}(1)} & a_{2\,\sigma^1_{\alpha_2}(2)} \end{vmatrix}$$

$$= b_{\sigma^1_{\alpha_1}(1)1}b_{\sigma^1_{\alpha_1}(2)2}\,\varepsilon(\sigma^1_{\alpha_1})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{\sigma^1_{\alpha_2}(1)1}b_{\sigma^1_{\alpha_2}(2)2}\,\varepsilon(\sigma^1_{\alpha_2})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\left\{ b_{\sigma^1_{\alpha_1}(1)1}b_{\sigma^1_{\alpha_1}(2)2}\,\varepsilon(\sigma^1_{\alpha_1}) + b_{\sigma^1_{\alpha_2}(1)1}b_{\sigma^1_{\alpha_2}(2)2}\,\varepsilon(\sigma^1_{\alpha_2}) \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

{ 1 , 3 } 組は省略

{ 2 , 3 } 組の置換を σ^3

$$\sigma^3_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma^3_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$ ← 全部で $2! = 2$ つある

$$b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{31}b_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{\sigma^3_{\alpha_1}(2)1} b_{\sigma^3_{\alpha_1}(3)2} \begin{vmatrix} a_{1\,\sigma^3_{\alpha_1}(2)} & a_{1\,\sigma^3_{\alpha_1}(3)} \\ a_{2\,\sigma^3_{\alpha_1}(2)} & a_{2\,\sigma^3_{\alpha_1}(3)} \end{vmatrix} + b_{\sigma^3_{\alpha_2}(2)1} b_{\sigma^3_{\alpha_2}(3)2} \begin{vmatrix} a_{1\,\sigma^3_{\alpha_2}(2)} & a_{1\,\sigma^3_{\alpha_2}(3)} \\ a_{2\,\sigma^3_{\alpha_2}(2)} & a_{2\,\sigma^3_{\alpha_2}(3)} \end{vmatrix}$$

$$= b_{\sigma^3_{\alpha_1}(2)1} b_{\sigma^3_{\alpha_1}(3)2}\, \varepsilon(\sigma^3_{\alpha_1}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{\sigma^3_{\alpha_2}(2)1} b_{\sigma^3_{\alpha_2}(3)2}\, \varepsilon(\sigma^3_{\alpha_2}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \left\{ b_{\sigma^3_{\alpha_1}(2)1} b_{\sigma^3_{\alpha_1}(3)2}\, \varepsilon(\sigma^3_{\alpha_1}) + b_{\sigma^3_{\alpha_2}(2)1} b_{\sigma^3_{\alpha_2}(3)2}\, \varepsilon(\sigma^3_{\alpha_2}) \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{22} & b_{32} \end{vmatrix}$$

定理9の証明

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}, \quad C = AB$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jm} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jm} \\ & & \cdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jm} \end{vmatrix} \qquad \leftarrow (m, m)\text{行列}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jm} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jm} \\ & & \cdots & \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jm} \\ a_{2k_1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jm} \\ & & \cdots & \\ a_{mk_1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jm} \end{vmatrix}$$

同じことを繰り返すと
↓

$$= \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_m = 1}^{n} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_m m} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_m} \\ a_{2k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_m} \\ & & \cdots & \\ a_{mk_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_m} \end{vmatrix} \quad \leftarrow \ n^m \text{ 項ある}$$

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ がすべて相異なるものだけに関して加えればよい。$m > n$ ならば無理なので $|C| = 0$ 、$m = n$ ならば定理8となる。$m < n$ の場合は $k_1, k_2, \cdots, k_m$ は $1, 2, \cdots, n$ から m個取り出す1つの組み合わせを $\alpha^{\ell} = \{ \alpha^{\ell}_1, \alpha^{\ell}_2, \cdots, \alpha^{\ell}_m \}$ とする。それらは、${}_n\mathrm{C}_m$ 個あり、その集合を D とする。そして、各1つの組み合わせに関してのすべての置換の集合を G_{ℓ} 、その元を σ （m！個）とすれば

$$= \sum_{\alpha^{\ell} \in D} \sum_{\sigma \in G_{\ell}} b_{\sigma(\alpha^{\ell}_1)1} b_{\sigma(\alpha^{\ell}_2)2} \cdots b_{\sigma(\alpha^{\ell}_m)m} \begin{vmatrix} a_{1\sigma(\alpha^{\ell}_1)} & a_{1\sigma(\alpha^{\ell}_2)} & \cdots & a_{1\sigma(\alpha^{\ell}_m)} \\ a_{2\sigma(\alpha^{\ell}_1)} & a_{2\sigma(\alpha^{\ell}_2)} & \cdots & a_{2\sigma(\alpha^{\ell}_m)} \\ & & \cdots & \\ a_{m\sigma(\alpha^{\ell}_1)} & a_{m\sigma(\alpha^{\ell}_2)} & \cdots & a_{m\sigma(\alpha^{\ell}_m)} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\alpha^{\ell} \in D} \sum_{\sigma \in G_{\ell}} b_{\sigma(\alpha^{\ell}_1)1} b_{\sigma(\alpha^{\ell}_2)2} \cdots b_{\sigma(\alpha^{\ell}_m)m} \ \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{1\alpha^{\ell}_1} & a_{1\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{1\alpha^{\ell}_m} \\ a_{2\alpha^{\ell}_1} & a_{2\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{2\alpha^{\ell}_m} \\ & & \cdots & \\ a_{m\alpha^{\ell}_1} & a_{m\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{m\alpha^{\ell}_m} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\alpha^{\ell} \in D} \begin{vmatrix} a_{1\alpha^{\ell}_1} & a_{1\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{1\alpha^{\ell}_m} \\ a_{2\alpha^{\ell}_1} & a_{2\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{2\alpha^{\ell}_m} \\ & & \cdots & \\ a_{m\alpha^{\ell}_1} & a_{m\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{m\alpha^{\ell}_m} \end{vmatrix} \sum_{\sigma \in G_{\ell}} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(\alpha^{\ell}_1)1} b_{\sigma(\alpha^{\ell}_2)2} \cdots b_{\sigma(\alpha^{\ell}_m)m}$$

$$= \sum_{\alpha^{\ell} \in D} \begin{vmatrix} a_{1\alpha^{\ell}_1} & a_{1\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{1\alpha^{\ell}_m} \\ a_{2\alpha^{\ell}_1} & a_{2\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{2\alpha^{\ell}_m} \\ & & \cdots & \\ a_{m\alpha^{\ell}_1} & a_{m\alpha^{\ell}_2} & \cdots & a_{m\alpha^{\ell}_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{\alpha^{\ell}_1 1} & b_{\alpha^{\ell}_1 2} & \cdots & b_{\alpha^{\ell}_1 m} \\ b_{\alpha^{\ell}_2 1} & b_{\alpha^{\ell}_2 2} & \cdots & b_{\alpha^{\ell}_2 m} \\ & & \cdots & \\ b_{\alpha^{\ell}_m 1} & b_{\alpha^{\ell}_m 2} & \cdots & b_{\alpha^{\ell}_m m} \end{vmatrix}$$

（P．72　例3）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \cdots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$ {}^tAA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \cdots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} $$

${}^tA$ は（m , n ）行列
A は（n , m ）行列
定理9において、${}^tA$ がA で、A がB となる。

$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ とすれば ${}^tA=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$

$$ {}^tAA=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_m) \\ (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_m) \\ & & \cdots & \\ (\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_m) \end{pmatrix} $$

$n \geqq m$ ならば

$$ =\sum_{\alpha^\ell\in D}\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1^\ell} & a_{1\alpha_2^\ell} & \cdots & a_{1\alpha_m^\ell} \\ a_{2\alpha_1^\ell} & a_{2\alpha_2^\ell} & \cdots & a_{2\alpha_m^\ell} \\ & & \cdots & \\ a_{m\alpha_1^\ell} & a_{m\alpha_2^\ell} & \cdots & a_{m\alpha_m^\ell} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{\alpha_1^\ell 1} & a_{\alpha_1^\ell 2} & \cdots & a_{\alpha_1^\ell m} \\ a_{\alpha_2^\ell 1} & a_{\alpha_2^\ell 2} & \cdots & a_{\alpha_2^\ell m} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_m^\ell 1} & a_{\alpha_m^\ell 2} & \cdots & a_{\alpha_m^\ell m} \end{vmatrix} $$

ここで具体的に A を（5 , 4）行列とすれば、$4=m \leqq n=5$ であり

$$ {}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \leftarrow \alpha_1^\ell=2,\ \alpha_2^\ell=3,\ \alpha_3^\ell=5 $$

$|A|=|{}^tA|$ に注意すれば、少しややこしいが

$$ =\sum_{\alpha^\ell\in D}\begin{vmatrix} a_{\alpha_1^\ell 1} & a_{\alpha_1^\ell 2} & \cdots & a_{\alpha_1^\ell m} \\ a_{\alpha_2^\ell 1} & a_{\alpha_2^\ell 2} & \cdots & a_{\alpha_2^\ell m} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_m^\ell 1} & a_{\alpha_m^\ell 2} & \cdots & a_{\alpha_m^\ell m} \end{vmatrix}^2=\sum_{\alpha^\ell\in D}\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1^\ell} & a_{1\alpha_2^\ell} & \cdots & a_{1\alpha_m^\ell} \\ a_{2\alpha_1^\ell} & a_{2\alpha_2^\ell} & \cdots & a_{2\alpha_m^\ell} \\ & & \cdots & \\ a_{m\alpha_1^\ell} & a_{m\alpha_2^\ell} & \cdots & a_{m\alpha_m^\ell} \end{vmatrix}^2 $$

$m=2$ の場合 A は（n , 2）行列になる。

$$ {}^tA=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}) $$

$$ {}^tAA=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \end{vmatrix}=\sum_{\alpha^\ell\in D}\begin{vmatrix} a_{\alpha_1^\ell} & b_{\alpha_1^\ell} \\ a_{\alpha_2^\ell} & b_{\alpha_2^\ell} \end{vmatrix}^2 \geqq 0 $$ （成分が実数なら）

（*Cauchy-Lagrange* の等式）

（P．72　一般に～から）

$m \leqq n$ の場合は $k_1, k_2, \cdots, k_m$ は $1, 2, \cdots, n$ から m 個取り出す1つの組み合わせを $\alpha^{\ell} = \{\alpha^{\ell}_1, \alpha^{\ell}_2, \cdots, \alpha^{\ell}_m\}$ とする。それらは、${}_nC_m = N$ 個あり、その集合を D とする。D の元に適当に順序をつけ、$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^{\ell}, \cdots, \alpha^{{}_nC_m}$ とすることができる。

$$A = \underset{(m,n)\text{行列}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}, \quad B = \underset{(n,m)\text{行列}}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}}, \quad C = AB$$

定理9に戻り、m個のn次元行ベクトル $a_i = (a_{ij})\ (1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ に対し

$$\left(\begin{vmatrix} a_{1\alpha^1_1} & \cdots & a_{1\alpha^1_m} \\ & \cdots & \\ a_{m\alpha^1_1} & \cdots & a_{m\alpha^1_m} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{1\alpha^2_1} & \cdots & a_{1\alpha^2_m} \\ & \cdots & \\ a_{m\alpha^2_1} & \cdots & a_{m\alpha^2_m} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} a_{1\alpha^N_1} & \cdots & a_{1\alpha^N_m} \\ & \cdots & \\ a_{m\alpha^N_1} & \cdots & a_{m\alpha^N_m} \end{vmatrix} \right)$$

となる $N = {}_nC_m$ 次元ベクトルをつくる。

このベクトルを $|a_1, a_2, \cdots, a_m|$ と表すとする。

同様に、m個のn次元列ベクトル $b_j = (b_{ij})\ (1 \leqq j \leqq m)$ に対し、$|b_1, b_2, \cdots, b_m|$ となる $N = {}_nC_m$ 次元ベクトルをつくる。

$C = AB = ((a_i, b_j))$ なので

$det\ C = det((a_i, b_j)) = (|a_1, a_2, \cdots, a_m|, |b_1, b_2, \cdots, b_m|)$

つまり、N 次元ベクトルの内積にできるということである。

特に、A を $(3, 2)$ 行列として

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ から m-ベクトルを作ってみると、${}_3C_2 = 3$

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 3つの組み合わせがある。

$\alpha^1 = \{\alpha^1_1, \alpha^1_2\} = \{1, 2\}$

$\alpha^2 = \{\alpha^2_1, \alpha^2_2\} = \{1, 3\}$

$\alpha^3 = \{\alpha^3_1, \alpha^3_2\} = \{2, 3\}$

$$\left(\begin{vmatrix} a_{\alpha^1_1 1} & a_{\alpha^1_1 2} \\ a_{\alpha^1_2 1} & a_{\alpha^1_2 2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{\alpha^2_1 1} & a_{\alpha^2_1 2} \\ a_{\alpha^2_2 1} & a_{\alpha^2_2 2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{\alpha^3_1 1} & a_{\alpha^3_1 2} \\ a_{\alpha^3_2 1} & a_{\alpha^3_2 2} \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) = \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$（外積）は順番が逆のようだ、つまり

$\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ 第2成分も上下逆である。しかし、2乗するので

Cauchy-Lagrange の等式から

$$\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| = \sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}}$$

（P. 74 *Sylvester* の行列式）

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m = b_0\prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j)$$

このとき、$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ が共通根をもつための必要十分条件は $\prod_{ij}(\alpha_i - \beta_j) = 0$ である。なぜなら、共通根をもてば、どれか1つは $\alpha_i - \beta_j = 0$ になるはずである。

よって、$\prod_{ij}(\alpha_i - \beta_j) = 0$

逆に、$\prod_{ij}(\alpha_i - \beta_j) = 0$ ならば、$\alpha_i - \beta_j = 0$ となる組が存在する。そのとき

$f(\alpha_i) = f(\beta_j) = g(\alpha_i) = g(\beta_j) = 0$ つまり、共通根となる。

そこで、1つの共通根を α とするとき

$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ なので、任意の k に対し

$$a_0\alpha^{n+k} + a_1x^{n+k-1} + \cdots + a_n\alpha^k = \alpha^k(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

$$b_0\alpha^{n+k} + b_1\alpha^{n+k-1} + \cdots + b_m\alpha^k = 0$$

$x_0 = \alpha^{n+m-1}$, $x_1 = \alpha^{n+m-2}$, $\cdots$, $x_{n+m-2} = \alpha$, $x_{n+m-1} = \alpha^0 = 1$ とおけば

$$\begin{array}{l} \\ m\text{行} \\ \\ \\ \\ n\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_{n+m-2} \\ x_{n+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

この係数行列の行列式を$Sylvester$ の行列式 $R(f,g)$という。

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow m \text{ 行} \\ \\ \quad \cdots(33) \\ \\ \\ \leftarrow n \text{ 行} \\ \\ \end{array} \quad (n+m)\text{次正方行列}$$

もし、$R(f,g)\neq 0$ ならば　逆行列が存在するので、それを①の両辺に左からかければ、0 となってしまい、特に、$x_{n+m-1}=1$ なので矛盾が生じる。したがって

$R(f,g)=0$ でなければならない。

逆に $R(f,g)=0$ ならば

準備として基本対称式(例)について

$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$

$=a_0(x^3+(-1)^1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(-1)^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x+(-1)^3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$

よって、$\dfrac{a_1}{a_0}=(-1)^1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, $\dfrac{a_2}{a_0}=(-1)^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)$, $\dfrac{a_3}{a_0}=(-1)^3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$となって、$f(x)$ は a_0, α_1, α_2, α_3 の多項式として表すことができる。($\dfrac{a_i}{a_0}\times\dfrac{1}{(-1)^i}$ は、i 次の基本対称式であり、斉次多項式でもあることに注意したい。)

これを f,g に適用させると、$\dfrac{a_i}{a_0}$ $(1\leqq i\leqq n)$, $\dfrac{b_j}{b_0}$ $(1\leqq j\leqq m)$ は α_i, β_j の基本対称式の式にすることができる。つまり、$R(f,g)$ は a_0, b_0, α_i, β_j の式で表すことができる。

次に(33)から、任意の定数 c に対し

$R(cf,g)=c^mR(f,g)$　,　$R(f,cg)=c^nR(f,g)$

よって

$R(f,g)=a_0^mb_0^n\,R\left(\dfrac{1}{a_0}f,\dfrac{1}{b_0}g\right)$

すなわち、$a_0=1$, $b_0=1$ と置き換えて証明しても十分であることがわかる。

よって、$a_0=1$, $b_0=1$ とし、α_i $(1\leqq i\leqq n)$, β_j $(1\leqq j\leqq m)$ を x_i $(1\leqq i\leqq n)$, y_j $(1\leqq j\leqq$

m ）におきかえ、したがって、$(-1)^i a_i$, $(-1)^j b_j$ を x_i , y_j の基本対称式でおきかえ、$R(f, g)$ を x_i , y_j の多項式として考察する。

$R(f, g) = P(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$

とおくと、$R(f, g)$ の 任意の x_i , x_j を入れかえたらどうなるだろうか。また、y_i , y_j を入れかえても、行列の成分が基本対称式でできているので行列式の成分は変わらず同じ値となる。

しかし、x_1 のところを y_1 としてみると

$f(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-x_k) = (x-x_1)\prod_{k\neq 1}^{n}(x-x_k)$

x_1 を y_1 にした式を考えると

$\bar{f}(x) = (x-y_1)\prod_{k\neq 1}^{n}(x-x_k)$

$\bar{f}(y_1) = 0$

$g(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-y_j)$ も当然 $g(y_1) = 0$　共通根　y_1 をもつことになる。

つまり、$R(\bar{f}, g) = 0 = P(y_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$

P を x_1 の文字式と考えた場合 (x_1-y_1) で割り切れることになる。他の x_i , y_j についても同様なことがいえるので

$R(f, g) = P(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$ は $\prod_{i,j}(x_i - y_j)$ で割り切れることになる。

次に、$R(f, g)$ は行列式の定義から

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix} = |(x_{ij})| \text{ とすれば}$$

$= \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{(n+m)\sigma(n+m)}$　（x_{ij} は x_i とは関係ない。）

（例）$n=3$, $m=2$

$$\begin{vmatrix} \overset{x_{11}}{a_0} & \overset{x_{12}}{a_1} & \overset{x_{13}}{a_2} & \overset{x_{14}}{a_3} & \overset{x_{15}}{0} \\ \overset{x_{21}}{0} & \overset{x_{22}}{a_0} & \overset{x_{23}}{a_1} & \overset{x_{24}}{a_2} & \overset{x_{25}}{a_3} \\ \overset{x_{31}}{b_0} & \overset{x_{32}}{b_1} & \overset{x_{33}}{b_2} & \overset{x_{34}}{0} & \overset{x_{35}}{0} \\ \overset{x_{41}}{0} & \overset{x_{42}}{b_0} & \overset{x_{43}}{b_1} & \overset{x_{44}}{b_2} & \overset{x_{45}}{0} \\ \overset{x_{51}}{0} & \overset{x_{52}}{0} & \overset{x_{53}}{b_0} & \overset{x_{54}}{b_1} & \overset{x_{55}}{b_2} \end{vmatrix}$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

