（P. 158　対称行列の標準化）

内積を$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$とする。

対称行列：${}^tA = A$　　$\to (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$

交代行列：${}^tA = -A$　$\to (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, -A\boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$

任意のn次正方行列に対し

(*)　$B = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA) \to {}^tB = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA) = B$　よって、Bは対称行列となる。

$C = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA) \to {}^tC = \dfrac{1}{2}({}^tA - A) = -C$　よって、Cは交代行列となる。

$A = B + C$

したがって、任意の行列は対称行列と交代行列の和に分解できる。

逆に、$A = B' + C'$（B'は対称行列、C'は交代行列）とすると${}^tA = {}^tB' + {}^tC' = B' - C'$

(*) に代入すると

$B = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA) = \dfrac{1}{2}(2B') = B'$，$C = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{2}(2C') = C'$

つまり、上記の様な分解は一意的であるといえる。

（P. 159　問1）

①　n次実対称行列全体はベクトル空間を作る。

②　n次実交代行列全体はベクトル空間を作る。

（証明）①

任意の対称行列B, Cに対し、${}^t(\alpha B + \beta C) = \alpha\,{}^tB + \beta\,{}^tC = \alpha B + \beta C$、よって、ベクトル空間となる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad \text{したがって、} \frac{1}{2}(n^2 - n) + n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{次元}$$

②

任意の交代行列B, Cに対し、${}^t(\alpha B + \beta C) = \alpha\,{}^tB + \beta\,{}^tC = -\alpha B - \beta C = -(\alpha B + \beta C)$

よって、ベクトル空間となる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (a_{ij} = -a_{ji}) \quad a_{ii} + a_{ii} = 0 \to a_{ii} = 0,\ \frac{1}{2}n(n-1) \text{次元}$$

（P. 159　問2）

A_1, A_2 を対称行列とするとき、

A_1A_2 : 対称行列 $\Leftrightarrow$ A_1, A_2 : 交換可能

（証明） $\Rightarrow$) $A_1A_2 = {}^t(A_1A_2) = {}^tA_2{}^tA_1 = A_2A_1$

$\Leftarrow$) $A_1A_2 = A_2A_1 \rightarrow {}^t(A_1A_2) = {}^t(A_2A_1) \rightarrow {}^tA_2{}^tA_1 = A_2A_1 = {}^t(A_2A_1)$

（P. 159　A が実対称行列ならば対角化可能）

$n = 1$ のときは、$Ax = [a]x$ とすれば、$[a]x = ax$ なので直交行列として $P = [1]$ をとれば、$P^{-1} = [1]$ なので $P^{-1}AP = [1][a][1] = [a]$ 、固有値を a として対角行列になる。よって n に関する帰納法で証明する。

α_1 を A の1つの固有値とし、x_1 をそれに対する固有ベクトルとする。$\{\{x_1\}\}$ の直交補空間を W_1 とすれば、$x \in W_1$ に対し

$(x_1, Ax) = (Ax_1, x) = (\alpha_1 x_1, x) = \alpha_1(x_1, x) = 0$

よって、$Ax \in W_1$　すなわち、W_1 は A - 不変である。

今、正規直交底 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ を $\{\{e_1'\}\} = \{\{x_1\}\}$, $W_1 = \{\{e_2', \cdots, e_n'\}\}$ となるようにとる。この底に関して A を表現する行列を A' とすれば

$$A(e_1', e_2', \cdots, e_n') = (e_1', e_2', \cdots, e_n')\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & & * \\ 0 & & A'_1 & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & & * \\ 0 & & A'_1 & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix}$$

$e_1', e_2', \cdots, e_n'$ を列ベクトルとする行列を T_1 とおけば、T_1 は直交行列（P. 129参）なので

$A' = T_1^{-1}AT_1 = {}^tT_1AT_1$

よって、${}^tA' = {}^t({}^tT_1AT_1) = {}^tT_1{}^tA{}^{tt}T_1 = {}^tT_1AT_1 = A'$ となり、A' は対称行列であり、A'_1 も対称行列となる。よって、帰納法の仮定から、A'_1 は対角化可能であって、ある $(n-1)$ 次直交行列 T_2' があって、$T_2'^{-1}A'_1T_2'$ は対角行列になる。故に

$T = T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}$ とすれば

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}^{-1} T_1^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}^{-1} T_1^{-1}(T_1A'T_1^{-1})T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{E}_{n-1}\end{pmatrix} = \boldsymbol{E} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'^{-1}\end{pmatrix}$$ なので

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}'_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'^{-1}\boldsymbol{A}'_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'^{-1}\boldsymbol{A}'_1\boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix}$$

は対角行列となり、P. 146の例4から固有値を対角成分とする行列に相似になる。また、

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix}$ は直交行列であって、${}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{T} = {}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix}{}^t\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{T_2}'\end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$ なので、$\boldsymbol{T}$ も直交行列となる。

（P. 160　注意）

$\boldsymbol{A}$ が複素対称行列の場合、α_1 を $\boldsymbol{A}$ の1つの固有値とし、その固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする。

$\{\{\boldsymbol{x}_1\}\}^{\perp} = \boldsymbol{W}_1$ とすれば、$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_1$ に対し

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_u = (\boldsymbol{x}_1, \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}) = {}^t\boldsymbol{x}_1\overline{\alpha_1\boldsymbol{x}} = \overline{\alpha_1}\,{}^t\boldsymbol{x}_1\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\alpha_1}(\boldsymbol{x}_1, \overline{\boldsymbol{x}}) = \overline{\alpha_1}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x})_u = 0$$

したがって、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_1$ となり、$\boldsymbol{A}$ − 不変である。

しかし、$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1+i\\ 1-i\\ 1+i\\ 1-i\end{pmatrix} \rightarrow (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = (1+i)(1+i)+(1-i)(1-i)+(1+i)(1+i)+(1-i)(1-i)$

$= 1+2i-1+1-2i-1+1+2i-1+1-2i-1 = 0$

$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)_u$ なら問題ないが、行列の列と行の積のように、実行列なら内積で置き換えることができるが複素数の場合はそのようにはいかないので注意が必要である。

（例）

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)_u = (1 \quad i)\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix} = -i+i = 0$

${}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} \rightarrow {}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2i\\ 2i & 0\end{pmatrix} \neq \boldsymbol{E}$

（P. 160　定理 4’）

P. 146の例 4 から $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}_{\alpha_1} \dotplus \cdots \dotplus \boldsymbol{W}_{\alpha_s}$ と直和分解され、$\boldsymbol{T}$ の列ベクトルを $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ とすれば、$\boldsymbol{W}_{\alpha_i}$ の底として、$\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ の中から重複度個選ぶことができる。よって、異なる固有空間は直交する。*) については何を前提としているか不明である。

（P. 161　問3 (1)）

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = \lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4 = (\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$$

固有値は 1（重解）, 4

$$(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \to x+y+z=0 \to \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\alpha-\beta\end{pmatrix}$$

$\to \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\to \boldsymbol{t}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とする。シュミットの直交化法で

$\boldsymbol{t}_2=\dfrac{\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{t}_1}{\|\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{t}_1\|}$ とすればよいので、$\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{t}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+1^2+(-\frac{1}{2})^2}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right),\quad \boldsymbol{t}_2=\frac{\sqrt{6}}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{4}\\\frac{\sqrt{6}}{2}\\-\frac{\sqrt{6}}{4}\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\to \boldsymbol{t}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{6}}{2}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}&0&\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\\\frac{-2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}&\frac{4}{3\sqrt{6}}&\frac{-2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}\\\frac{1}{3}\sqrt{3}&\frac{1}{3}\sqrt{3}&\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}&0&\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\\\frac{-2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}&\frac{4}{3\sqrt{6}}&\frac{-2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}\\\frac{1}{3}\sqrt{3}&\frac{1}{3}\sqrt{3}&\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{6}}{2}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

（P. 161 例1）

$\boldsymbol{A}$ を固有値がすべて実数であるような n 次実行列とする。$\boldsymbol{A}$ に対し、適当な n 次直交行列 $\boldsymbol{T}$ をとれば

(25) $$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\alpha_1&*&\cdots&*\\0&\alpha_2&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&\alpha_n\end{pmatrix}$$

のように三角行列に変換できる。(ただし、固有値は重複もこめて n 個あるものとする。)