ε (σ) は考えないで

$$x_{1\,\sigma(1)}x_{2\,\sigma(2)}x_{3\,\sigma(3)}x_{4\,\sigma(4)}x_{5\,\sigma(5)}$$

$$= x_{11}x_{25}x_{32}x_{43}x_{54}$$ （添字の間の関係）

$$= a_0a_3b_1b_1b_1$$

$$=a_{1-1}a_{5-2}b_{2-1}b_{3-2}b_{4-3}$$

$2-1$　　$3-2$　　$m+1-m$

$$\begin{vmatrix} \overset{x_{11}}{a_0} & \overset{x_{12}}{a_1} & \cdots & \overset{x_{1,n+1}}{a_n} & & & \overset{x_{1,n+m}}{0} \\ \overset{x_{21}}{0} & \overset{x_{22}}{a_0} & \overset{x_{23}}{a_1} & \cdots & \overset{x_{2,n+2}}{a_n} & & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ \overset{x_{m,1}}{0} & & & \overset{x_{m,m}}{a_0} & \overset{x_{m,m+1}}{a_1} & \cdots & \overset{x_{m,n+m}}{a_n} \\ \overset{x_{m+1,1}}{b_0} & \overset{x_{m+1,2}}{b_1} & \cdots & & \overset{x_{m+1,m+1}}{b_m} & & \overset{x_{m+1,n+m}}{0} \\ \overset{x_{m+2,1}}{0} & \overset{x_{m+2,2}}{b_0} & \overset{x_{m+2,3}}{b_1} & \cdots & & \overset{x_{m+2,m+2}}{b_m} & \overset{x_{m+2,n+m}}{0} \\ & & & & & \cdots & \\ \overset{x_{m+n,1}}{0} & & & \overset{x_{m+n,m}}{b_0} & \overset{x_{m+n,m+1}}{b_1} & \cdots & \overset{x_{m+n,n+m}}{b_m} \end{vmatrix}$$

$m+1-1$　　$m-m$　　$m+1-m$　　$m+2-2$

$a_i=0$ ($i \leqq -1$, $i \geqq n+1$)

$b_j=0$ ($j \leqq -1$, $j \geqq m+1$)

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n+m\\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{(n+m)}\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\sigma)\,x_{1\,\sigma(1)}x_{2\,\sigma(2)}\cdots x_{(n+m)\,\sigma(n+m)} = \pm x_{1i_1}x_{2i_2}x_{3i_3}\cdots \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ここまで } a_i}}{x_{mi_m}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ここから } b_j}}{x_{(m+1)i_{(m+1)}}}\cdots x_{(n+m)i_{(n+m)}}$$

$= \pm a_{i_1-1}a_{i_2-2}\cdots a_{i_m-m}b_{i_{(m+1)}-1}b_{i_{(m+2)}-2}\cdots b_{i_{(n+m)}-n}$

したがって 0 にならない項の x_i , y_j の積になっている次数は、a_i の次数が i 次の基本対称式（ b_j は j 次の基本対称式 ）であることに注意すれば、

$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_m-m)+(i_{(m+1)}-1)+(i_{(m+2)}-2)+(i_{(n+m)}-n)$

$= \sum_{k=1}^{n+m} i_k - \sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{(n+m)(n+m+1)}{2} - \dfrac{m(m+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)}{2} = mn$ ← 一定

よって、$R(f,g)$ は x_i , y_j に関しての mn 次斉次多項式である。

（確認） 基本対称式の積は斉次多項式である。
$(x+y+z)(xy+xz+yz)xyz$
$= x^3y^2z+x^3yz^2+x^2y^3z+3x^2y^2z^2+x^2yz^3+xy^3z^2+xy^2z^3$

$\prod_{i,j}(x_i - y_j)$ は斉次多項式で ← 斉次多項式の積は斉次多項式

$\prod_{i,j}(x_i - y_j) = \prod_{i=1}^{n}(x_i-y_1)(x_i-y_2)\cdots(x_i-y_m)$

$(x_i-y_1)(x_i-y_2)\cdots(x_i-y_m)$ の最後の項は $(-1)^m y_1y_2\cdots y_m$

つまり、m 次、それらを n 回かけるので、$\prod_{i,j}(x_i - y_j)$ の最後の項は $((-1)^m y_1y_2\cdots y_m)^n$

次数は mn 次である。よって、$\prod_{i,j}(x_i - y_j)$ も x_i ,y_j に関しての mn 次斉次多項式である。

これで、$R(f,g) = c\prod_{i,j}(x_i - y_j)$ となることがわかった。

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & 1 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & b_1 & \cdots & & b_m & & 0 \\ & 1 & b_1 & \cdots & & b_m & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

を x_i , y_j の積の項からできている文字式と考えた場合、$a_0 = 1$ であることを考慮に入れると、y_j だけの積になっている項は、対角線の積 $(b_m)^n = ((-1)^m y_1y_2\cdots y_m)^n$ しかない。係数は $(-1)^{m+n}$である。$\prod_{i,j}(x_i - y_j)$ の y_j だけの積になっている項の係数も $(-1)^{m+n}$ なので、$c = 1$ になる。よって、$R(f,g) = \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$

a_0 , b_0 を元にもどすと $R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$ となる。

(35) $\quad R(f,g)=a_0^m\prod_{i=1} g(\alpha_i)=(-1)^{mn}b_0^n\prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)$

なぜなら、$g(x)=b_0\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$, $f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ なので

$a_0^m\prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)=a_0^m\prod_{i=1}^{n}(b_0\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_i))$

$=a_0^m\prod_{i=1}^{n} b_0(a_i-\beta_1)(a_i-\beta_2)\cdots(a_i-\beta_m)=a_0^m b_0^n\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)$

$f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(-1)\times(\alpha_i-x)\ \rightarrow\ f(\beta_j)=(-1)^n a_0\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j)$

$(-1)^{mn}b_0^n\prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)=(-1)^{mn}b_0^n\prod_{j=1}^{m}(-1)^n a_0\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j)$

$=(-1)^{mn}b_0^n\times(-1)^{mn}a_0^m\prod_{i=1,j=1}(\alpha_i-\beta_j)$

$=(-1)^{2mn}a_0^m b_0^n\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)$

$=a_0^m b_0^n\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)$

（P. 76　例）

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} & 0 \\ 0 & 0 & b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3行-1行\times\dfrac{b_0}{a_0} \\ 4行-2行\times\dfrac{b_0}{a_0} \end{array}$$

$$=a_0\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} & 0 \\ 0 & b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} \end{vmatrix}$$

$$=a_0\{a_0\begin{vmatrix} b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} & 0 \\ b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} \end{vmatrix}-a_1\begin{vmatrix} b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & 0 \\ 0 & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} \end{vmatrix}$$

$$+a_2\begin{vmatrix} b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} & b_2-a_2\dfrac{b_0}{a_0} \\ 0 & b_1-a_1\dfrac{b_0}{a_0} \end{vmatrix}\}$$

$$= a_0 \{ a_0(b_2 - a_2 \frac{b_0}{a_0})^2 - a_1(b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0})(b_2 - a_2 \frac{b_0}{a_0}) + a_2(b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0})^2 \}$$

$$= (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - a_0 \{ a_1(b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0})(b_2 - a_2 \frac{b_0}{a_0}) - a_2(b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0})^2 \}$$

$$= (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - a_0 \{ (b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0}) \{ a_1(b_2 - a_2 \frac{b_0}{a_0}) - a_2(b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0}) \} \}$$

$$= (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - a_0 \{ (b_1 - a_1 \frac{b_0}{a_0}) \{ a_1 b_2 - a_1 a_2 \frac{b_0}{a_0} - a_2 b_1 + a_1 a_2 \frac{b_0}{a_0} \} \}$$

$$= (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

重根の場合

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \quad \leftarrow \ n \text{ 次}$$
$$f'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \quad \leftarrow \ n-1 \text{ 次}$$

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0 n & a_1(n-1) & \cdots & & a_{n-1} & & 0 \\ & a_0 n & a_1(n-1) & \cdots & & a_{n-1} & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 n & a_1(n-1) & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow n-1 \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow n \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

$$R(f, f') = a_0^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i)$$
$$\frac{1}{a_0} R(f, f') = a_0^{n-2} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i)$$

$$\frac{1}{a_0} R(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ n & a_1(n-1) & \cdots & & a_{n-1} & & 0 \\ & a_0 n & a_1(n-1) & \cdots & & a_{n-1} & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & & a_0 n & a_1(n-1) & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$ なので

$$f'(x) = a_0 \sum_{k=1}^{n} (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\cdots(x-\alpha_n)$$

$$f'(\alpha_i) = a_0(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)$$

したがって

$$\frac{1}{a_0}R(f, f') = a_0^{n-2}\prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) = a_0^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_0(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)$$

$$= a_0^{n-2}a_0^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

$$= a_0^{2n-2}\prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

$$= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)$$

$$\times(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)$$

$$\times(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\cdots(\alpha_3-\alpha_n)$$

$$\times(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)\cdots(\alpha_4-\alpha_n)$$

$$\times(\alpha_5-\alpha_1)(\alpha_5-\alpha_2)(\alpha_5-\alpha_3)\cdots(\alpha_5-\alpha_n)$$

$$\cdots$$

$$\times(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

$$= (-1)^0(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)$$

$$\times(-1)^1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)$$

$$\times(-1)^2(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)\cdots(\alpha_3-\alpha_n)$$

$$\times(-1)^3(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)\cdots(\alpha_4-\alpha_n)$$

$$\times(-1)^4(\alpha_1-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_5)\cdots(\alpha_5-\alpha_n)$$

$$\cdots$$

$$\times(-1)^{n-1}(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_n)(\alpha_3-\alpha_n)\cdots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

差積
$\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left\{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\right\}^2$$

したがって

$$\frac{1}{a_0}R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2}\{\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)\}^2$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2}\{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}^2$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(f)$$

$$D(f) = \frac{1}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}\frac{1}{a_0}R(f, f')$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{a_0}R(f, f') \quad \leftarrow \frac{1}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ の中から2つ選び出す順列は ${}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1)$ 通り、差積は組み合わせ ${}_n\mathrm{C}_2$ であって、樹形図を書いてみるとわかる。$\{\alpha_i - \alpha_j\}$ は$(\alpha_i - \alpha_j)$と$(\alpha_j - \alpha_i)$の2つ分を表していることを考えれば、$(\alpha_i - \alpha_j)$ の $i < j$ をとれば、$-(\alpha_j - \alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_j)$ つまり ${}_n\mathrm{P}_2$ の中には、$(\alpha_i - \alpha_j)$と$(\alpha_j - \alpha_i)$のペアが、$\frac{n(n-1)}{2}$ 個あることになり、$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ をかけることも、差積の2乗になることもうなずける。

注意について

$D(f) = a_0^{2n-2}\{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}^2$

$\{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}^2$ は $\alpha_i\,(1 \leqq i \leqq n)$ の対称式なので、$\alpha_i\,(1 \leqq i \leqq n)$ の基本対称式の多項式で表すことができる。$\alpha_i\,(1 \leqq i \leqq n)$ の基本対称式とは $\frac{a_i}{a_0}\,(1 \leqq i \leqq n)$ だたので、$\frac{a_i}{a_0}\,(1 \leqq i \leqq n)$ の多項式で表すことができることになる。

また、$R(f, f')$ は a_0 で割り切れるので、$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{a_0}R(f, f')$ は $a_0, \cdots, a_n$ の多項式であることを示している。

（P．79　定理$\boldsymbol{A}$）

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \quad\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

$\boldsymbol{f}$ が微分可能なとき

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = J_f = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = g_1(y_1, y_2, \cdots, y_m) \\ z_2 = g_2(y_1, y_2, \cdots, y_m) \\ \quad\cdots \\ z_\ell = g_\ell(y_1, y_2, \cdots, y_m) \end{cases}$$

$\boldsymbol{g}$ が微分可能なとき

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}) = J_g = \frac{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_\ell)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial z_\ell}{\partial y_1} & \frac{\partial z_\ell}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_\ell}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}^0$ の近傍で関数 $\boldsymbol{f}$ が一次近似されるとは、$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$ とした場合

$\boldsymbol{dx} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ を原点とする新たな変数と考えると、次の式で一次近似できる

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1^0}{\partial x_1^0} & \frac{\partial y_1^0}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial y_1^0}{\partial x_n^0} \\ \frac{\partial y_2^0}{\partial x_1^0} & \frac{\partial y_2^0}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial y_2^0}{\partial x_n^0} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial y_m^0}{\partial x_1^0} & \frac{\partial y_m^0}{\partial x_2^0} & \cdots & \frac{\partial y_m^0}{\partial x_n^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = J_f \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

（J_f は（m, n）行列）

したがって、g に関しても、y^0 の近傍で一次近似できるとしたならば　$z^0=g(y^0)$ としたときと同様に

$$\begin{pmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1^0}{\partial y_1^0} & \dfrac{\partial z_1^0}{\partial y_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial z_1^0}{\partial y_m^0} \\ \dfrac{\partial z_2^0}{\partial y_1^0} & \dfrac{\partial z_2^0}{\partial y_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial z_2^0}{\partial y_m^0} \\ & & \cdots & \\ \dfrac{\partial z_\ell^0}{\partial y_1^0} & \dfrac{\partial z_\ell^0}{\partial y_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial z_\ell^0}{\partial y_m^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = J_g \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} \quad (J_g \text{ は}(\ell, m)\text{行列})$$

つまり、$z=g\circ f(x)$ は x_0 の近傍で次の様に一次近似されるということになる。

$$\begin{pmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1^0}{\partial y_1^0} & \dfrac{\partial z_1^0}{\partial y_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial z_1^0}{\partial y_m^0} \\ \dfrac{\partial z_2^0}{\partial y_1^0} & \dfrac{\partial z_2^0}{\partial y_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial z_2^0}{\partial y_m^0} \\ & & \cdots & \\ \dfrac{\partial z_\ell^0}{\partial y_1^0} & \dfrac{\partial z_\ell^0}{\partial y_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial z_\ell^0}{\partial y_m^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1^0}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial y_1^0}{\partial x_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial y_1^0}{\partial x_n^0} \\ \dfrac{\partial y_2^0}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial y_2^0}{\partial x_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial y_2^0}{\partial x_n^0} \\ & & \cdots & \\ \dfrac{\partial y_m^0}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial y_m^0}{\partial x_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial y_m^0}{\partial x_n^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

（P. 80　例2）

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4\cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + (-1)^5(-r\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta\,(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi) + r\sin\theta\,(r\sin^2\theta\cos^2\phi + r\sin^2\theta\sin^2\phi)$$

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta$$

$$= r^2\sin\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta$$

したがって、$\theta=0, \pi \to r^2\sin\theta = 0$　つまり、$(r>0)$ $z=r\cos\theta$ から z 軸上で 0 になる。

（P. 81　例）

n 個の複素変数によって与えられた写像を考える。

$$\eta = \phi(\xi) \to \begin{cases} \eta_1 = \phi_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \\ \eta_2 = \phi_2(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \\ \quad\cdots \\ \eta_n = \phi_n(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \end{cases}$$

$\xi_k = x_k + ix_{n+k}$,　$\eta_k = y_k + iy_{n+k}$　（$1 \leqq k \leqq n$）とおけば

$$
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \\ \cdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \\ y_{n+1} = f_{n+1}(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \\ \cdots \\ y_{2n} = f_{2n}(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}
$$

とおけば、$2n$次の実空間のからの写像に置き換えることができる。つまり

$$
\begin{tikzcd}
(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & (y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{2n}) \arrow[r] & (\eta_1, \cdots, \eta_n) \\
 & (\xi_1, \cdots, \xi_n) \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\frac{\partial(\eta_1, \cdots, \eta_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_{2n})} = \frac{\partial(\eta_1, \cdots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)} \cdot \frac{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_{2n})} = \boldsymbol{J}_\phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{\partial(\eta_1, \cdots, \eta_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_{2n})} \cdot \frac{\partial(y_1, \cdots, y_{2n})}{\partial(x_1, \cdots, x_{2n})} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{J}_f
$$

$$
\boldsymbol{J}_\phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{J}_f
$$

$\boldsymbol{J}_\phi$ は n 次複素正方行列、$\boldsymbol{J}_f$ は $2n$ 次実正方行列、$\boldsymbol{E}$ は n 次単位行列とすれば

$$
\begin{array}{l} \boldsymbol{J}_\phi \cdot (\boldsymbol{E}, i\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}, i\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{J}_f \\ \overline{\boldsymbol{J}_\phi} \cdot (\boldsymbol{E}, -i\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}, -i\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{J}_f \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_\phi & 0 \\ 0 & \overline{\boldsymbol{J}_\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & i\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & -i\boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & i\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & -i\boldsymbol{E} \end{pmatrix} \boldsymbol{J}_f
$$

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & i\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & -i\boldsymbol{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \\ 1 & & 0 & -i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \\ 0 & & 0 & -2i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & -2i \end{vmatrix}
$$

1行目を(−1)倍して
$n+1$行目にたす。
↓
以下繰り返す

上三角行列になるので、$\begin{vmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{vmatrix} = (-2i)^n$ となる。

$|J_\phi||\overline{J_\phi}| = |J_f|$

参照　解析入門Ｉ Ｐ. 163 定理1. 1（コーシー・リーマンの方程式）

$\eta = f(z)$

$z = x_1 + ix_2$, $\eta = y_1 + iy_2$

$$\begin{cases} y_1 = u(x_1, x_2) \\ y_2 = v(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial(x_1, x_2)} = f'(z)(1, i) = \frac{\partial \eta}{\partial(y_1, y_2)}\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (1, i)\begin{pmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} \\ v_{x_1} & v_{x_2} \end{pmatrix}$$

$$(f'(z), if'(z)) = (u_{x_1} + iv_{x_1}, u_{x_2} + iv_{x_2})$$

$$f'(z) = u_{x_1} + iv_{x_1} = \frac{1}{i}(u_{x_2} + iv_{x_2}) = v_{x_2} - iu_{x_2}$$

よって、$u_{x_1} = v_{x_2}$, $u_{x_2} = -v_{x_1}$ （コーシー・リーマンの方程式）

（Ｐ. 79　研究課題　Ｉ）

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ & & & \cdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1}(x_0 + \zeta^i x_1 + \zeta^{2i} x_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_{n-1}) \quad \cdots \quad ①$$

$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ 　（$n = 1, 2, \cdots, n-1$）　1の n 乗根

$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ & & & \cdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix}$ の各 j 列に $\zeta^{i(j-1)}$ を掛けて加えれば

$$\begin{pmatrix} x_0 + \zeta^i x_1 + \zeta^{2i} x_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_{n-1} \\ x_{n-1} + \zeta^i x_0 + \zeta^{2i} x_1 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_{n-2} \\ \cdots \\ x_1 + \zeta^i x_2 + \zeta^{2i} x_3 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + \zeta^i x_1 + \zeta^{2i} x_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_{n-1} \\ \zeta^i(x_0 + \zeta^i x_1 + \zeta^{2i} x_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_{n-1}) \\ \cdots \\ \zeta^{(n-1)i}(x_0 + \zeta^i x_1 + \zeta^{2i} x_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)i} x_{n-1}) \end{pmatrix} \quad \leftarrow \zeta^{(n-1)i} x_{n-1} \times \zeta^i = \zeta^{ni} x_{n-1} = x_{n-1} \quad (\zeta^n = 1)$$

$$= (x_0 + \zeta^{i}x_1 + \zeta^{2i}x_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)i}x_{n-1})\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{i} \\ \vdots \\ \zeta^{(n-1)i} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{(スカラー)}}{\uparrow}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ & & & \cdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^{2\times(2-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)\times(2-1)} \\ 1 & \zeta^{2} & \zeta^{2\times(3-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)\times(3-1)} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i & \sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{i}x_i & \sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{2i}x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{(n-1)i}x_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i & \zeta\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{i}x_i & \zeta^{2}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{2i}x_i & \cdots & \zeta^{(n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{(n-1)i}x_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i & \zeta^{2}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{i}x_i & \zeta^{4}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{2i}x_i & \cdots & \zeta^{2(n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{(n-1)i}x_i \\ & & & \cdots & \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i & \zeta^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{i}x_i & \zeta^{2(n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{2i}x_i & \cdots & \zeta^{(n-1)^2}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{(n-1)i}x_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^{2} & \cdots & \zeta^{(n-1)} \\ 1 & \zeta^{2} & \zeta^{4} & \cdots & \zeta^{2(n-1)} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} x_i & & & 0 \\ & \sum_{i=1}^{n-1}\zeta^{i}x_i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{i=1}^{n-1}\zeta^{i(n-1)}x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^{2} & \cdots & \zeta^{(n-1)} \\ 1 & \zeta^{2} & \zeta^{4} & \cdots & \zeta^{2(n-1)} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

$x_1 = \zeta^{0}, x_2 = \zeta^{1}, \cdots, x_n = \zeta^{n-1}$ と置き換えると $Vandermonde$ の行列式 となる。

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(\zeta^{i-1} - \zeta^{j-1})$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{0\leqq i<j\leqq n-1}(\zeta^{i} - \zeta^{j}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\prod_{0\leqq i<j\leqq n-1}(\overset{大}{\zeta^{j}} - \overset{小}{\zeta^{i}})$$

$$= \prod_{0\leqq i<j\leqq n-1}(\zeta^{j} - \zeta^{i}) \neq 0$$

したがって、両辺の行列式をとって、$\prod_{0\leqq i<j\leqq n-1}(\zeta^{j} - \zeta^{i})$ で両辺を割れば①の等式を得る。

（P. 79　研究課題　I 注意）

まずは具体的に

$$\boldsymbol{G}=\{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3\},\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=1,\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_3^{-1},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_2^{-1}$$

$$(\boldsymbol{x}_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\sigma_1\sigma_1^{-1}}&\boldsymbol{x}_{\sigma_1\sigma_2^{-1}}&\boldsymbol{x}_{\sigma_1\sigma_3^{-1}}\\\boldsymbol{x}_{\sigma_2\sigma_1^{-1}}&\boldsymbol{x}_{\sigma_2\sigma_2^{-1}}&\boldsymbol{x}_{\sigma_2\sigma_3^{-1}}\\\boldsymbol{x}_{\sigma_3\sigma_1^{-1}}&\boldsymbol{x}_{\sigma_3\sigma_2^{-1}}&\boldsymbol{x}_{\sigma_3\sigma_3^{-1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\sigma_1}&\boldsymbol{x}_{\sigma_3}&\boldsymbol{x}_{\sigma_2}\\\boldsymbol{x}_{\sigma_2}&\boldsymbol{x}_{\sigma_1}&\boldsymbol{x}_{\sigma_3}\\\boldsymbol{x}_{\sigma_3}&\boldsymbol{x}_{\sigma_2}&\boldsymbol{x}_{\sigma_1}\end{pmatrix}$$

次に $\boldsymbol{G}$ の元 σ_k に対し、$\boldsymbol{A}_{\sigma_k}=(\delta_{\sigma_i,\ \sigma_k\sigma_j})$ ← $\sigma_i=\sigma_k\sigma_j$ のとき 1

$\sigma_i\neq\sigma_k\sigma_j$　　0

（例）

第2行の1番目が1

$$\boldsymbol{A}_{\sigma_2}=\begin{pmatrix}\delta_{\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_1}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_2}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_3}\\\delta_{\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_2}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3}\\\delta_{\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_1}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_2}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\leftarrow\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

第1行の3番目が1

結果から
$(\boldsymbol{i},\ \sigma_2(\boldsymbol{i}))$ が 1

$$\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{x}_{\sigma_k}\boldsymbol{A}_{\sigma_k}=\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{x}_{\sigma_k}\begin{pmatrix}\delta_{\sigma_1,\ \sigma_k\sigma_1}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_k\sigma_2}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_k\sigma_3}\\\delta_{\sigma_2,\ \sigma_k\sigma_1}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_k\sigma_2}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_k\sigma_3}\\\delta_{\sigma_3,\ \sigma_k\sigma_1}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_k\sigma_2}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_k\sigma_3}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{x}_{\sigma_1}\begin{pmatrix}\delta_{\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_1}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_3}\\\delta_{\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_1}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_3}\\\delta_{\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_1}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_3}\end{pmatrix}$$

	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2

$$+\boldsymbol{x}_{\sigma_2}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\boldsymbol{x}_{\sigma_3}\begin{pmatrix}\delta_{\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_2}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_3}\\\delta_{\sigma_2,\ \sigma_3\sigma_1}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_3\sigma_2}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_3\sigma_3}\\\delta_{\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_1}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_2}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_3}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{x}_{\sigma_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\boldsymbol{x}_{\sigma_2}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\boldsymbol{x}_{\sigma_3}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\sigma_1}&\boldsymbol{x}_{\sigma_3}&\boldsymbol{x}_{\sigma_2}\\\boldsymbol{x}_{\sigma_2}&\boldsymbol{x}_{\sigma_1}&\boldsymbol{x}_{\sigma_3}\\\boldsymbol{x}_{\sigma_3}&\boldsymbol{x}_{\sigma_2}&\boldsymbol{x}_{\sigma_1}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})\qquad\leftarrow\ \text{確かに成り立つ}$$

なぜなら

$$\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{x}_{\sigma_k}\boldsymbol{A}_{\sigma_k}=\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{x}_{\sigma_k}\begin{pmatrix}\delta_{\sigma_1,\ \sigma_k\sigma_1}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_k\sigma_2}&\delta_{\sigma_1,\ \sigma_k\sigma_3}\\\delta_{\sigma_2,\ \sigma_k\sigma_1}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_k\sigma_2}&\delta_{\sigma_2,\ \sigma_k\sigma_3}\\\delta_{\sigma_3,\ \sigma_k\sigma_1}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_k\sigma_2}&\delta_{\sigma_3,\ \sigma_k\sigma_3}\end{pmatrix}$$

$$(x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})=\begin{pmatrix} x_{\sigma_1\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_1\sigma_2^{-1}} & x_{\sigma_1\sigma_3^{-1}} \\ x_{\sigma_2\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_2\sigma_2^{-1}} & x_{\sigma_2\sigma_3^{-1}} \\ x_{\sigma_3\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_3\sigma_2^{-1}} & x_{\sigma_3\sigma_3^{-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{\sigma_1} & x_{\sigma_3} & x_{\sigma_2} \\ x_{\sigma_2} & x_{\sigma_1} & x_{\sigma_3} \\ x_{\sigma_3} & x_{\sigma_2} & x_{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

		σ_2^{-1}	σ_3^{-1}
	σ_1	σ_3	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1

下の行列で、$\{\sigma_i\sigma_j^{-1} \mid i=1,2,3\}=\{\sigma_i\sigma_j^{-1} \mid j=1,2,3\}=\boldsymbol{G}$ なので、k を一つ決めたとき、$x_{\sigma_k}=x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}}$ になっているところはどの行どの列にもただ1つある。つまり、行列の中の特定な (i,j) 成分3ヶ所が x_{σ_k} となる。

そのとき、$\sigma_k=\sigma_i\sigma_j^{-1}$ なので　$\sigma_i=\sigma_k\sigma_j$　つまり、上の行列で、$\delta_{\sigma_i,\sigma_k\sigma_j}=1$ になっているところに x_{σ_k} を掛けるので、$\sum_{k=1}^{3} x_{\sigma_k}\boldsymbol{A}_{\sigma_k}=(x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})$ となる。

なぜ群行列なのか、少しだけ調べてみると

$$\sigma_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2\sigma_3=\sigma_1 \quad \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\cong\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

群を行列に表現したことになる。その仕組みを考えるには

$\boldsymbol{A}_{\sigma_m}\boldsymbol{A}_{\sigma_n}$

$$=\begin{pmatrix} \delta_{\sigma_1,\sigma_m\sigma_1} & \delta_{\sigma_1,\sigma_m\sigma_2} & \delta_{\sigma_1,\sigma_m\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_2,\sigma_m\sigma_1} & \delta_{\sigma_2,\sigma_m\sigma_2} & \delta_{\sigma_2,\sigma_m\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_3,\sigma_m\sigma_1} & \delta_{\sigma_3,\sigma_m\sigma_2} & \delta_{\sigma_3,\sigma_m\sigma_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_{\sigma_1,\sigma_n\sigma_1} & \delta_{\sigma_1,\sigma_n\sigma_2} & \delta_{\sigma_1,\sigma_n\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_2,\sigma_n\sigma_1} & \delta_{\sigma_2,\sigma_n\sigma_2} & \delta_{\sigma_2,\sigma_n\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_3,\sigma_n\sigma_1} & \delta_{\sigma_3,\sigma_n\sigma_2} & \delta_{\sigma_3,\sigma_n\sigma_3} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{3}\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_k}\cdot\delta_{\sigma_k,\sigma_n\sigma_j}\right)$$

$$=\left(\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_1}\times\delta_{\sigma_1,\sigma_n\sigma_j}+\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_2}\times\delta_{\sigma_2,\sigma_n\sigma_j}+\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_3}\times\delta_{\sigma_3,\sigma_n\sigma_j}\right)$$

$\sigma_n\sigma_j=\sigma_\ell$　とすると、$\sigma_n\sigma_j$ は $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ のどれかに一致する。たとえば σ_2 ならば

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_1}\times\delta_{\sigma_1,\sigma_\ell}+\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_2}\times\delta_{\sigma_2,\sigma_\ell}+\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_3}\times\delta_{\sigma_3,\sigma_\ell} \\ &=0+\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_2}\times 1+0=\delta_{\sigma_i,\sigma_m\sigma_2} \end{aligned}}$$

$=(\delta_{\sigma_i,\,\sigma_m\sigma_n\sigma_j})$

$=A_{\sigma_m\sigma_n}$　ついでに、$A_{\sigma_m}A_{\sigma_m^{-1}}=A_1=E \rightarrow A_{\sigma_m}^{-1}=A_{\sigma_m^{-1}}$　もわかったことになる。

よって、$f:\sigma_m\rightarrow A_{\sigma_m}$ は全単射であることをチェックすれば、群同型写像になる。

まず、$m\neq n$ ならば　$\sigma_m\sigma_j \neq \sigma_n\sigma_j$　である。したがって、$A_{\sigma_m}\neq A_{\sigma_n}$　つまり単射

$$\begin{pmatrix} \delta_{\sigma_1,\,\sigma_m\sigma_1} & \delta_{\sigma_1,\,\sigma_m\sigma_2} & \delta_{\sigma_1,\,\sigma_m\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_2,\,\sigma_m\sigma_1} & \delta_{\sigma_2,\,\sigma_m\sigma_2} & \delta_{\sigma_2,\,\sigma_m\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_3,\,\sigma_m\sigma_1} & \delta_{\sigma_3,\,\sigma_m\sigma_2} & \delta_{\sigma_3,\,\sigma_m\sigma_3} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \delta_{\sigma_1,\,\sigma_n\sigma_1} & \delta_{\sigma_1,\,\sigma_n\sigma_2} & \delta_{\sigma_1,\,\sigma_n\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_2,\,\sigma_n\sigma_1} & \delta_{\sigma_2,\,\sigma_n\sigma_2} & \delta_{\sigma_2,\,\sigma_n\sigma_3} \\ \delta_{\sigma_3,\,\sigma_n\sigma_1} & \delta_{\sigma_3,\,\sigma_n\sigma_2} & \delta_{\sigma_3,\,\sigma_n\sigma_3} \end{pmatrix}$$

全射であることについては作り方から明らかである。

一般論に戻り

$G=\{\sigma_1=1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_n\}$ を n 位の有限群とする。n 個の変数 $x_{\sigma_1},\cdots,x_{\sigma_n}$

に関しての行列式 $det(x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})$ を作る。これを G の**群行列式**という。

$$det(x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})=\begin{vmatrix} x_{\sigma_1\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_1\sigma_2^{-1}} & \cdots & x_{\sigma_1\sigma_n^{-1}} \\ x_{\sigma_2\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_2\sigma_2^{-1}} & \cdots & x_{\sigma_2\sigma_n^{-1}} \\ & & \cdots & \\ x_{\sigma_n\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_n\sigma_2^{-1}} & \cdots & x_{\sigma_n\sigma_n^{-1}} \end{vmatrix}$$

次に、$\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma_k}A_{\sigma_k}=(x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}})$　についてであるが

$$\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma_k}A_{\sigma_k}=\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma_k}\begin{pmatrix} \delta_{\sigma_1,\,\sigma_k\sigma_1} & \delta_{\sigma_1,\,\sigma_k\sigma_2} & \cdots & \delta_{\sigma_1,\,\sigma_k\sigma_n} \\ \delta_{\sigma_2,\,\sigma_k\sigma_1} & \delta_{\sigma_2,\,\sigma_k\sigma_2} & \cdots & \delta_{\sigma_2,\,\sigma_k\sigma_n} \\ & & \cdots & \\ \delta_{\sigma_n,\,\sigma_k\sigma_1} & \delta_{\sigma_n,\,\sigma_k\sigma_2} & \cdots & \delta_{\sigma_n,\,\sigma_k\sigma_n} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_{\sigma_1\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_1\sigma_2^{-1}} & \cdots & x_{\sigma_1\sigma_n^{-1}} \\ x_{\sigma_2\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_2\sigma_2^{-1}} & \cdots & x_{\sigma_2\sigma_n^{-1}} \\ & & \cdots & \\ x_{\sigma_n\sigma_1^{-1}} & x_{\sigma_n\sigma_2^{-1}} & \cdots & x_{\sigma_n\sigma_n^{-1}} \end{pmatrix}$$

（証明）

下の行列で、$\{\sigma_i\sigma_j^{-1}|\ i=1,\cdots,n\}=\{\sigma_i\sigma_j^{-1}|\ j=1,\cdots,n\}=G$ なので、$x_{\sigma_k}=x_{\sigma_i\sigma_j^{-1}}$

になっているところはどの行どの列にもただ1つある。つまり、行列の中の特定な（i,j）成分

n ヶ所が x_{σ_k} となる。

そのとき、$\sigma_k=\sigma_i\sigma_j^{-1}$ なので　$\sigma_i=\sigma_k\sigma_j$　つまり、上の行列で、$\delta_{i,\,\sigma_k\sigma_j}=1$ になってい

るところに x_{σ_k} を掛けるので、$\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma_k} A_{\sigma_k} = (x_{\sigma_i \sigma_j^{-1}})$ となる。

これを n 位巡回群 $\{1, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$ に当てはめてみると

$$\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma_k} A_{\sigma_k} = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma_k} \begin{pmatrix} \delta_{1, \sigma^{k-1}1} & \delta_{1, \sigma^{k-1}\sigma_2} & \cdots & \delta_{1, \sigma^{k-1}\sigma^{n-1}} \\ \delta_{\sigma, \sigma^{k-1}1} & \delta_{\sigma, \sigma^{k-1}\sigma_2} & \cdots & \delta_{\sigma, \sigma^{k-1}\sigma^{n-1}} \\ & & \cdots & \\ \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma^{k-1}1} & \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma^{k-1}\sigma_2} & \cdots & \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma^{k-1}\sigma^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \delta_{1, 1\cdot 1} & \delta_{1, 1\cdot\sigma} & \cdots & \delta_{1, 1\cdot\sigma^{n-1}} \\ \delta_{\sigma, 1\cdot 1} & \delta_{\sigma, 1\cdot\sigma} & \cdots & \delta_{\sigma, 1\cdot\sigma^{n-1}} \\ & & \cdots & \\ \delta_{\sigma^{n-1}, 1\cdot 1} & \delta_{\sigma^{n-1}, 1\cdot\sigma} & \cdots & \delta_{\sigma^{n-1}, 1\cdot\sigma^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$+ x_{\sigma} \begin{pmatrix} \delta_{1, \sigma\cdot 1} & \delta_{1, \sigma\cdot\sigma} & \cdots & \delta_{1, \sigma\cdot\sigma^{n-1}} \\ \delta_{\sigma, \sigma\cdot 1} & \delta_{\sigma, \sigma\cdot\sigma} & \cdots & \delta_{\sigma, \sigma\cdot\sigma^{n-1}} \\ & & \cdots & \\ \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma\cdot 1} & \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma\cdot\sigma} & \cdots & \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma\cdot\sigma^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$+ x_{\sigma^{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{1, \sigma^{n-1}1} & \delta_{1, \sigma^{n-1}\sigma} & \cdots & \delta_{1, \sigma^{n-1}\sigma^{n-1}} \\ \delta_{\sigma, \sigma^{n-1}1} & \delta_{\sigma, \sigma^{n-1}\sigma} & \cdots & \delta_{\sigma, \sigma^{n-1}\sigma^{n-1}} \\ & & \cdots & \\ \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma^{n-1}1} & \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma^{n-1}\sigma} & \cdots & \delta_{\sigma^{n-1}, \sigma^{n-1}\sigma^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + x_{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{\sigma^{n-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{1\cdot 1} & x_{1\cdot\sigma^{n-1}} & \cdots & x_{1\cdot\sigma} \\ x_{\sigma\cdot 1} & x_{\sigma\cdot\sigma^{n-1}} & \cdots & x_{\sigma\cdot\sigma} \\ & & \cdots & \\ x_{\sigma^{n-1}\cdot 1} & x_{\sigma^{n-1}\cdot\sigma^{n-1}} & \cdots & x_{\sigma^{n-1}\cdot\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_{\sigma^{n-1}} & \cdots & x_{\sigma} \\ x_{\sigma} & x_1 & \cdots & x_{\sigma^2} \\ & & \cdots & \\ x_{\sigma^{n-1}} & x_{\sigma^{n-2}} & \cdots & x_1 \end{pmatrix}$$

（P. 84　2)）

（i）
$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & 1 \\ b & x_2 & a & \cdots & a & 1 \\ b & b & x_3 & \cdots & a & 1 \\ & & & \cdots & & \\ b & b & b & \cdots & x_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(注意)から

$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$ とおけば、$f(a)=\prod_{i=1}^{n}(a-x_i)$　また、$f(b)=\prod_{i=1}^{n}(b-x_i)$ となる。

$$-\sum_{i=1}^{n}\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{n}(x_v-b)\}=(-1)^n\frac{\prod_{i=1}^{n}(b-x_i)-\prod_{i=1}^{n}(a-x_i)}{b-a}$$

$$=(-1)^n\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

になることを帰納法で証明する。

（$n=2$ の場合）

左辺は

$$-\sum_{i=1}^{2}\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{2}(x_v-b)\}$$

$$=-\prod_{v=1}^{0}(x_v-a)\prod_{v=2}^{2}(x_v-b)-\prod_{v=1}^{1}(x_v-a)\prod_{v=3}^{2}(x_v-b)$$

$$=-(x_2-b)-(x_1-a)$$

$$=a+b-x_1-x_2$$

右辺は

$$(-1)^2\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}(\prod_{i=1}^{2}(b-x_i)-\prod_{i=1}^{2}(a-x_i))$$

$$=\frac{1}{b-a}(b^2-(x_1+x_2)b+x_1x_2-a^2+(x_1+x_2)a-x_1x_2)$$

$$=\frac{1}{b-a}(b^2-a^2-(x_1+x_2)(b-a))$$

$$=b+a-x_1-x_2$$

（$n=k$ で成り立つ仮定して、$n=k+1$ の場合を調べる）

$$-\sum_{i=1}^{k+1}\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{k+1}(x_v-b)\}$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{k+1}(x_v-b)\}-\prod_{v=1}^{k}(x_v-a)$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{k}(x_v-b)\cdot(x_{k+1}-b)\}-\prod_{v=1}^{k}(x_v-a)$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{k}(x_v-b)\}\cdot(x_{k+1}-b)-\prod_{v=1}^{k}(x_v-a)$$