(証明)定理4の証明と同様に n に関する帰納法で証明する。$n=1$ のときは明らかである。

α_1 を A の1つの実固有値とし、その実固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする。$\boldsymbol{e}_1' = \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}$ とおけば $\{\{\boldsymbol{x}_1\}\} = \{\{\boldsymbol{e}_1'\}\}$ となる。また、それを延長して $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n'\}$ を V^n の正規直交底を作る。$\boldsymbol{T}_1 = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n')$ とすれば、$\boldsymbol{T}_1$ は直交行列であるが、$\boldsymbol{W}_1 = \{\{\boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n'\}\}$ は A - 不変とは限らない。

なぜなら、$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_1$ に対し、$(\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}) = ({}^tA\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) \neq (\alpha_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) = 0$ したがって、$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_1$ といえない。つまり、0 にならない。

$$A\boldsymbol{T}_1 = A(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n') = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n')\begin{pmatrix} \alpha_1 & \boxed{* \quad \cdots \quad *} \\ 0 & * \qquad\quad * \\ \vdots & A_1 \\ 0 & * \qquad\quad * \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}A\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix} = A'$$

となる。A の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすれば、$f_A(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ $= (x-\alpha_1)f_{A_1}(x)$ なので、$f_{A_1}(x) = (x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ となり、A_1 の固有値は $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ となる。よって帰納法の仮定により、$(n-1)$ 次直交行列 $\boldsymbol{T}_2'$ があって

$$\boldsymbol{T}_2'^{-1}A_1\boldsymbol{T}_2' = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

よって、$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}$ とすれば、$\boldsymbol{T}$ は直交行列であり $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{T}_1^{-1}$

$$\boldsymbol{T}^{-1}A\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{T}_1^{-1}A\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{T}_1^{-1}(\boldsymbol{T}_1A'\boldsymbol{T}_1^{-1})\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2'^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & \boldsymbol{T}_2'^{-1}A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & \boldsymbol{T}_2'^{-1}A'_1\boldsymbol{T}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる。

(注意)

上記の証明で、A が対称行列なら ${}^t(T^{-1}AT) = {}^t({}^tT\,AT) = {}^tTAT = T^{-1}AT$ よって、$T^{-1}AT$ は対称行列となる。

つまり、上の証明から $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

対称なので

また、定理3を使うと、任意の n 次正方行列に対し、適当な n 次正則行列 P をとれば

(21) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & 0 \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A^{(s)} \end{pmatrix}$, $A^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{pmatrix}$

とすることができるので、P. 101の*Schmidt* の直交化法からわかる「任意の正則行列は直交行列と正則な上三角行列の積に分解できる。」に応用すれば

$P = TS$ (T : 直交行列 , S : 上三角行列) として代入すると

$(TS)^{-1}ATS = S^{-1}T^{-1}ATS = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \rightarrow T^{-1}AT = S\begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}S^{-1}$

P. 15から、上三角行列の逆行列は上三角行列であって、対角成分の計算は $s_{ii} \times \alpha_i \times \dfrac{1}{s_{ii}}$ となって、 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ となる。

逆は難しそうなのでやめる。

(P. 162　例2)

準備として、$A_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$ として、$(\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})(\beta_i\delta_{ij})(\delta_{i,\sigma(j)}) = (\beta_{\sigma(i)}\delta_{i,j})$ を証明する。

$$A_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}) = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{1,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{1,\sigma(n)} \\ \delta_{i,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{i,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{i,\sigma(n)} \\ \delta_{n,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{n,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{n,\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

← どの列も一ヶ所だけ 1 でその場所は入れ違うので直交行列である。

$$A_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}) = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{1,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{1,\sigma^{-1}(n)} \\ \delta_{i,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{i,\sigma^{-1}(n)} \\ \delta_{n,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{n,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{n,\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

$$A_\sigma A_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{1,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{1,\sigma(n)} \\ \delta_{i,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{i,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{i,\sigma(n)} \\ \delta_{n,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{n,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{n,\sigma(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{1,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{1,\sigma^{-1}(n)} \\ \delta_{i,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{i,\sigma^{-1}(n)} \\ \delta_{n,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{n,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{n,\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

したがって、(i, j) 成分は

$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma^{-1}(j)}$ の値は、最初に左側の因子を見て

$i = j$ のとき $i = \sigma(k)$ となる項だけが1つ残り、$\sigma^{-1}(i) = k$ なので、$\delta_{k,\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} = 1$