帰納法の仮定から

$$=(-1)^{k}\frac{\prod_{i=1}^{k}(b-x_i)-\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)}{b-a}\cdot(x_{k+1}-b)-\prod_{v=1}^{k}(x_v-a)$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{\prod_{i=1}^{k}(b-x_i)-\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)}{b-a}\cdot(b-x_{k+1})-\prod_{v=1}^{k}(x_v-a)$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(b-x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(b-x_i)-(b-x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)}{b-a}-(-1)^{k}\prod_{v=1}^{k}(a-x_v)$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(b-x_i)-(b-x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)}{b-a}-\frac{(b-a)(-1)^{k}\prod_{v=1}^{k}(a-x_v)}{b-a}$$

$$=(-1)^{k+1}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(b-x_i)-(b-x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)}{b-a}+\frac{(b-a)\prod_{v=1}^{k}(a-x_v)}{b-a}\right\}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(b-x_i)-(b-x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)+(b-a)\prod_{v=1}^{k}(a-x_v)}{b-a}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(b-x_i)-(a-x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(a-x_i)}{b-a}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{\prod_{i=1}^{k+1}(b-x_i)-\prod_{i=1}^{k+1}(a-x_i)}{b-a}$$

よって、証明された。

$$\prod_{v=1}^{n}(x_v-a)+a\sum_{i=1}^{n}\left\{\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{n}(x_v-b)\right\}$$

$$=(-1)^{n}f(a)+a\times(-1)\times(-1)^{n}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=(-1)^{n}\frac{f(a)(b-a)-a(f(b)-f(a))}{b-a}$$

$$=(-1)^{n}\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$b=a$ より $b-a=h$ とおき、$h\to 0$ と考えれば $b=a+h$ なので

$$(-1)^{n}\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=(-1)^{n}\frac{(a+h)f(a)-af(a+h)}{h}$$

$$= (-1)^n \frac{hf(a)-a(f(a+h)-f(a))}{h}$$

$$= (-1)^n \{ f(a)-af'(a) \} \quad (h \to 0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & a & \cdots & a & a & 1 \\ b & x_2 & a & a & \cdots & a & a & 1 \\ b & b & x_3 & a & \cdots & a & a & 1 \\ b & b & b & x_4 & \cdots & a & a & 1 \\ & & & & \cdots & & & \\ b & b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a & 1 \\ b & b & b & b & \cdots & b & x_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

最後の列の a 倍を各列からひく

$$= \begin{vmatrix} x_1-a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ b-a & x_2-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ b-a & b-a & x_3-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ b-a & b-a & b-a & x_4-a & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \cdots & & & \\ b-a & b-a & b-a & b-a & \cdots & x_{n-1}-a & 0 & 1 \\ b-a & b-a & b-a & b-a & \cdots & b-a & x_n-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

i 列から $i+1$ 列を
順次ひく
（$1 \leqq i \leqq n-1$）
注意！

$$= \begin{vmatrix} x_1-a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ b-x_2 & x_2-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-x_3 & x_3-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-x_4 & x_4-a & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b-x_n & x_n-a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ b-x_2 & x_2-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-x_3 & x_3-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-x_4 & x_4-a & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b-x_n & x_n-a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

最後の $n+1$ 列と i 行の余因子は下三角行列になるので

$$(-1)^{i+n+1}\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{n}(b-x_v) = (-1)^{i+n+1}\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)(-1)^{n-i}\prod_{v=i+1}^{n}(x_v-b)$$

$$= -\prod_{v=1}^{i-1}(x_v - a)\prod_{v=i+1}^{n}(x_v - b)$$

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{v=1}^{i-1}(x_v - a)\prod_{v=i+1}^{n}(x_v - b)\right)$$

（ⅱ）

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ & & & \cdots & & \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a & 0 \\ & & & \cdots & & \\ b & b & b & \cdots & x_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

n 次正方行列　→　$n+1$ 次正方行列

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & x_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

最終行の a 倍を各行からひく

$$= \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a \\ b-a & x_2 - a & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a \\ b-a & b-a & x_3 - a & \cdots & 0 & 0 & -a \\ & & & \cdots & & & \\ b-a & b-a & b-a & \cdots & x_{n-1} - a & 0 & -a \\ b-a & b-a & b-a & \cdots & b-a & x_n - a & -a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

i 列から $i+1$ 列を順次ひく
（$1 \leqq i \leqq n-1$）
注意！

$$= \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a \\ b - x_2 & x_2 - a & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a \\ 0 & b - x_3 & x_3 - a & \cdots & 0 & 0 & -a \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b - x_n & x_n - a & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a \\ b - x_2 & x_2 - a & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a \\ 0 & b - x_3 & x_3 - a & \cdots & 0 & 0 & -a \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b - x_n & x_n - a & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$n+1$ 列 i 行($1 \leqq i \leqq n$)の余因子は

$$-a\times(-1)^{n+i+1}\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{n}(b-x_v)=a\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{n}(b-x_v)$$

$i=n$ のときの余因子は $\prod_{v=1}^{n}(x_v-a)$

$$\Delta=\prod_{v=1}^{n}(x_v-a)+a\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{v=1}^{i-1}(x_v-a)\prod_{v=i+1}^{n}(b-x_v)\right)$$

(P. 85　3)交代行列の行列式)

$X=(x_{ij})$ が ${}^tX=-X$ であるとき、交代行列という。すなわち、$x_{ii}=0$, $x_{ij}=-x_{ji}$ となる。

$$det\ X=\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} & \cdots & x_{3n} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 & \cdots & x_{4n} \\ & & & & \cdots & \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & -x_{4n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{cases}(P_n(\cdots,x_{ij},\cdots))^2 & (n:\text{偶数}) \\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}$$

$P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ を $Pfaffian$ という。(P_nの符号は適当に定める)

まず、n が奇数のとき、$|X|=|-X|=(-1)^n|X| \rightarrow |X|+|X|=0 \rightarrow |X|=0$

n が偶数のとき、$2p$ として、p について帰納法で証明する。$p=1$ のとき、$det\ X$

$=(x_{12})^2$ で成立する。$p-1$ のとき成立すると仮定する。

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} & \cdots & x_{3n} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 & \cdots & x_{4n} \\ & & & & \cdots & \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & -x_{4n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

第1列の $\left(-\frac{x_{2j}}{x_{12}}\right)$ 倍　　第2列の $\left(\frac{x_{1j}}{x_{12}}\right)$ 倍　　これらの和を j (3以上)列からひく

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2j} \\ -x_{13}\times\left(-\frac{x_{2j}}{x_{12}}\right) \\ -x_{14}\times\left(-\frac{x_{2j}}{x_{12}}\right) \\ \vdots \\ -x_{1n}\times\left(-\frac{x_{2j}}{x_{12}}\right) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{1j} \\ 0 \\ -x_{23}\times\left(\frac{x_{1j}}{x_{12}}\right) \\ -x_{24}\times\left(\frac{x_{1j}}{x_{12}}\right) \\ \vdots \\ -x_{2n}\times\left(\frac{x_{1j}}{x_{12}}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \frac{x_{13}x_{2j}-x_{23}x_{1j}}{x_{12}} \\ \frac{x_{14}x_{2j}-x_{24}x_{1j}}{x_{12}} \\ \vdots \\ \frac{x_{1n}x_{2j}-x_{2n}x_{1j}}{x_{12}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} & \cdots & x_{3n} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 & \cdots & x_{4n} \\ & & & & \cdots & \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & -x_{4n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34}-\dfrac{x_{13}x_{24}-x_{23}x_{14}}{x_{12}} & \cdots & x_{3n}-\dfrac{x_{13}x_{2n}-x_{23}x_{1n}}{x_{12}} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34}-\dfrac{x_{14}x_{23}-x_{24}x_{13}}{x_{12}} & 0 & \cdots & x_{4n}-\dfrac{x_{14}x_{2n}-x_{24}x_{1n}}{x_{12}} \\ & & & & \cdots & \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n}-\dfrac{x_{1n}x_{23}-x_{2n}x_{14}}{x_{12}} & -x_{4n}-\dfrac{x_{1n}x_{24}-x_{2n}x_{14}}{x_{12}} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x_{12}^2 \times \begin{vmatrix} 0 & x_{34}-\dfrac{x_{13}x_{24}-x_{23}x_{14}}{x_{12}} & \cdots & x_{3n}-\dfrac{x_{13}x_{2n}-x_{23}x_{1n}}{x_{12}} \\ -x_{34}-\dfrac{x_{14}x_{23}-x_{24}x_{13}}{x_{12}} & 0 & \cdots & x_{4n}-\dfrac{x_{14}x_{2n}-x_{24}x_{1n}}{x_{12}} \\ & & \cdots & \\ -x_{3n}-\dfrac{x_{1n}x_{23}-x_{2n}x_{14}}{x_{12}} & -x_{4n}-\dfrac{x_{1n}x_{24}-x_{2n}x_{14}}{x_{12}} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{23}x_{14} & \cdots & x_{12}x_{3n}-x_{13}x_{2n}+x_{23}x_{1n} \\ -x_{12}x_{34}-x_{14}x_{23}+x_{24}x_{13} & 0 & \cdots & x_{12}x_{4n}-x_{14}x_{2n}+x_{24}x_{1n} \\ & & \cdots & \\ -x_{12}x_{3n}-x_{1n}x_{23}+x_{2n}x_{14} & -x_{12}x_{4n}-x_{1n}x_{24}+x_{2n}x_{14} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\times \left(\frac{1}{x_{12}}\right)^{n-2}$$

ここで

$$X' = \begin{vmatrix} 0 & x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{23}x_{14} & \cdots & x_{12}x_{3n}-x_{13}x_{2n}+x_{23}x_{1n} \\ -x_{12}x_{34}-x_{14}x_{23}+x_{24}x_{13} & 0 & \cdots & x_{12}x_{4n}-x_{14}x_{2n}+x_{24}x_{1n} \\ & & \cdots & \\ -x_{12}x_{3n}-x_{1n}x_{23}+x_{2n}x_{14} & -x_{12}x_{4n}-x_{1n}x_{24}+x_{2n}x_{14} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$X' = (a_{ij}) = (x_{12}x_{ij} - x_{1i}x_{2j} + x_{2i}x_{1j})$ $(3 \leqq i, j \leqq n)$ とすれば

$a_{ji} = x_{12}x_{ji} - x_{1j}x_{2i} + x_{2j}x_{1i} = -x_{12}x_{ij} - x_{1j}x_{2i} + x_{2j}x_{1i} = -(x_{12}x_{ij} + x_{1j}x_{2i} - x_{2j}x_{1i})$

$= -a_{ij}$　また、$a_{ii} = x_{12}x_{ii} - x_{1i}x_{2i} + x_{2i}x_{1i} = 0$

$det\, X = x_{12}^{4-n} \times det\,(x_{12}x_{ij} - x_{1i}x_{2j} + x_{2i}x_{1j})$ ($3 \leqq i\,,\, j \leqq n$)

よって、X' は $2p-2=2(p-1)$ 次の交代行列なので、帰納法の仮定から、その行列式は完全平方式になるから、x_{12}^{n-4} で割り切れるという前提で、p で成立する。

実際に計算してみると

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} \\ -x_{12} & 0 \end{vmatrix} = x_{12}^2 \quad \to P_2 = x_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & 0 & 0 \\ -x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} - \dfrac{x_{13}x_{24} - x_{23}x_{14}}{x_{12}} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} - \dfrac{x_{14}x_{23} - x_{24}x_{13}}{x_{12}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & 0 & 0 \\ -x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \dfrac{x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{23}x_{14}}{x_{12}} \\ -x_{14} & -x_{24} & \dfrac{-x_{12}x_{34} - x_{14}x_{23} + x_{24}x_{13}}{x_{12}} & 0 \end{vmatrix}$$

$= (\, x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{23}x_{14}\,)^2 \;\to\; P_4 = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{23}x_{14}$

したがって、

$$P_n = x_{12}^{2-p}\, P_{n-2}(\,\cdots,\, x_{12}x_{i+2,j+2} - x_{1,i+2}x_{2,j+2} + x_{1,j+2}x_{2,i+2}\,,\, \cdots\,) \qquad \cdots \text{Ⓐ}$$

となるが、一般には次のように与えられる。

$$P_n(\,\cdots,\, x_{ij}\,,\,\cdots\,) = \sum_{\substack{i_1<i_2\,,\,\cdots\,,\,i_{n-1}<i_n \\ i_1<i_3<\cdots<i_{n-1}\,(\text{添字が奇数})}} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} (x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4} \cdots x_{i_{n-1} i_n}) \qquad \cdots \text{Ⓑ}$$

$$= \frac{1}{2^p p!} \sum_{(\,i_1,\cdots,i_n\,)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \right) (x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4} \cdots x_{i_{n-1} i_n}) \qquad \cdots \text{Ⓒ}$$

実際に第二の表現 Ⓒ で計算してみると

$p = 1$ ($n = 2$) の場合

$$P_2(\,\cdots,\, x_{ij}\,,\,\cdots\,) = \frac{1}{2^1 \times 1} \left\{ \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) x_{12} + \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) x_{21} \right\}$$

$= \frac{1}{2}(x_{12}+(-x_{21})) = \frac{1}{2}(x_{12}+x_{12}) = x_{12}$　　（ $x_{ij} = -x_{ji}$ に注意 ）

$p = 2$ ($n = 4$) の場合

$$P_4 = \frac{1}{2^2 2!}\sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4\end{pmatrix}\right) x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4}$$

S_4 （注 $\sigma^3 \neq \sigma\cdot\sigma\cdot\sigma$ で、3 は単なる添字である。）

$\sigma^1 = (1\ 2\ 3\ 4)$, $\varepsilon(\sigma^1) = +$
$\sigma^2 = (1\ 2\ 4\ 3)$, $\varepsilon(\sigma^2) = -$
$\sigma^3 = (1\ 3\ 2\ 4)$, $\varepsilon(\sigma^3) = -$
$\sigma^4 = (1\ 3\ 4\ 2)$, $\varepsilon(\sigma^4) = +$
$\sigma^5 = (1\ 4\ 2\ 3)$, $\varepsilon(\sigma^5) = +$
$\sigma^6 = (1\ 4\ 3\ 2)$, $\varepsilon(\sigma^6) = -$
$\sigma^7 = (2\ 1\ 3\ 4)$, $\varepsilon(\sigma^7) = -$
$\sigma^8 = (2\ 1\ 4\ 3)$, $\varepsilon(\sigma^8) = +$
$\sigma^9 = (2\ 3\ 1\ 4)$, $\varepsilon(\sigma^9) = +$
$\sigma^{10} = (2\ 3\ 4\ 1)$, $\varepsilon(\sigma^{10}) = -$
$\sigma^{11} = (2\ 4\ 1\ 3)$, $\varepsilon(\sigma^{11}) = -$
$\sigma^{12} = (2\ 4\ 3\ 1)$, $\varepsilon(\sigma^{12}) = +$
$\sigma^{13} = (3\ 1\ 2\ 4)$, $\varepsilon(\sigma^{13}) = +$
$\sigma^{14} = (3\ 1\ 4\ 2)$, $\varepsilon(\sigma^{14}) = -$
$\sigma^{15} = (3\ 2\ 1\ 4)$, $\varepsilon(\sigma^{15}) = -$
$\sigma^{16} = (3\ 2\ 4\ 1)$, $\varepsilon(\sigma^{16}) = +$
$\sigma^{17} = (3\ 4\ 1\ 2)$, $\varepsilon(\sigma^{17}) = +$
$\sigma^{18} = (3\ 4\ 2\ 1)$, $\varepsilon(\sigma^{18}) = -$
$\sigma^{19} = (4\ 1\ 2\ 3)$, $\varepsilon(\sigma^{19}) = -$
$\sigma^{20} = (4\ 1\ 3\ 2)$, $\varepsilon(\sigma^{20}) = +$
$\sigma^{21} = (4\ 2\ 1\ 3)$, $\varepsilon(\sigma^{21}) = +$
$\sigma^{22} = (4\ 2\ 3\ 1)$, $\varepsilon(\sigma^{22}) = -$
$\sigma^{23} = (4\ 3\ 1\ 2)$, $\varepsilon(\sigma^{23}) = -$
$\sigma^{24} = (4\ 3\ 2\ 1)$, $\varepsilon(\sigma^{24}) = +$

$$P_4 = \frac{1}{2^2 2!}\sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4\end{pmatrix}\right) x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4}$$

$= \frac{1}{8}\{ +x_{12}x_{34}-x_{12}x_{43}-x_{13}x_{24}+x_{13}x_{42}+x_{14}x_{23}-x_{14}x_{32}-x_{21}x_{34}+x_{21}x_{43}+x_{23}x_{14}$
$-x_{23}x_{41}-x_{24}x_{13}+x_{24}x_{31}+x_{31}x_{24}-x_{31}x_{42}-x_{32}x_{14}+x_{32}x_{41}+x_{34}x_{12}-x_{34}x_{21}-x_{41}x_{23}$
$+x_{41}x_{32}+x_{42}x_{13}-x_{42}x_{31}-x_{43}x_{12}+x_{43}x_{21}\}$

$= \frac{1}{8}\{ +x_{12}x_{34}+x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}+x_{14}x_{23}+x_{12}x_{34}+x_{12}x_{34}+x_{23}x_{14}$
$+x_{23}x_{14}-x_{24}x_{13}-x_{24}x_{13}-x_{13}x_{24}-x_{13}x_{24}+x_{23}x_{14}+x_{23}x_{14}+x_{34}x_{12}+x_{34}x_{12}+x_{14}x_{23}$
$+x_{14}x_{23}-x_{24}x_{13}-x_{24}x_{13}+x_{34}x_{12}+x_{34}x_{12}\}$

$= \frac{1}{8}\{ +2x_{12}x_{34}-2x_{13}x_{24}+2x_{14}x_{23}+2x_{12}x_{34}+2x_{23}x_{14}-2x_{24}x_{13}-2x_{13}x_{24}+2x_{23}x_{14}+2$
$x_{34}x_{12}+2x_{14}x_{23}-2x_{24}x_{13}+2x_{34}x_{12}\}$

$= \frac{1}{8}\{ +8x_{12}x_{34}-8x_{13}x_{24}+8x_{14}x_{23}\}$

$= x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}$

© において、$p-1$ のとき成り立つと仮定し、数学的帰納法で証明する。

$$P_n(\cdots, x_{ij}, \cdots) = \frac{1}{2^p p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{i_1 i_2}x_{i_3 i_4}\cdots x_{i_{n-1} i_n}) \quad \cdots \quad ©$$

$a_{ij}=x_{12}x_{i,j}-x_{1,i}x_{2,j}+x_{1,j}x_{2,i}$ ($3\leqq i,j\leqq n$) とおけば、(a_{ij}) は交代行列なので

$a_{i_1+2,i_2+2}=x_{12}x_{i_1+2,i_2+2}-x_{1,i_1+2}x_{2,i_2+2}+x_{1,i_2+2}x_{2,i_1+2}$ のように2つずらして

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-2\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-2}\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ に置き換えると、どちらも $n-2$ 文字の置換群であり同型であるので

$$P_{n-2}=\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}\sum_{(i_1,\cdots,i_{n-2})}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-2\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-2}\end{pmatrix}\right)(a_{i_1+2,i_2+2}\cdots a_{i_{n-2}+2i_{n-1}+2})$$

$$=\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)\{(x_{12}x_{i_3,i_4}-x_{1,i_3}x_{2,i_4}+x_{1,i_4}x_{2,i_3})\times(x_{12}x_{i_5,i_6}-x_{1,i_5}x_{2,i_6}+x_{1,i_6}x_{2,i_7})\times(x_{12}x_{i_7,i_8}-x_{1,i_7}x_{2,i_8}+x_{1,i_8}x_{2,i_7})\times\cdots\times(x_{12}x_{i_{n-1},i_n}-x_{1,i_{n-1}}x_{2,i_n}+x_{1,i_n}x_{2,i_{n-1}})\}$$

よって、Ⓐ に代入して

$$P_n=\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}x_{12}^{2-p}\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)\{(x_{12}x_{i_3,i_4}-x_{1,i_3}x_{2,i_4}+x_{1,i_4}x_{2,i_3})\times(x_{12}x_{i_5,i_6}-x_{1,i_5}x_{2,i_6}+x_{1,i_6}x_{2,i_7})\times(\underset{\substack{\uparrow\\ ①}}{x_{12}x_{i_7,i_8}}-\underset{\substack{\uparrow\\ ②}}{x_{1,i_7}x_{2,i_8}}+\underset{\substack{\uparrow\\ ③}}{x_{1,i_8}x_{2,i_7}})\times\cdots\times(x_{12}x_{i_{n-1},i_n}-x_{1,i_{n-1}}x_{2,i_n}+x_{1,i_n}x_{2,i_{n-1}})\}$$

①、②、③のタイプの3つの項からなる括弧が ($2p-2$)÷2 = $p-1$ 個乗ぜられている。括弧をはずして展開すると、同類項はなく、3^{p-1} 項ある。それら一つ一つの項は次の様に分類される。タイプ①の個数を基準に分類すると積の順は関係ないので

$$\overbrace{①\ \cdots\ ①}^{p-1\text{ 個}}$$

1 , ① … ① ← ①のタイプが $p-1$ 個で他はない。
2 , ① … ①② ← ①のタイプが $p-2$ 個で他のタイプが 1 個
3 , ① … ①③ ← (〃)
4 , ① … ①②② ← ①のタイプが $p-3$ 個で他のタイプが 2 個
5 , ① … ①②③ ← (〃)
6 , ① … ①③③ ← (〃)
7 , ① … ①②②② ← ①のタイプが $p-4$ 個で他のタイプが 3 個
8 , ① … ①②②③ ← (〃)
9 , ① … ①②③③ ← (〃)
10 , ① … ①③③③ ← (〃)
⋮

ｉ）$p-1$ 個がすべて①のタイプの項の積（上の 1 行）

ⅱ）$p-2$ 個が①のタイプで後の1個が②か③のタイプの項の積（上の 2 , 3 行）

ⅲ）$p-1$ 個のうち②や③のタイプの項が2つ以上ある項の積（上の 4 行目以降）

これらのうち、$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)$ を施すと ⅲ）のかたちをしているものは 0 になってしまう。

例えば、$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(\overset{①}{x_{12}x_{i_3,i_4}}\overset{②}{x_{1,i_5}x_{2,i_6}}\overset{②}{x_{1,i_7}x_{2,i_8}}\cdots)$ ならば

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ の置換の全体を G とする。そして、その元を σ とすれば

$$s = \sum_{\sigma\in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(6)}x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(8)}\cdots)$$

ここで　$\tau_\sigma = (i_\ell, i_k)$ という互換を考える。τ_σ は σ によって変わるが、σ が G 全体を重複なく動くとき、$\tau_\sigma\sigma$ も G 全体を重複なく動く。

（例）　$G = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{array}{lcl c l}
ア\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & & ウ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(i_3,\, i_5)} & カ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
イ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} & & オ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} & & エ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
ウ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(i_3,\, i_4)} & ア\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & & オ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
エ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} & & カ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} & & イ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
オ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} & & イ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} & & ウ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
カ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} & & エ\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} & & ア\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}
\end{array}$$

実際 $f: \sigma \to \tau_\sigma\sigma$ という写像を定義すれば、$f(G) \subset G$ である。なので、f が一対一であればよい。（有限集合の場合は自動的に上への写像となる。P. 41参照）

$\sigma \neq \sigma'$ ならば、少なくとも一ヶ所は異なるはずなので $i_\ell \neq j_\ell$ とする。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_k & \cdots & i_\ell & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_k & \cdots & j_\ell & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$\tau_\sigma = (i_k, i_\ell)$ とすれば

$$\tau_\sigma\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_\ell & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad \tau_{\sigma'}\sigma' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & j_\ell & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

よって、$\tau_\sigma \sigma \neq \tau_{\sigma'} \sigma'$、一対一であることがわかる。***END***

したがって上の結果を使えば、$\tau_\sigma = (i_6, i_8)$とすれば

$$s = \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(6)}x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(8)}\cdots) \quad \text{として}$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\tau_\sigma \sigma)(x_{12}x_{\tau_\sigma\sigma(3),\tau_\sigma\sigma(4)}x_{1,\tau_\sigma\sigma(5)}x_{2,\tau_\sigma\sigma(6)}x_{1,\tau_\sigma\sigma(7)}x_{2,\tau_\sigma\sigma(8)}\cdots)$$

$$= -\sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(8)}x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(6)}\cdots)$$

$$= -\sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(8)}x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(6)}\cdots) = -s$$

$s = -s \rightarrow 2s = 0 \rightarrow s = 0$

$\tau_\sigma = (i_6, i_8)$, $\mu_\sigma = (i_5, i_7)$ならば

$$s = \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(\cdots x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(6)}x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(8)}\cdots)$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\mu_\sigma \tau_\sigma \sigma)(\cdots x_{1,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(5)}x_{2,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(6)}x_{1,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(7)}x_{2,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(8)}\cdots)$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(\cdots x_{1,\mu_\sigma\sigma(5)}x_{2,\mu_\sigma\sigma(8)}x_{1,\mu_\sigma\sigma(7)}x_{2,\mu_\sigma\sigma(6)}\cdots)$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(\cdots x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(8)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(6)}\cdots) = s$$

$s = s$ 当然である。したがって、互換は 1 回だけほどこせばよい。

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{12}x_{i_3,i_4}\overset{①}{x_{1,i_6}x_{2,i_5}}\overset{③}{x_{1,i_8}}\overset{③}{x_{2,i_7}}\cdots) \quad \text{の場合}$$

$$s = \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(6)}x_{2,\sigma(5)}x_{1,\sigma(8)}x_{2,\sigma(7)}\cdots)$$

$\tau_\sigma = (i_6, i_8)$とすれば

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\tau_\sigma \sigma)(x_{12}x_{\tau_\sigma\sigma(3),\tau_\sigma\sigma(4)}x_{1,\tau_\sigma\sigma(6)}x_{2,\tau_\sigma\sigma(5)}x_{1,\tau_\sigma\sigma(8)}x_{2,\tau_\sigma\sigma(7)}\cdots)$$

$$= -\sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(8)}x_{2,\sigma(5)}x_{1,\sigma(6)}x_{2,\sigma(7)}\cdots) = -s$$

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{12}x_{i_3,i_4}\overset{①}{x_{1,i_5}x_{2,i_6}}\overset{②}{x_{1,i_8}}\overset{③}{x_{2,i_7}}\cdots) \quad \text{の場合}$$

$$s = \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\varepsilon)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(6)}x_{1,\sigma(8)}x_{2,\sigma(7)}\cdots)$$

$\tau_\sigma = (i_5, i_8)$ とすれば

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\tau_\sigma \sigma)(x_{12}x_{\tau_\sigma\sigma(3),\tau_\sigma\sigma(4)}x_{1,\tau_\sigma\sigma(5)}x_{2,\tau_\sigma\sigma(6)}x_{1,\tau_\sigma\sigma(8)}x_{2,\tau_\sigma\sigma(7)}\cdots)$$

$$= -\sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{12}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{1,\sigma(8)}x_{2,\sigma(6)}x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(7)}\cdots) = -s$$

同様にして、ⅲ）の形をしているものは 0 となる。

以上のことから、ｉ）、ⅱ）の形の項が残ることになる。

ｉ） $p-1$ 個がすべて①のタイプの項の積

$$\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}x_{12}^{2-p}\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{12}x_{i_3,i_4}x_{12}x_{i_5,i_6}x_{12}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{12}x_{i_{n-1},i_n})$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{12}x_{i_3,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

ⅱの②） $p-2$ 個が①のタイプで後の1個が②のタイプの項の積

まず①のタイプが $p-1$ 個あった場合

$$x_{12}x_{i_3,i_4}\times x_{12}x_{i_5,i_6}\times x_{12}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{12}x_{i_{n-1},i_n} = x_{12}^{p-1}x_{i_3,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n}$$

この中のどれか一つが欠けるて、その代わりに②のタイプが入ってくるのだから、仮に $x_{12}x_{i_5,i_6}$ が欠けるのであれば、その代わりに $-x_{1,i_5}x_{2,i_6}$ が入ってくることになる。x_{12}^{p-2} は消え

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_5}x_{2,i_6}x_{i_3,i_4}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$x_{12}x_{i_7,i_8}$ が欠けるのあれば

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_7}x_{2,i_8}x_{i_3,i_4}x_{i_5,i_6}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

これらは等しい。$\tau_\sigma = (i_5, i_7)$, $\mu_\sigma = (i_6, i_8)$ とすれば前述と同じように

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_5}x_{2,i_6}x_{i_3,i_4}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{1,\sigma(5)}x_{2,\sigma(6)}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{\sigma(7),\sigma(8)}\times\cdots\times x_{\sigma(n-1),\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma)(x_{1,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(5)}x_{2,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(6)}x_{\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(3),\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(4)}x_{\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(7),\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(8)}$$

$$\times\cdots\times x_{\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(n-1),\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{1,\mu_\sigma\sigma(7)}x_{2,\mu_\sigma\sigma(6)}x_{\mu_\sigma\sigma(3),\mu_\sigma\sigma(4)}x_{\mu_\sigma\sigma(5),\mu_\sigma\sigma(8)}\times\cdots\times x_{\mu_\sigma\sigma(n-1),\mu_\sigma\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{1,\sigma(7)}x_{2,\sigma(8)}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{\sigma(5),\sigma(6)}\times\cdots\times x_{\sigma(n-1),\sigma(n)})$$

したがって、$(x_{1,i_3}x_{2,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$ を代表に選べば、その $p-1$ 倍になることから

総和は

$$-\frac{1}{2^{p-1}(p-2)!}\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_3}x_{2,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

ⅱの③) $p-2$ 個が①のタイプで後の1個が③のタイプの項の積

まず①のタイプが $p-1$ 個あった場合

$$x_{12}x_{i_3,i_4}\times x_{12}x_{i_5,i_6}\times x_{12}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{12}x_{i_{n-1},i_n}=x_{12}^{p-1}x_{i_3,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n}$$

この中のどれか一つが欠けるて、その代わりに③のタイプが入ってくるのだから、仮に $x_{12}x_{i_5,i_6}$ が欠けるのであれば、その代わりに $x_{1,i_6}x_{2,i_5}$ が入ってくることになる。x_{12}^{p-2} は消え

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_6}x_{2,i_5}x_{i_3,i_4}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$x_{12}x_{i_7,i_8}$ が欠けるのあれば

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_8}x_{2,i_7}x_{i_3,i_4}x_{i_5,i_6}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

これも上と同様に $\tau_\sigma=(i_5,i_7)$, $\mu_\sigma=(i_6,i_8)$ とすれば

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_6}x_{2,i_5}x_{i_3,i_4}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\varepsilon(\sigma)(x_{1,\sigma(6)}x_{2,\sigma(5)}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{\sigma(7),\sigma(8)}\times\cdots\times x_{\sigma(n-1),\sigma(n)})$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\varepsilon(\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma)(x_{1,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(6)}x_{2,\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(5)}x_{\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(3),\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(4)}x_{\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(7),\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(8)}$$

$$\times\cdots\times x_{\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(n-1),\mu_\sigma\tau_\sigma\sigma(n)})$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\varepsilon(\sigma)(x_{1,\sigma(8)}x_{2,(7)}x_{\sigma(3),\sigma(4)}x_{\sigma(5),\sigma(6)}\times\cdots\times x_{\sigma(n-1),\sigma(n)})$$

したがって、$(x_{1,i_4}x_{2,i_3}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$ を代表に選べば、その $p-1$ 倍になることから

総和は

$$\frac{1}{2^{p-1}(p-2)!}\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_4}x_{2,i_3}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

ここで、ⅱの②) とⅱの③) であるが $\tau_\sigma=(i_3,i_4)$ とすれば

$$\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_3}x_{2,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\varepsilon(\sigma)(x_{1,\sigma(3)}x_{2,\sigma(4)}x_{\sigma(5),\sigma(6)}x_{\sigma(7),\sigma(8)}\times\cdots\times x_{\sigma(n-1),\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\tau_\sigma \sigma)(x_{1,\tau_\sigma\sigma(3)} x_{2,\tau_\sigma\sigma(4)} x_{\tau_\sigma\sigma(5),\tau_\sigma\sigma(6)} \times\cdots\times x_{\tau_\sigma\sigma(n-1),\tau_\sigma\sigma(n)})$$

$$= -\sum_{\sigma \in G} \varepsilon(\sigma)(x_{1,\sigma(4)} x_{2,\sigma(3)} x_{\sigma(5),\sigma(6)} \times\cdots\times x_{\sigma(n-1),\sigma(n)})$$

したがって、ⅱの②）の総和の（−1）倍が ⅱの③）の総和と等しいことがわかる。

これまでをまとめると

$$P_n = \frac{1}{2^{p-1}(p-1)!} \sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{12} x_{i_3,i_4} x_{i_5,i_6} x_{i_7,i_8} \times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$-\frac{1}{2^{p-2}(p-2)!} \sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{1,i_3} x_{2,i_4} x_{i_5,i_6} x_{i_7,i_8} \times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$= \frac{1}{2^p p!}\Big[\, 2p \sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{12} x_{i_3,i_4} x_{i_5,i_6} x_{i_7,i_8} \times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$-4p(p-1) \sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{1,i_3} x_{2,i_4} x_{i_5,i_6} x_{i_7,i_8} \times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})\,\Big]$$

最後に

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4} \cdots x_{i_{n-1} i_n})$$

$$= 2p \sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{12} x_{i_3,i_4} x_{i_5,i_6} x_{i_7,i_8} \times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

$$-4p(p-1) \sum_{(i_3,\cdots,i_n)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(x_{1,i_3} x_{2,i_4} x_{i_5,i_6} x_{i_7,i_8} \times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})$$

となることを示せば証明は終わる。

下の例を見ながら $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \right\}$ の樹形図を想像する。

（例） S_4

$\sigma^1 = (1\ 2\ 3\ 4)$	$\sigma^7 = (2\ 1\ 3\ 4)$	$\sigma^{13} = (3\ 1\ 2\ 4)$	$\sigma^{19} = (4\ 1\ 2\ 3)$
$\sigma^2 = (1\ 2\ 4\ 3)$	$\sigma^8 = (2\ 1\ 4\ 3)$	$\sigma^{14} = (3\ 1\ 4\ 2)$	$\sigma^{20} = (4\ 1\ 3\ 2)$
$\sigma^3 = (1\ 3\ 2\ 4)$	$\sigma^9 = (2\ 3\ 1\ 4)$	$\sigma^{15} = (3\ 2\ 1\ 4)$	$\sigma^{21} = (4\ 2\ 1\ 3)$
$\sigma^4 = (1\ 3\ 4\ 2)$	$\sigma^{10} = (2\ 3\ 4\ 1)$	$\sigma^{16} = (3\ 2\ 4\ 1)$	$\sigma^{22} = (4\ 2\ 3\ 1)$
$\sigma^5 = (1\ 4\ 2\ 3)$	$\sigma^{11} = (2\ 4\ 1\ 3)$	$\sigma^{17} = (3\ 4\ 1\ 2)$	$\sigma^{23} = (4\ 3\ 1\ 2)$
$\sigma^6 = (1\ 4\ 3\ 2)$	$\sigma^{12} = (2\ 4\ 3\ 1)$	$\sigma^{18} = (3\ 4\ 2\ 1)$	$\sigma^{24} = (4\ 3\ 2\ 1)$

$\mu^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ， $\mu^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \right\}$ で左傍系分解してみる。

$\sigma^1, \sigma^2 \in \boldsymbol{G}1$　$\sigma^9, \sigma^{11} \in \boldsymbol{G}(1,2)(2,3)$　$\sigma^{15}, \sigma^{21} \in \boldsymbol{G}(1,3)$

$\sigma^3, \sigma^5 \in \boldsymbol{G}(3,2)$　$\sigma^{10}, \sigma^{12} \in \boldsymbol{G}(3,1)(3,4)(1,2)$　$\sigma^{16}, \sigma^{22} \in \boldsymbol{G}(3,4)(1,4)$

$\sigma^4, \sigma^6 \in \boldsymbol{G}(2,4)(3,2)$　$\sigma^{13}, \sigma^{19} \in \boldsymbol{G}(1,2)(3,1)$　$\sigma^{17}, \sigma^{23} \in \boldsymbol{G}(3,1)(4,2)$

$\sigma^7, \sigma^8 \in \boldsymbol{G}(1,2)$　$\sigma^{14}, \sigma^{20} \in \boldsymbol{G}(1,2)(1,3)(3,4)$　$\sigma^{18}, \sigma^{24} \in \boldsymbol{G}(1,2)(1,3)(4,2)$

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_4)} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4\end{pmatrix}\right)(x_{i_1i_2}x_{i_3i_4}) = \sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon(\sigma)(x_{\sigma(1)\sigma(2)}x_{\sigma(3)\sigma(4)})$$

$$= \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu 1)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,2))(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(2,4)(3,2))(x_{1\mu(3)}x_{\mu(4)2}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2))(x_{21}x_{\mu(3)\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(2,3))(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,1)(3,4)(1,2))(x_{2\mu(3)}x_{\mu(4)1}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(3,1))(x_{\mu(3)1}x_{2\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(3,1)(3,4))(x_{\mu(3)1}x_{\mu(4)2}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,3))(x_{\mu(3)2}x_{1\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,4)(1,4))(x_{\mu(3)2}x_{\mu(4)1}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,1)(4,2))(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{12}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(3,1)(4,2))(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{21})$$

ここで３つのパートごとに計算する。

①

$$\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu 1)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2))(x_{21}x_{\mu(3)\mu(4)})$$
$$= \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)}) - \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(-x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)})$$
$$= 2\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)})$$

②

$$\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,1)(4,2))(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{12}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(3,1)(4,2))(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{21})$$
$$= \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{12}) - \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{\mu(3)\mu(4)}(-x_{12}))$$
$$= \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{12}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{\mu(3)\mu(4)}x_{12})$$
$$= 2\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)})$$

③

$$\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,2))(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(2,4)(3,2))(x_{1\mu(3)}x_{\mu(4)2}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(2,3))(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,1)(3,4)(1,2))(x_{2\mu(3)}x_{\mu(4)1}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(3,1))(x_{\mu(3)1}x_{2\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,2)(3,1)(3,4))(x_{\mu(3)1}x_{\mu(4)2}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(1,3))(x_{\mu(3)2}x_{1\mu(4)}) + \sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(3,4)(1,4))(x_{\mu(3)2}x_{\mu(4)1})$$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(3,2))(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)}) = -\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(2,4)(3,2))(x_{1\mu(3)}x_{\mu(4)2}) = -\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(1,2)(2,3))(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)}) = \sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(3,1)(3,4)(1,2))(x_{2\mu(3)}x_{\mu(4)1}) = \sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(1,2)(3,1))(x_{\mu(3)1}x_{2\mu(4)}) = -\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(1,2)(3,1)(3,4))(x_{\mu(3)1}x_{\mu(4)2}) = -\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(1,3))(x_{\mu(3)2}x_{1\mu(4)}) = \sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)})$

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(3,4)(1,4))(x_{\mu(3)2}x_{\mu(4)1}) = \sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{2\mu(3)}x_{1\mu(4)})$

ここで、$\tau_{\mu}(\mu(3), \mu(4))$ とすれば

$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(4)}x_{2\mu(3)}) = \sum_{\mu \in G} \varepsilon(\tau_{\mu}\mu)(x_{1\tau_{\mu}\mu(4)}x_{2\tau_{\mu}\mu(3)})$

$= -\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

よって、③の和は

$-8\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

以上により、①②③の総和は

$4\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)}) - 8\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

$2p\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{12}x_{\mu(3)\mu(4)}) - 4\times p(p-1)\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{1\mu(3)}x_{2\mu(4)})$

$p = 2$ で成り立つことが確認できた。

今後のために、互換に関して便利な公式があるので紹介する。

公式 A （ i_k と i_ℓ を入れかえたいときに使える。）

$$(i_k, i_\ell)\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & \cdots & i_\ell & \cdots & i_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_\ell & \cdots & i_k & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \cdots & k & \cdots & \ell & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & \cdots & i_\ell & \cdots & i_n\end{pmatrix}(k, \ell)$$

公式 B

$(k, \ell)(m, n) = (m, n)(k, \ell) \quad (k \neq \ell \neq m \neq n)$

公式 C

$(m, k)(m, \ell) = (m, \ell)(k, \ell) = (k, \ell)(m, k)$

なぜなら、$(m\ ,\ k)(m\ ,\ \ell)\ =\ (m\ ,\ \ell)(k\ ,\ \ell)$ ならば

$(m\ ,\ k)(m\ ,\ \ell)$ は $m\to\ell\ ,\ k\to m\ ,\ \ell\to k$ ，$(m\ ,\ \ell)(k\ ,\ \ell)$ は $m\to\ell$ ，$k\to m\ ,\ \ell\to k$

したがって、$G(3,1)(3,4)(1,2)$ は $G(1,4)(3,1)(1,2)$ とも書ける。

次に S_n で証明する。

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)(x_{i_1i_2}x_{i_3i_4}\cdots x_{i_{n-1}i_n})$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(x_{\sigma(1)\sigma(2)}x_{\sigma(3)\sigma(4)}\cdots x_{\sigma(n-1)\sigma(n)})$$

$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right\}$ とする。左傍系分解したときに現れた ①、②、③の形に注目して求めてみる。

①の形

$(\cdots 12\cdots i_{\triangle}i_{\triangle+1}\cdots)$ の場合

◎ $x_{12}\ x_{i_3i_4}\ x_{i_5i_6}\cdots x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

$x_{\sigma(1)\sigma(2)}x_{\sigma(3)\sigma(4)}x_{\sigma(5)\sigma(6)}\cdots x_{\sigma(n-1)\sigma(n)}$ の順に注意して

σのかわりにμを入れれば

$$\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{\mu(1)\ \mu(2)}x_{\mu(3)\ \mu(4)}x_{\mu(5)\ \mu(6)}\cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)})$$

$$=\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{12}x_{i_3i_4}x_{i_5i_6}x_{i_7i_8}x_{i_9i_{10}}x_{i_{11}i_{12}}\cdots x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n})$$

この場合の左傍系は $G1=G$ となる。

（注意）

$x_{12}x_{i_3\,i_4}x_{i_7\,i_8}x_{i_5\,i_6}\quad\cdots\quad x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ の場合も考えられるが

σのかわりにμ(5,7)(6,8) を入れれば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(5,7)(6,8)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & i_7 & i_8 & i_5 & i_6 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

とすればよいが、(5,7) , (6,8) $\in G$ 、G は部分群なので $G(5,7)(6,8)=G$ 他にも

$-x_{1\,i_3}x_{2\,i_4}x_{i_7\,i_8}x_{i_{13}\,i_{14}}x_{i_9\,i_{10}}x_{i_5\,i_6}\quad\cdots\quad x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ など $(p-2)!$ 個あるが、それらは全て G に含まれることになる。したがって、左傍系は 1 個ということになる。

◎ $\cdots x_{i_{k-2}i_{k-1}}\, x_{12} x_{i_{k+2}i_{k+3}} \cdots x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

σ$(k)=1$，σ$(k+1)=2$（ $3 \leqq k \leqq n-1$ の奇数 ）とするためには

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i_{k-2} & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,k)(2,k+1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ i_k & i_{k+1} & \cdots & i_{k-2} & i_{k-1} & 1 & 2 & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$\mu(1,k)(2,k+1)=\mu'$ とし、σ のかわりに μ' を入れれば

$$\sum_{\mu\in G} \varepsilon(\mu(1,k)(2,k+1))\,(x_{\mu'(1)\ \mu'(2)} x_{\mu'(3)\ \mu'(4)} x_{\mu'(5)\ \mu'(6)} \cdots x_{\mu'(n-1)\ \mu'(n)})$$

$$= \sum_{\mu\in G} \varepsilon(\mu)\,(x_{i_k\, i_{k+1}} \cdots x_{i_{k-2}\, i_{k-1}} x_{1\ 2} x_{i_{k+2}\, i_{k+3}} \cdots x_{i_{n-1}\, i_n})$$

したがって、上の注意を考慮に入れ、左傍系は $G(1,k)(2,k+1)$，$p-1$ 個である。

ここまでをまとめると、任意の σ $\in G$ または σ $\in G(1,k)(2,k+1)$ に対し、σ をほどこすと

$(\cdots 12 \cdots i_3 i_4 \cdots)$ の形になり、そのような左傍系は計 p 個あることがわかった。

②の形

$(-1)\times(\cdots 21 \cdots i_\triangle i_{\triangle+1} \cdots)$ の場合

◎ $-x_{21}\, x_{i_3 i_4}\, x_{i_5 i_6} \cdots x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

σ$(1)=2$，σ$(2)=1$ とするためには

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$\mu(1,2)=\mu'$ とし、σ のかわりに μ' を入れれば

$$\sum_{\mu\in G} \varepsilon(\mu(1,2))\,(x_{2\ 1} x_{\mu(3)\ \mu(4)} x_{\mu(5)\ \mu(6)} \cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)})$$

$$= -\sum_{\mu\in G} \varepsilon(\mu)\,(x_{2\ 1} x_{i_3\, i_4} x_{i_5\, i_6} \cdots x_{i_{n-1}\, i_n})$$

したがって、上の注意を考慮に入れ、左傍系は $G(1,2)$，1 個である。

◎ $-x_{i_k i_{k+1}} \cdots x_{i_{k-2}\, i_{k-1}} x_{21} x_{i_{k+2}i_{k+3}} \cdots x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

σ$(k)=2$，σ$(k+1)=1$（ $3 \leqq k \leqq n-1$ の奇数 ）とするためには

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i_{k-2} & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}(2,k)(1,k+1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ i_{k+1} & i_k & \cdots & i_{k-2} & i_{k-1} & 2 & 1 & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$\mu(k,k+1)(1,k)(2,k+1) = \mu'$ とし、σ のかわりに μ' を入れれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i_{k-2} & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}(k,k+1)(2,k)(1,k+1)$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ i_k & i_{k+1} & \cdots & i_{k-2} & i_{k-1} & 2 & 1 & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \quad \leftarrow \bigstar$$

$$\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu(k,k+1)(2,k)(1,k+1))(x_{\mu(k)\ \mu(k+1)} \cdots x_{\mu(k-2)\ \mu(k-1)} x_{2\ 1} \cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)})$$

$$= -\sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{i_k\, i_{k+1}} \cdots x_{i_{k-2}\, i_{k-1}} x_{2\ 1} x_{i_{k+2}\, i_{k+3}} \cdots x_{i_{n-1}\, i_n})$$

したがって、上の注意を考慮に入れ、左傍系は $(k,k+1) \in G$ なので $G(2,k)(1,k+1)$, $p-1$ 個である。

まとめると、任意の $\sigma \in G(1,2)$ または $\sigma \in G(2,k)(1,k+1)$ に対し、σ をほどこすと $(-1)\times(\cdots 21 \cdots i_3 i_4 \cdots)$ の形になり、そのような左傍系は計 p 個あることがわかった。

よって、①の形を基本とすれば、G , $G(1,k)(2,k+1)$, $G(1,2)$, $G(2,k)(1,k+1)$ のいずれかに含まれる σ に対し、σ をほどこせば $(\cdots 12 \cdots i_\triangle i_{\triangle+1} \cdots)$, $(-1)\times(\cdots 21 \cdots i_\triangle i_{\triangle+1} \cdots) = (\cdots 12 \cdots i_\triangle i_{\triangle+1} \cdots)$ となるので $2p$ 個の左傍系による和は

$$2p \sum_{\mu \in G} \varepsilon(\mu)(x_{12} x_{i_3 i_4} x_{i_5 i_6} x_{i_7 i_8} x_{i_9 i_{10}} x_{i_{11} i_{12}} \cdots x_{i_{n-3} i_{n-2}} x_{i_{n-1} i_n})$$

となる。

<u>以後は重複を避けるため、上の注意はわかっているものとし、上にしるした ★ までを目標に左傍系とその個数までを求めることにする。</u>

③の形

$p = 2$ の場合は、$x_{\triangle\triangle} x_{\square\square}$ の 4 ヶ所に 1 , 2 , i_3 , i_4 を入れたが、一般の場合は

$(-1)\times(\cdots 1 i_3 \cdots 2 i_4 \cdots)$
$(\cdots 1 i_3 \cdots i_4 2 \cdots)$
$(\cdots i_3 1 \cdots 2 i_4 \cdots)$
$(-1)\times(\cdots i_3 1 \cdots i_4 2 \cdots)$
$(-1)\times(\cdots 2 i_4 \cdots 1 i_3 \cdots)$
$(\cdots 2 i_4 \cdots i_3 1 \cdots)$
$(\cdots i_4 2 \cdots 1 i_3 \cdots)$
$(-1)\times(\cdots i_4 2 \cdots i_3 1 \cdots)$

$\rightarrow \ -1\times(\cdots 1 i_3 \cdots 2 i_4 \cdots)$ （ $x_{ij} = -x_{ji}$ に注意して ）

これら 8 つのパターンになる $\sigma \in S_n$ が G によって左傍系分解したとき、どの左傍系に含まれるかを調べる。

$(-1)\times(\cdots 1 i_3 \cdots 2 i_4 \cdots)$ の場合（注意 i_3 , i_4 があるのでいきなりできない。）

◎ $-x_{1\ i_3}x_{2\ i_4}x_{i_5\ i_6}\ \cdots\ x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

$\sigma(1)=1$ で $\sigma(3)=2$ となるためには

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & i_3 & 2 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ なので σ のかわりに $\mu(2,3)$ を入れればよい。

したがって、左傍系は $G(2,3)$ で 1 個である。

◎ $-x_{1\ i_3}x_{i_5\ i_6}x_{2\ i_4}x_{i_7\ i_8}\ \cdots\ x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

$\sigma(1)=1$ で $\sigma(5)=2$ となるためには

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(2,5) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n\\ 1 & i_5 & i_3 & i_4 & 2 & i_6 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ なので それに $(4,6)(3,5)$ を前に加え、σ のかわりに $\mu(4,6)(3,5)(2,5)=\mu'$ を入れればよい。

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(4,6)(3,5)(2,5) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n\\ 1 & i_3 & i_5 & i_6 & 2 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$

したがって、$(4,6)$, $(3,5) \in G$ なので、この左傍系は $G(2,5)$ となり、1 個である。

◎ $-x_{1\ i_3}x_{i_k\ i_{k+1}}\ \cdots\ x_{2\ i_4}x_{i_{k+2}\ i_{k+3}}\ \cdots\ x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

$\sigma(1)=1$ で $\sigma(k)=2$ （ $7 \leqq k \leqq n-1$ の奇数）とするためには

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_k & \cdots & i_n\end{pmatrix}(2,k) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & \cdots & n\\ 1 & i_k & i_3 & i_4 & \cdots & 2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$

なのでどの様になるかわからないが σ のかわりに $\mu(2,k)=\mu'$ を入れてみる。

$\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(2,k))(x_{\mu'(1)\ \mu'(2)}x_{\mu'(3)\ \mu'(4)}\cdots x_{\mu'(k)\ \mu'(k+1)}\cdots x_{\mu'(n-1)\ \mu'(n)})$

$=\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu(2,k))(x_{1\ \mu(k)}x_{\mu(3)\ \mu(4)}\cdots x_{2\ \mu(k+1)}\cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)})$

あらためて $\mu'=\mu(4,k+1)(3,k)(2,k)$ とすれば

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix}(4,k+1)(3,k)(2,k)$

$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n\\ 1 & i_3 & i_k & i_{k+1} & \cdots & 2 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$

したがって、$(4,k+1)$, $(3,k)\in G$ なので、この左傍系は $G(2,k)$ となり、$(p-3)$ 個なので、上の 2 個加え $(p-1)$ 個の左傍系 $G(2,K)$ ($3\leqq k\leqq n-1$ の奇数) に含まれる σ に対し、σ をほどこすと

$$-\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)(x_{1\ \mu(3)}x_{2\ \mu(4)}x_{\mu(5)\ \mu(6)}\cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)})$$

となることがわかった。

◎ $-x_{i_k\,i_{k+1}}x_{1\ i_3}\ \cdots\ x_{2\ i_4}x_{i_{k+2}\ i_{k+3}}\ \cdots\ x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

$\sigma(3)=1$ で $\sigma(k)=2$ ($7\leqq k\leqq n-1$ の奇数) は

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\1&2&i_3&i_4&i_5&i_6&\cdots&i_k&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}(1,3)(2,k)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\i_3&i_k&1&i_4&i_5&i_6&\cdots&2&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

$\mu(k,k+1)(3,k+1)(4,k+1)(1,3)(2,k)=\mu'$ とすれば

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\1&2&i_3&i_4&i_5&i_6&\cdots&i_k&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}(k,k+1)(3,k+1)(4,k+1)(1,3)(2,k)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\i_k&i_{k+1}&1&i_3&i_5&i_6&\cdots&2&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

$(k,k+1)$, $(3,k+1)$, $(4,+1)\in G$ なので、この左傍系は $G(1,3)(2,k)$ となり、この左傍系の個数は $(p-2)$ 個である。

◎ $-x_{i_\ell\,i_{\ell+1}}x_{i_k\,i_{k+1}}x_{1\ i_3}\ \cdots\ x_{2\ i_4}x_{i_{k+2}\ i_{k+3}}\ \cdots\ x_{i_{n-3}i_{n-2}}x_{i_{n-1}i_n}$ の場合

$\sigma(\ell)=1$ で $\sigma(k)=2$ ($\ell<k$, $5\leqq\ell$, $k\leqq n-1$ の奇数) とするためには

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&\ell&\cdots&k&\cdots&n\\1&2&i_3&i_4&\cdots&i_\ell&\cdots&i_k&\cdots&i_n\end{pmatrix}(1,\ell)(2,k)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&\ell&\cdots&k&\cdots&n\\i_\ell&i_k&i_3&i_4&\cdots&1&\cdots&2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

なので $\mu(\ell+1,k)(4,k+1)(3,\ell+1)(1,\ell)(2,k)=\mu'$ とすれば

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&\ell&\ell+1&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\1&2&i_3&i_4&\cdots&i_\ell&i_{\ell+1}&\cdots&i_k&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}(\ell+1,k)(4,k+1)(3,\ell+1)(1,\ell)(2,k)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&\ell&\ell+1&\cdots&k&k+1&k+2&k+3&\cdots&n\\i_\ell&i_{\ell+1}&i_k&i_{k+1}&\cdots&1&i_3&\cdots&2&i_4&i_{k+2}&i_{k+3}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

この左傍系は $G(1,\ell)(2,k)$ で個数は $\{(p-3)+(p-4)+\cdots+1\}$ 個である。

以上により、$(-1)\times(\cdots 1i_3\cdots 2i_4\cdots)$ のパターンの左傍系全体は

$G(2,k)$ ($3\leqq k\leqq n-1$ の奇数) … $p-1$ 個

$G(1,\ell)(2,k)$ ($\ell < k$, $3 \leqq \ell$, $k \leqq n-1$ の奇数) $\cdots \{ (p-2)+(p-3)+(p-4)+\cdots+1 \}$ 個

計 $\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個となる。

$H = G(2,k)$ ($3 \leqq k \leqq n-1$ の奇数) $\cup\, G(1,\ell)(2,k)$ ($\ell < k$, $3 \leqq \ell$, $k \leqq n-1$ の奇数) としたとき、$G(2,k) \cap G(1,\ell)(2,k) = \varnothing$ (もしそうでなければ、$(2,k) = \mu(1,\ell)(2,k)$ となる $\mu \in G$ が存在する。左辺は $\ell \to \ell$ 、右辺は $\ell \to 1$ 、$\ell = k$ であっても左辺は $\ell \to 2$ 右辺は $\ell \to 1$)

任意の $\sigma \in H$ に対し、σ をほどこすと $(-1)\times(\cdots 1 i_3 \cdots 2 i_4 \cdots)$ となる。

以後はこの H を元にして進める。

$(\cdots i_3 1 \cdots 2 i_4 \cdots)$ の場合は

$(-1)\times(\cdots 1 i_3 \cdots 2 i_4 \cdots)$ $\leftarrow x_{ij} = -x_{ji}$

なので、互換 $(1,3)$ をほどこせばよい。

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、$(1,3)$ を先頭に加え

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,3)(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ i_3 & 1 & 2 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

よって、左傍系は $G(1,3)(2,3)$、1 個である。

$G(2,5)$ ならば、$\mu' = \mu(4,6)(3,5)(2,5)$ だったので

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,3)(4,6)(3,5)(2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ i_3 & 1 & i_5 & i_6 & 2 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

互換の公式 B , C から $(1,3)(4,6)(3,5)(2,5) = (4,6)(3,1)(3,5)(2,5) = (4,6)(3,5)(1,5)(2,5)$

よって、左傍系は $G(1,5)(2,5)$、1 個である。

$G(2,k)$ ($7 \leqq k \leqq n-1$ の奇数) ならば $\mu' = \mu(4,k+1)(3,k)(2,k)$ だったので

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,3)(4,k+1)(3,k)(2,k)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_3 & 1 & i_k & i_{k+1} & \cdots & 2 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

互換の公式 B , C から

$(1,3)(4,k+1)(3,k)(2,k) = (4,k+1)(3,1)(3,k)(2,k) = (4,k+1)(3,k)(1,k)(2,k)$

よって、左傍系は $G(1,k)(2,k)$、$p-3$ 個である。

$G(1,3)(2,k)$ ($7 \leqq k \leqq n-1$ の奇数) ならば $\mu' = \mu(k,k+1)(3,k+1)(4,k+1)(1,3)(2,k)$ だったので

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,3)(k,k+1)(3,k+1)(4,k+1)(1,3)(2,k)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_k & i_{k+1} & i_3 & 1 & i_5 & i_6 & \cdots & 2 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

互換の公式 B , C から

$(1,3)(k,k+1)(3,k+1)(4,k+1)(1,3)(2,k) = (k,k+1)(1,3)(3,k+1)(4,k+1)(1,3)(2,k)$

$= (k,k+1)(1,k+1)(3,1)(4,k+1)(1,3)(2,k) = (k,k+1)(1,k+1)(4,k+1)(2,k)$

$= (k,k+1)(k+1,4)(1,4)(2,k)$

よって、左傍系は $G(1,4)(2,k)$、$p-2$ 個である。

$G(1,\ell)(2,k)$（ $\ell < k$, $5 \leqq \ell$, $k \leqq n-1$ の奇数) ならば、$\mu' = \mu(\ell+1,k)(4,k+1)(3,\ell+1)(1,\ell)(2,k)$ だったので

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_{\ell-1} & i_\ell & i_{\ell+1} & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1,3)(\ell+1,k)(4,k+1)(3,\ell+1)(1,\ell)(2,k)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ i_\ell & i_{\ell+1} & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_{\ell-1} & i_3 & 1 & \cdots & 2 & i_4 & i_{k+2} & i_{k+3} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

互換の公式 B , C から

$(1,3)(\ell+1,k)(4,k+1)(3,\ell+1)(1,\ell)(2,k) = (\ell+1,k)(4,k+1)(3,1)(3,\ell+1)(1,\ell)(2,k)$

$= (\ell+1,k)(4,k+1)(3,\ell+1)(1,\ell+1)(1,\ell)(2,k)$

よって、左傍系は $G(1,\ell+1)(1,\ell)(2,k)$、$\{(p-3)+(p-4)+\cdots+1\}$ 個である。

全体では、左傍系は $\{1+1+(p-3)+(p-2)+(p-3)+(p-4)+\cdots+1\} = \dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。これらの左傍系に対し、任意の σ をほどこすと $(\cdots i_3 1 \cdots 2 i_4 \cdots)$ となる。

$(\cdots 1 i_3 \cdots i_4 2 \cdots)$ の場合は

互換 (2,4) を先頭にほどこせばよい。

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、(2,4) を先頭に加え

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n \end{pmatrix}(2,4)(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & i_3 & i_4 & 2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

左傍系は、$\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。

$(-1)\times(\cdots i_3 1\cdots i_4 2\cdots)$ の場合は

互換 (1,3)(2,4) を先頭にほどこせばよい。

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、(2,4)(1,3) を先頭に加え

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(2,4)(1,3)(2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ i_3 & 1 & i_4 & 2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

左傍系は、$\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。

$(\cdots 2 i_4\cdots 1 i_3\cdots)$ の場合は

互換 (1,2)(3,4) を先頭にほどこせばよい。

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、(1,2)(3,4) を先頭に加え

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(1,2)(3,4)(2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 2 & i_4 & 1 & i_3 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

左傍系は、$\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。

$(\cdots 2 i_4\cdots i_3 1\cdots)$ の場合は

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、互換 (1,3)(1,2)(3,4) を先頭にほどこせばよい。

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(1,3)(1,2)(3,4)(2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 2 & i_4 & i_3 & 1 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

左傍系は、$\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。

$(\cdots i_4 2\cdots 1 i_3\cdots)$ の場合は

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、互換 (2,4)(1,2)(3,4) を先頭にほどこせばよい。

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(2,4)(1,2)(3,4)(2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ i_4 & 2 & 1 & i_3 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

左傍系は、$\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。

$-(\cdots i_4 2\cdots i_3 1\cdots)$ の場合は

$G(2,3)$ ならば、$\mu' = \mu(2,3)$ だったので、互換 (2,4)(1,3)(1,2)(3,4) を先頭にほどこせばよい。

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_n\end{pmatrix}(2,4)(1,3)(1,2)(3,4)(2,3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ i_4 & 2 & i_3 & 1 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

左傍系は、$\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個になる。

ここで確認だが、S_n の位数は $(n-2)!$ で、左傍系の個数は $n(n-1)$ 個のはずである。

$2p+4p(p-1)=4p^2-2p=2p(2p-1)=n(n-1)$ なので、すべての左傍系分解がそろったことになる。

以上によって、8 つのパターンの合計がすべて等しいことがわかったので、③の場合の総合合計は

$$8\times\frac{p(p-1)}{2}\times\left(-\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)\,(x_{1\ \mu(3)}x_{2\ \mu(4)}x_{\mu(5)\ \mu(6)}\cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)}\right)$$

$$=-4p(p-1)\left(\sum_{\mu\in G}\varepsilon(\mu)\,(x_{1\ \mu(3)}x_{2\ \mu(4)}x_{\mu(5)\ \mu(6)}\cdots x_{\mu(n-1)\ \mu(n)}\right)$$

$$=-4p(p-1)\sum_{(i_3,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}3&4&\cdots&n\\ i_3&i_4&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{1,i_3}x_{2,i_4}x_{i_5,i_6}x_{i_7,i_8}\times\cdots\times x_{i_{n-1},i_n})\,]$$

以上で、x_{12}^{n-4} で割り切れるという前提はとれた。最後に Ⓑ の式と Ⓒ の式との関係が証明する。それで、$2^p p!$ で割り切れることはわかる。

$$P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)=\sum_{\substack{i_1<i_2,\ \cdots,\ i_{n-1}<i_n\\ i_1<i_3<\cdots<i_{n-1}\,(\text{添字が奇数})}}\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}(x_{i_1i_2}x_{i_3i_4}\cdots x_{i_{n-1}i_n})\qquad\cdots\ \text{Ⓑ}$$

$$=\frac{1}{2^p p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\right)(x_{i_1i_2}x_{i_3i_4}\cdots x_{i_{n-1}i_n})\qquad\cdots\ \text{Ⓒ}$$

$i_1<i_2,\cdots,i_{n-1}<i_n$, $i_1<i_3<\cdots<i_{n-1}$（添字が奇数）という条件だが、具体的に $p=3$ $n=2\times3=6$ でそのような数の列を求めてみる。

$(p=3, n=6)$

5 本	3 本	1 本
(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
	(3, 5)	(4, 6)
	(3, 6)	(4, 5)
(1, 3)	(2, 4)	(5, 6)
	(2, 5)	(4, 6)
	(2, 6)	(4, 5)
(1, 4)	(2, 3)	(5, 6)
	(2, 5)	(3, 6)
	(2, 6)	(3, 5)
(1, 5)	(2, 3)	(4, 6)
	(2, 4)	(3, 6)
	(2, 6)	(3, 4)

先頭は 1 を選ばなければならない。その後ろの数はそれより大きい数なので、6－1 = 5 本の枝ができる。

次の枝は（△、□）の□に入る数がすでに△も含め 3 つ使われているので、6－3 = 3 よって、3 本となる。

次の枝は同じように前の枝の本数から 2 を引けばよい。

このように、総枝数は 5×3×1 本というこ

$$
(1,6)\begin{cases}(2,3) & \text{———} \ (4,5)\\ (2,4) & \text{———} \ (3,5)\\ (2,5) & \text{———} \ (3,4)\end{cases}
$$

したがって、$n = 2p$ の場合、総枝数は

$(2p-1)\times(2p-3)\times(2p-5)\times\cdots\times3\times1 = (2p-1)!!$ 本ということになる。

$$
\sum_{\substack{i_1<i_2\,,\,\cdots\,,\,i_{n-1}<i_n \\ i_1<i_3<\cdots<i_{n-1}(\text{添字が奇数})}} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4} \cdots x_{i_{n-1} i_n} \qquad \cdots \text{Ⓑ}
$$

は $(2p-1)!!$ 項あることになる。そこで、仮にその中の σ’を一つを選んだとする。

$$
\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_n \end{pmatrix} x_{i'_1 i'_2} x_{i'_3 i'_4} \cdots x_{i'_{n-1} i'_n}
$$

$$
\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_n \end{pmatrix}, \quad \tau_{\sigma'} = (i'_1\,,\,i'_2)\ \text{とすれば}
$$

$$
\varepsilon(\tau_{\sigma'}\sigma')\, x_{\tau_{\sigma'}\sigma'(1)\,,\,\tau_{\sigma'}\sigma'(2)} x_{\tau_{\sigma'}\sigma'(3)\,,\,\tau_{\sigma'}\sigma'(4)} \cdots x_{\tau_{\sigma'}\sigma'(n-1)\,,\,\tau_{\sigma'}\sigma'(n)}
$$

$$
= -\,\varepsilon(\sigma')\, x_{i'_2 i'_1} x_{i'_3 i'_4} \cdots x_{i'_{n-1} i'_n}
$$

$$
= \varepsilon(\sigma')\, x_{i'_1 i'_2} x_{i'_3 i'_4} \cdots x_{i'_{n-1} i'_n} \qquad \leftarrow x_{ij} = -x_{ji}
$$

つまり、$x_{i'_{k+1}\,,\,i'_k}$ という因子があったとしても、選ばれた項と符号まで含め一致する。

また、$x_{i'_1 i'_2} x_{i'_3 i'_4} \cdots x_{i'_{n-1} i'_n}$ の順であるが、$x_{i'_3 i'_4} x_{i'_1 i'_2} \cdots x_{i'_{n-1} i'_n}$ でもよい。この場合は $\tau_{\sigma'} = (i'_1\,,\,i'_3)$, $\mu_{\sigma'} = (i'_2\,,\,i'_4)$ 2つの互換が必要である。どんな順であっても偶数個の互換の積で作ることができる。この場合も符号は変わらない。

このことをⓒの式から考えてみると、$\sigma \in S_n$ は自由で制限がなかったが、$x_{i'_{k+1}\,,\,i'_k}$ の置ける位置が p ヶ所あることから、$2^p \times p!$ のバリエーションがあって、しかもそれらは符号も含め最初に選んだ σ’に関する項と一致するのであるから、そのような置換の全体を $H_{i'}$ とすると当然 $H_{i'} \subset S_n$ であり、$H_{i'}$ の元は $2^p p!$ 個である。

次に、σ’とは違う σ’’を選んでみる。

$\sigma' \to [\,i'_1\,,\,i'_2\,][\,i'_3\,,\,i'_4\,][\,i'_5\,,\,i'_6\,]\cdots[\,i'_{n-1}\,,\,i'_n\,]$ ← 添字だけを見る。

$\sigma'' \to [\,i''_1\,,\,i''_2\,][\,i''_3\,,\,i''_4\,][\,i''_5\,,\,i''_6\,]\cdots[\,i''_{n-1}\,,\,i''_n\,]$

上下の括弧どうしを比べると同じものもあるが $[\,i'_k\,,\,i'_{k+1}\,] \neq [\,i''_\ell\,,\,i''_{\ell+1}\,]$ ($1 \leqq k\,,\,\ell \leqq n$ の奇数) となる組があるはずである。よって、同じ括弧内の前後の入れかえ、括弧ごとの順番

の入れかえでは符号を含め一致させることはできない。

σ'' に関する置換の全体を $H_{i''}$ とすれば $H_{i'} \cap H_{i''} = \varnothing$ であって、$H_{i''}$ の元も $2^p p!$ 個あることになる。よって、$(2p-1)!!$ 個あるすべての合併集合を $M = (H_{i'} \cup H_{i''} \cup \cdots)$ とすれば、M の元の個数は $n!$ 以下のはずである。

実際に確認してみると

$2^p p! \times (2p-1)!! = 2p \times (2p-2) \times (2p-4) \times \cdots \times 2 \times (2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 1 = (2p)!$

となり、S_n の位数に等しい。つまり、S_n の元がもれなく使われていることになる。

よって、Ⓑ の式と Ⓒ の式は等しく、Ⓒ の式は $2^p p!$ で割り切れることになる。

(P. 86　注意)

$$det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \neq f_1(\cdots, x_{ij}, \cdots) \cdot f_2(\cdots, x_{ij}, \cdots)$$

なぜなら、$det\,(x_{ij}) = \Delta_{1j} x_{1j} + \Delta_{2j} x_{2j} + \cdots + \Delta_{nj} x_{nj}$　(定理5 (22))

よって、j を1つ決めたとき、$det\,(x_{ij})$ は 一つの列の x_{ij} ($1 \leqq i \leqq n$) の斉一次式となる。

したがって、j を1つ定め、f_1 , f_2 を x_{ij} ($1 \leqq i \leqq n$) の多項式とみるとき、いずれか一方が x_{ij} ($1 \leqq i \leqq n$) の斉一次式になり、他方は x_{ij} ($1 \leqq i \leqq n$) を全然含まない。もし含まれていたら $f_1 \cdot f_2$ なので、二次の項ができてしまう。

同様に行に関してもいえるので、たとえば、x_{11} が f_1 に含まれていたとすれば、x_{11} は f_2 には含まれていない。ということは、x_{i1} ($1 \leqq i \leqq n$) も f_2 に含まれていないことになり、x_{1j} ($1 \leqq j \leqq n$) も f_2 に含まれないことになる。つまり、x_{ij} ($1 \leqq i,j \leqq n$) がすべて f_1 に含まれ f_2 に含まれないことになる。よって、f_2 は定数でなければならない。

(P. 87　乗法公式による行列式の特徴づけ)

f は n^2 個の変数 x_{ij} の多項式であるということは、スカラー値関数である。

($n = 1$ の場合)

f は x の多項式なので、$f(x) = \sum_{v=0}^{k} a_v x^v$, $a_k \neq 0$ とおけば、仮定により

$f(xy) = \sum_{v=0}^{k} a_v x^v y^v = f(x)f(y) = f(x)\sum_{v=0}^{k} a_v y^v = f(x)a_0 + f(x)a_1 y + \cdots + f(x)a_k y^k$

これが、x , y に関する多項式として成立するので、$a_k x^k y^k = f(x) a_k y^k$ したがって、$f(x) = x^k$ となる。

$\phi(x) = f(xE)$ としているが、当然スカラー値関数である。だから、上の証明から $\phi = x^{k_1}$ と書けることになる。よって、$f(X)\,f({}^tX) = |\,X\,|^{k_1} \rightarrow f(X) = c|\,X\,|^k$, $f({}^tX) = \dfrac{1}{c}|\,X\,|^{k_1 - k}$

$f(X^2) = c|\,X^2\,|^k = c|\,X\,|^{2k} = f(X)^2 = c^2|\,X\,|^{2k}$ から、$c^2 = c$ を得る。

（P．87　例 1）

$r < n$ として、1 , 2 , … , n から r 個とりだす組合わせ（全部で、$N = {}_nC_r$ 個ある）に適当に順番をつけ、$\alpha^{(\nu)} = \{\ \alpha_1^{(\nu)},\ \alpha_2^{(\nu)},\ \cdots,\ \alpha_r^{(\nu)}\}$（$1 \leqq \nu \leqq N$）とする。

そして、A から 第 $\alpha_1^{(\mu)},\ \alpha_2^{(\mu)},\ \cdots,\ \alpha_r^{(\mu)}$ 行、第 $\alpha_1^{(\nu)},\ \alpha_2^{(\nu)},\ \cdots,\ \alpha_r^{(\nu)}$ 列をとりだして作った r 次小行列式を $|\,A_{\mu\nu}{}^{(r)}\,|$ とかき、それらを（ μ , ν ）成分とする

N 次正方行列を $C_r(A) = (\,|\,A_{\mu\nu}{}^{(r)}\,|\,)$ とおく。

（具体的に）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \boxed{|A_{13}{}^{(2)}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

$r = 2$ ならば、$3 = {}_3C_2$ 個あって、$\alpha^{(1)} = \{\ \alpha_1^{(1)},\ \alpha_2^{(1)}\} = \{1\ ,2\}$, $\alpha^{(2)} = \{\ \alpha_1^{(2)},\ \alpha_2^{(2)}\}$ $= \{1\ ,3\}$, $\alpha^{(3)} = \{\ \alpha_1^{(3)},\ \alpha_2^{(3)}\} = \{2\ ,3\}$ のように適当に順番をつける。

$$C_r(A) = \begin{pmatrix} |A_{11}{}^{(2)}| & |A_{12}{}^{(2)}| & |A_{13}{}^{(2)}| \\ |A_{21}{}^{(2)}| & |A_{22}{}^{(2)}| & |A_{23}{}^{(2)}| \\ |A_{31}{}^{(2)}| & |A_{32}{}^{(2)}| & |A_{33}{}^{(2)}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$|\,C_r(A)\,| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}^2a_{22}^2a_{33}^2 - 2a_{11}^2a_{22}a_{23}a_{32}a_{33} + a_{11}^2a_{23}^2a_{32}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}a_{33}^2 + 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{23}a_{32}a_{33} + 2a_{11}a_{12}a_{22}a_{23}a_{31}a_{33} - 2a_{11}a_{12}a_{23}^2a_{31}a_{32} + 2a_{11}a_{13}a_{21}a_{22}a_{32}a_{33} - 2a_{11}a_{13}a_{21}a_{23}a_{32}^2 - 2a_{11}a_{13}a_{22}^2a_{31}a_{33} + 2a_{11}a_{13}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32} + a_{12}^2a_{21}^2a_{33}^2 - 2a_{12}^2a_{21}a_{23}a_{31}a_{33} + a_{12}^2a_{23}^2a_{31}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{21}^2a_{32}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{31}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{21}a_{23}a_{31}a_{32} - 2a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}a_{31}^2 + a_{13}^2a_{21}^2a_{32}^2 - 2a_{13}^2a_{21}a_{22}a_{31}a_{32} + a_{13}^2a_{22}^2a_{31}^2$

$= (a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31})^2$

$= |A|^2$ （カルキング*Pro* による計算）

一般には次の様になる。

$$|C_r(A)| = \begin{vmatrix} |A_{11}^{(r)}| & |A_{12}^{(r)}| & \cdots & |A_{1N}^{(r)}| \\ |A_{21}^{(r)}| & |A_{22}^{(r)}| & \cdots & |A_{2N}^{(r)}| \\ & & \cdots & \\ |A_{N1}^{(r)}| & |A_{N2}^{(r)}| & \cdots & |A_{NN}^{(r)}| \end{vmatrix} = |A|^{{}_{n-1}C_{r-1}}$$

実際、r を定めておけば、$B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$ に対し

$$C_r(B) = \begin{pmatrix} |B_{11}^{(r)}| & |B_{12}^{(r)}| & \cdots & |B_{1N}^{(r)}| \\ |B_{21}^{(r)}| & |B_{22}^{(r)}| & \cdots & |B_{2N}^{(r)}| \\ & & \cdots & \\ |B_{N1}^{(r)}| & |B_{N2}^{(r)}| & \cdots & |B_{NN}^{(r)}| \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ & & \cdots & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

$C_r(C)$ の (μ, ν) 成分は

$$|C^{(r)}_{\mu,\nu}| = \begin{vmatrix} c_{\alpha_1^{(\mu)}\alpha_1^{(\nu)}} & \cdots & c_{\alpha_1^{(\mu)}\alpha_r^{(\nu)}} \\ c_{\alpha_2^{(\mu)}\alpha_1^{(\nu)}} & \cdots & c_{\alpha_2^{(\mu)}\alpha_r^{(\nu)}} \\ & \cdots & \\ c_{\alpha_r^{(\mu)}\alpha_1^{(\nu)}} & \cdots & c_{\alpha_r^{(\mu)}\alpha_r^{(\nu)}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)}k}b_{k\alpha_1^{(\nu)}} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)}k}b_{k\alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)}k}b_{k\alpha_r^{(\nu)}} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)}k}b_{k\alpha_1^{(\nu)}} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)}k}b_{k\alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)}k}b_{k\alpha_r^{(\nu)}} \\ & & \cdots & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)}k}b_{k\alpha_1^{(\nu)}} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)}k}b_{k\alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)}k}b_{k\alpha_r^{(\nu)}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)}1}b_{1\alpha_1^{(\nu)}}+\cdots+a_{\alpha_1^{(\mu)}n}b_{n\alpha_1^{(\nu)}} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)}k}b_{k\alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)}k}b_{k\alpha_r^{(\nu)}} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)}1}b_{1\alpha_1^{(\nu)}}+\cdots+a_{\alpha_2^{(\mu)}n}b_{n\alpha_1^{(\nu)}} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)}k}b_{k\alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)}k}b_{k\alpha_r^{(\nu)}} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)}1}b_{1\alpha_1^{(\nu)}}+\cdots+a_{\alpha_r^{(\mu)}n}b_{n\alpha_1^{(\nu)}} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)}k}b_{k\alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)}k}b_{k\alpha_r^{(\nu)}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 \alpha_1^{(\nu)}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)} k_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)} k} b_{k \alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_1^{(\mu)} k} b_{k \alpha_r^{(\nu)}} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)} k_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)} k} b_{k \alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_2^{(\mu)} k} b_{k \alpha_r^{(\nu)}} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)} k_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)} k} b_{k \alpha_2^{(\nu)}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha_r^{(\mu)} k} b_{k \alpha_r^{(\nu)}} \end{vmatrix}$$

繰り返す
↓

$$= \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_r=1}^{n} b_{k_1 \alpha_1^{(\nu)}} b_{k_2 \alpha_2^{(\nu)}} \cdots b_{k_r \alpha_r^{(\nu)}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)} k_1} & a_{\alpha_1^{(\mu)} k_2} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\mu)} k_r} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)} k_1} & a_{\alpha_2^{(\mu)} k_2} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\mu)} k_r} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)} k_1} & a_{\alpha_r^{(\mu)} k_2} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\mu)} k_r} \end{vmatrix}$$

← n^r 項ある。

k_1 , k_2 , $\cdots$, k_r がすべて相異なるものだけを加えればよい。したがって、1 , 2 , $\cdots$, n の中から r 個取り出す組み合わせを考える。ところが、$\alpha^{(\nu)} = \{ \alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \cdots, \alpha_r^{(\nu)} \}$ ($1 \leqq \nu \leqq N$) がすでに定まっているので、1つの $\alpha^{(\lambda)}$ を決め、その組合わせに関してのすべての置換の集合を $G^{(\lambda)}$ 、その元を σ とする。すると上の和は次のようになる。

k_1 , k_2 , $\cdots$, k_r を $\alpha_1^{(\lambda)}, \alpha_2^{(\lambda)}, \cdots, \alpha_r^{(\lambda)}$ として、σ で置換させればよい。

$$= \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{\sigma \in G^{(\lambda)}} b_{\sigma(\alpha_1^{(\lambda)}) \alpha_1^{(\nu)}} \cdots b_{\sigma(\alpha_r^{(\lambda)}) \alpha_r^{(\nu)}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)} \sigma(\alpha_1^{(\lambda)})} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\mu)} \sigma(\alpha_r^{(\lambda)})} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)} \sigma(\alpha_1^{(\lambda)})} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\mu)} \sigma(\alpha_r^{(\lambda)})} \\ & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)} \sigma(\alpha_1^{(\lambda)})} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\mu)} \sigma(\alpha_r^{(\lambda)})} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{\sigma \in G^{(\lambda)}} b_{\alpha_1^{(\lambda)} \sigma(\alpha_1^{(\nu)})} \cdots b_{\alpha_r^{(\lambda)} \sigma(\alpha_r^{(\nu)})} \, \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \\ & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{N} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \\ & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \end{vmatrix} \sum_{\sigma \in G^{(\lambda)}} \varepsilon(\sigma) \, b_{\sigma(\alpha_1^{(\lambda)}) \alpha_1^{(\nu)}} \cdots b_{\sigma(\alpha_r^{(\lambda)}) \alpha_r^{(\nu)}}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{N} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_1^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \\ a_{\alpha_2^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_2^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \\ & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(\mu)} \alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_r^{(\mu)} \alpha_r^{(\lambda)}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1^{(\lambda)} \alpha_1^{(\nu)}} & \cdots & b_{\alpha_1^{(\lambda)} \alpha_r^{(\nu)}} \\ b_{\alpha_2^{(\lambda)} \alpha_1^{(\nu)}} & \cdots & b_{\alpha_2^{(\lambda)} \alpha_r^{(\nu)}} \\ & \cdots & \\ b_{\alpha_r^{(\lambda)} \alpha_1^{(\nu)}} & \cdots & b_{\alpha_r^{(\lambda)} \alpha_r^{(\nu)}} \end{vmatrix}$$

$= \sum_{\lambda=1}^{N} |A_{\mu\lambda}{}^{(r)}||B_{\lambda\nu}{}^{(r)}|$

よって、$C_r(C) = C_r(A)\,C_r(B) \quad \to \; |C_r(C)| = |C_r(A)||C_r(B)|$ となったので

$f(X) = |C_r(X)| = |X|^k$

$C_r(X)$ は、成分 $|X_{\mu\lambda}{}^{(r)}|$ の次数が r で、それのN 次正方行列なので rN 次、つまり、$rN = r \cdot {}_n\mathrm{C}_r$ 次となる。

$|X|^k$ の次数は $|X|$ が n 次なので、kn 次となる。

$$rN = kn \;\to\; k = \frac{rN}{n} = \frac{r}{n} \times \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

(P.73 の r - ベクトルについて)

$A = (a_{ij})$ は n 次正方行列、$r < n$ として、$1, 2, \cdots, n$ から r 個とりだす組合わせ(全部で、$N = {}_n\mathrm{C}_r$ 個ある)に適当に順番をつけ、$\alpha^{(i)} = \{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \cdots, \alpha_r^{(i)}\}$ $(1 \leqq i, \lambda \leqq N)$ とする。

そして、A から 第 $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \cdots, \alpha_r^{(i)}$ 行、第 $\alpha_1^{(\lambda)}, \alpha_2^{(\lambda)}, \cdots, \alpha_r^{(\nu)}$ 列をとりだして作った r 次小行列式を $|A_{i\lambda}{}^{(r)}|$ とかき、それらを (i, λ) 成分とする

N 次正方行列を $C_r(A) = (|A_{i\lambda}{}^{(r)}|)$ とおく。

$$|A_{i\lambda}{}^{(r)}| = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(i)}\alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_1^{(i)}\alpha_r^{(\lambda)}} \\ & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(i)}\alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_r^{(i)}\alpha_r^{(\lambda)}} \end{vmatrix}$$

r 個の n 次元ベクトル

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, x_r = \begin{pmatrix} x_{1r} \\ \vdots \\ x_{nr} \end{pmatrix}$$ に対し

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} \\ \cdots \\ a_{n1}x_{11} + \cdots + a_{nn}x_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, Ax_r = \begin{pmatrix} a_{11}x_{1r} + \cdots + a_{1n}x_{nr} \\ \cdots \\ a_{n1}x_{11} + \cdots + a_{nn}x_{nr} \end{pmatrix}$$

をつくる。これらも r 個の n 次元ベクトルである。

$1, 2, \cdots, n$ から r 個とりだす組合わせ(全部で、$N = {}_n\mathrm{C}_r$ 個ある)に適当に順番をつけ、

$\alpha^{(i)} = \{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \cdots, \alpha_r^{(i)}\}$ $(1 \leqq i \leqq N)$ とする。r 個の n 次元ベクトル $x_j = (x_{ij})$ $(1 \leqq j \leqq r)$ に対し

$\begin{vmatrix} x_{\alpha_1^{(i)}1} & \cdots & x_{\alpha_1^{(i)}1} \\ & \cdots & \\ x_{\alpha_r^{(i)}1} & \cdots & x_{\alpha_r^{(i)}r} \end{vmatrix}$ を第 i 成分とする N 次元ベクトルを r - ベクトルといい

$|\, \boldsymbol{x}_1 , \boldsymbol{x}_2 , \cdots , \boldsymbol{x}_r \,|$ と書くという決まりだった。ややこしいので $X = (X_1 , \cdots , X_r)$ の (n , r) 行列にする。

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11}+\cdots+a_{1n}x_{n1} & \cdots & a_{11}x_{1r}+\cdots+a_{1n}x_{nr} \\ a_{21}x_{11}+\cdots+a_{2n}x_{n1} & \cdots & a_{21}x_{1r}+\cdots+a_{2n}x_{nr} \\ & \cdots & \\ a_{n1}x_{11}+\cdots+a_{nn}x_{n1} & \cdots & a_{n1}x_{11}+\cdots+a_{nn}x_{nr} \end{pmatrix} \leftarrow (n , r) \text{行列}$$

$|\, A\boldsymbol{x}_1 , A\boldsymbol{x}_2 , \cdots , A\boldsymbol{x}_r \,|$ の第 i 成分は、$\alpha^{(i)} = \{ \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \cdots , \alpha_r^{(i)} \}$ $(1 \leqq i \leqq N)$ に対して

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(i)}1}x_{11}+a_{\alpha_1^{(i)}2}x_{21}\cdots+a_{\alpha_1^{(i)}n}x_{n1} & ,\cdots, & a_{\alpha_1^{(i)}1}x_{1r}+a_{\alpha_1^{(i)}2}x_{2r}\cdots+a_{\alpha_1^{(i)}n}x_{nr} \\ a_{\alpha_2^{(i)}1}x_{11}+a_{\alpha_2^{(i)}2}x_{21}\cdots+a_{\alpha_2^{(i)}n}x_{n1} & ,\cdots, & a_{\alpha_2^{(i)}1}x_{1r}+a_{\alpha_2^{(i)}2}x_{2r}\cdots+a_{\alpha_2^{(i)}n}x_{nr} \\ & ,\cdots, & \\ a_{\alpha_r^{(i)}1}x_{11}+a_{\alpha_r^{(i)}2}x_{21}\cdots+a_{\alpha_r^{(i)}n}x_{n1} & ,\cdots, & a_{\alpha_r^{(i)}1}x_{1r}+a_{\alpha_r^{(i)}2}x_{2r}\cdots+a_{\alpha_r^{(i)}n}x_{nr} \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_{\alpha_1^{(i)}1} & a_{\alpha_1^{(i)}2} & \cdots & a_{\alpha_1^{(i)}n} \\ a_{\alpha_2^{(i)}1} & a_{\alpha_2^{(i)}2} & \cdots & a_{\alpha_2^{(i)}n} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(i)}1} & a_{\alpha_r^{(i)}2} & \cdots & a_{\alpha_r^{(i)}n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ & & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nr} \end{pmatrix} \right|$$

$r < n$ であり
定理9．2より

$$= \sum_{\lambda=1}^{N} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1^{(i)}\alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_1^{(i)}\alpha_\gamma^{(\lambda)}} \\ & \cdots & \\ a_{\alpha_r^{(i)}\alpha_1^{(\lambda)}} & \cdots & a_{\alpha_r^{(i)}\alpha_r^{(\lambda)}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\alpha_1^{(\lambda)}1} & \cdots & x_{\alpha_1^{(\lambda)}r} \\ & \cdots & \\ x_{\alpha_r^{(\lambda)}1} & \cdots & x_{\alpha_r^{(\lambda)}r} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{N} |\, A_{i\lambda}^{(r)} \,| \begin{vmatrix} x_{\alpha_1^{(\lambda)}1} & \cdots & x_{\alpha_1^{(\lambda)}r} \\ & \cdots & \\ x_{\alpha_r^{(\lambda)}1} & \cdots & x_{\alpha_r^{(\lambda)}r} \end{vmatrix} = C_r(A) |\, \boldsymbol{x}_1 , \cdots , \boldsymbol{x}_r \,| \text{ の } i \text{ 成分}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ C_r(A)}}{\begin{pmatrix} |A_{1\,1}^{(r)}| & |A_{1\,2}^{(r)}| & \cdots & |A_{1N}^{(r)}| \\ & & \cdots & \\ |A_{i\,1}^{(r)}| & |A_{i\,2}^{(r)}| & \cdots & |A_{i\,N}^{(r)}| \\ & & \cdots & \\ |A_{N\,1}^{(r)}| & |A_{N\,2}^{(r)}| & \cdots & |A_{NN}^{(r)}| \end{pmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ |\, \boldsymbol{x}_1 , \cdots , \boldsymbol{x}_r \,|}}{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_{\alpha_1^{(1)}1} & \cdots & x_{\alpha_1^{(1)}r} \\ & \cdots & \\ x_{\alpha_r^{(1)}1} & \cdots & x_{\alpha_r^{(1)}r} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \begin{vmatrix} x_{\alpha_1^{(N)}1} & \cdots & x_{\alpha_1^{(N)}r} \\ & \cdots & \\ x_{\alpha_r^{(N)}1} & \cdots & x_{\alpha_r^{(N)}r} \end{vmatrix} \end{pmatrix}}$$

（P．84　例2）できるだけ！

n 個の変数、$x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ に一次変換：$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j$ ($1 \leqq i \leqq n$) を施す。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_j \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n \\ \vdots \\ a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \cdots + a_{in}x'_n \\ \vdots \\ a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \cdots + a_{nn}x'_n \end{pmatrix}$$

x_i ($1 \leqq i \leqq n$) から作られる r 次の単項式とは

(例) $x_i^r , x_1x_2 \cdots x_r , x_1^{r-2}x_2^2 , \cdots$

仮に、$n = 6 , r = 5$ としたら ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = {}_{10}\mathrm{C}_5 = 252$

${}_6\mathrm{C}_5 \times {}_4\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_0 = 252$

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 & \xrightarrow{\text{①}} & x_2 & \xrightarrow{\text{②}} & x_3 & \xrightarrow{\text{③}} & x_4 & \xrightarrow{\text{④}} & x_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{①} & & \\ x_1 & \rightarrow & x_2 & \rightarrow & x_3 & \rightarrow & x_4 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{②} & & & & \\ x_1 & \rightarrow & x_2 & \rightarrow & x_3 & & & & \\ \downarrow & & \downarrow \text{③} & & & & & & \\ x_1 & \rightarrow & x_2 & & & & & & \\ \downarrow \text{④} & & & & & & & & \\ x_1 & & & & & & & & \end{array}$$

${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \rightarrow$ 6文字の中から3文字選ぶ

組合わせ×横2、縦2の x_1 から x_3 まで

進む経路の数 ${}_{2+2}\mathrm{C}_2$

一般に

${}_n\mathrm{C}_r \times {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_{r-1} \times {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-2} + {}_n\mathrm{C}_{r-2} \times {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-3} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{r-1}\mathrm{C}_0$

$= \sum_{k=0}^{r-1} {}_n\mathrm{C}_{r-k} \times {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-k-1}$ ← *Vandermonde* の畳み込み？

やはり後にまわす。

（P．88　行列式の微分）

$$\frac{d}{dx}|A(x)| = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ & & \cdots & \\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \cdots & a'_{kn}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kn}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ & & \cdots & \\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \cdots & a'_{kn}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kn}(x) \\ & & \cdots & \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \cdots + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a'_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \cdots +$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a'_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

次に進む前に準備（これが苦手）

（ｉ）

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j}b_{1j} + a_{2j}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{ij} + \cdots + a_{nj}b_{nj}\right)$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + \cdots + a_{i1}b_{i1} + \cdots + a_{n1}b_{n1}$$

$$+ a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{i2}b_{i2} + \cdots + a_{n2}b_{n2}$$

$$+ \cdots$$

$$+ a_{1j}b_{1j} + a_{2j}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{ij} + \cdots + a_{nj}b_{nj}$$

$$+ \cdots$$

$$+ a_{1n}b_{1n} + a_{2n}b_{2n} + \cdots + a_{in}b_{in} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + \cdots + a_{ij}b_{ij} + \cdots + a_{in}b_{in}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right)$$

もっと直感的にわかる良い証明はないだろうか？

（ⅱ）

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ji}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki}\right)$$

$$=\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i\ell}b_{i\ell}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right)$$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} x_i y_j z_k=(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_m)(z_1+\cdots+z_\ell)$ とみれば、$\sum$ する順番は関係ないのかもしれないが、複雑に添字が付くと心配になる。

$$\frac{d}{dx}|A(x)|=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ & & \cdots & \\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \cdots & a'_{kn}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$ の右辺の (i, j) 余因子を Δ_{ij} とおけば

右辺は $=\sum_{k=1}^{n}\left(a'_{k1}(x)\Delta_{k1}+\cdots+a'_{kn}(x)\Delta_{kn}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\Delta_{ij}\,a'_{ij}(x)$

$A(x)\neq 0$ のとき、$A(x)^{-1}=\frac{1}{|A(x)|}(\Delta_{ji})$ ← ij ではなく ji（定理 6）

$$A(x)^{-1}\frac{d}{dx}A(x)=\frac{1}{|A(x)|}(\Delta_{ji})\frac{d}{dx}A(x)=\frac{1}{|A(x)|}(\Delta_{ji})\begin{pmatrix} a'_{11}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ & \cdots & \\ a'_{n1}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

ここで、煩わしいので、$(\Delta_{ji})=B=(b_{ij})$ とおく

よって、$A(x)^{-1}\frac{d}{dx}A(x)$ の (i, j) 成分は

$\frac{1}{|A(x)|}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a'_{kj}(x)=\frac{1}{|A(x)|}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{ki}a'_{kj}(x)$ ← $b_{ik}=\Delta_{ki}$ になることに注意

$$tr\left(A(x)^{-1}\frac{d}{dx}A(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{|A(x)|}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{ki}a'_{ki}(x)\right)=\frac{1}{|A(x)|}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta_{ki}a'_{ki}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{|A(x)|}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ji}a'_{ji}(x)\right)$$

$=\frac{1}{|A(x)|}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}a'_{ij}(x)\right)$ ←（ⅰ）、（ⅱ）より

$$=\frac{1}{|A(x)|}\cdot\frac{d}{dx}|A(x)|$$

$$\frac{1}{|A(x)|}\cdot\frac{d}{dx}|A(x)|=tr\left(A(x)^{-1}\frac{d}{dx}A(x)\right)$$

記号的に？ でも認めたとして

(1)’ $$\frac{d\,|\,A(x)\,|}{|\,A(x)\,|} = tr\,(\,A(x)^{-1}\,dA(x)\,)$$

$A(x) = exp\ xA$ とすれば、P. 37（5）より

$$\frac{d}{dx}A(x) = A(x)A \quad \to \quad d\,A(x) = A(x)A\,dx$$ よって、(1)’ から

$$\frac{d|\,exp\ xA\,|}{|\,exp\ xA\,|} = tr\,(\,A(x)^{-1}A(x)A\,dx\,) = tr\,(\,Adx\,) = tr\,(\,A\,)\,dx \quad \leftarrow dx$$ はスカラー

そこで変数分離型なので、$y = |\,exp\ xA\,|$ とすれば

$$\frac{1}{y}dy = tr\,(\,A\,)\,dx$$

$$\ell og\,|\,y\,| = tr\,(\,A\,)x + C'$$

$$y = e^{C'}e^{tr\,(\,A\,)x}$$

$$|\,exp\ xA\,| = Ce^{tr\,(\,A\,)x}$$ （C : 定数）

$exp\,(\,aE\,) = e^{a}E$ だったので、$x = 0$ のとき、左辺は 1 、よって、$C = 1$ となる。

$x = 1$ のとき

$|\,exp\ A\,| = e^{tr(\,A\,)}$ という関係式を得る。特に、$|\,exp\ A\,| = 1 \ \Leftrightarrow\ tr(\,A\,) = 0$