$i \neq j$ のとき $i = \sigma(k)$ となる項だけが1つ残り、$\sigma^{-1}(i) = k$ なので、$\delta_{k,\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} = 0$

まとめると、$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma^{-1}(j)} = \delta_{i,j}$ つまり、$(A_\sigma)^{-1} = {}^t(A_\sigma) = A_{\sigma^{-1}}$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & & & 0 \\ & \beta_2 & & & \\ & & \beta_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{1,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{1,\sigma(n)} \\ \delta_{i,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{i,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{i,\sigma(n)} \\ \delta_{n,\sigma(1)} & \cdots & \delta_{n,\sigma(j)} & \cdots & \delta_{n,\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1\delta_{1,\sigma(1)} & \cdots & \beta_1\delta_{1,\sigma(j)} & \cdots & \beta_1\delta_{1,\sigma(n)} \\ \beta_i\delta_{i,\sigma(1)} & \cdots & \beta_i\delta_{i,\sigma(j)} & \cdots & \beta_i\delta_{i,\sigma(n)} \\ \beta_n\delta_{n,\sigma(1)} & \cdots & \beta_n\delta_{n,\sigma(j)} & \cdots & \beta_n\delta_{n,\sigma(n)} \end{pmatrix} = (\beta_i\delta_{i,\sigma(j)}) = BA_\sigma \text{ とおく}$$

$$A_{\sigma^{-1}}BA_\sigma = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{1,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{1,\sigma^{-1}(n)} \\ \delta_{i,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{i,\sigma^{-1}(n)} \\ \delta_{n,\sigma^{-1}(1)} & \cdots & \delta_{n,\sigma^{-1}(j)} & \cdots & \delta_{n,\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1\delta_{1,\sigma(1)} & \cdots & \beta_1\delta_{1,\sigma(j)} & \cdots & \beta_1\delta_{1,\sigma(n)} \\ \beta_i\delta_{i,\sigma(1)} & \cdots & \beta_i\delta_{i,\sigma(j)} & \cdots & \beta_i\delta_{i,\sigma(n)} \\ \beta_n\delta_{n,\sigma(1)} & \cdots & \beta_n\delta_{n,\sigma(j)} & \cdots & \beta_n\delta_{n,\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

したがって、(i, j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma^{-1}(k)}\beta_k\delta_{k,\sigma(j)}$、その値は、最初に右側の因子を見て

$i = j$ ならば $\sigma(j) = k$ となる項が1つのこる。そこでは $\sigma^{-1}(k) = j = i$ から $= \beta_{\sigma(i)}$ となる。

$i \neq j$ ならば $\sigma(j) = k$ となる項が1つのこる。そこでは $\sigma^{-1}(k) = j \neq i$ から $= 0$ となる。

まとめると、$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma^{-1}(k)}\beta_k\delta_{k,\sigma(j)} = \beta_{\sigma(i)}\delta_{i,j}$ と表現できる。

（練習）$b, e, a, c, d \rightarrow a, b, c, d, e$ の準にしてみると

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$ → 1番目に3番を、2番目に1番を、3番目に4番を、4番目に5番を

5番目に2番を移動したいので、$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{pmatrix}$$

$A_\sigma=(\delta_{i,\sigma(j)})$, $A_{\sigma^{-1}}=(\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})$

$$A_\sigma=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\ A_{\sigma^{-1}}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\quad\cdots\quad {}^t(A_\sigma)=A_{\sigma^{-1}}$$ になっている。

$$A_\sigma A_{\sigma^{-1}}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$$A_{\sigma^{-1}}AA_\sigma=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0&0&0&0\\0&e&0&0&0\\0&0&a&0&0\\0&0&0&c&0\\0&0&0&0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&a&0&0\\b&0&0&0&0\\0&0&0&c&0\\0&0&0&0&d\\0&e&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0&0&0\\0&b&0&0&0\\0&0&c&0&0\\0&0&0&d&0\\0&0&0&0&e\end{pmatrix}$$

（証明）${}^tAA$ は対称行列だから、定理4により、適当な直交行列 T_2 があって

$${}^tT_2{}^tAAT_2=\begin{pmatrix}\beta_1&&0\\&\ddots&\\0&&\beta_n\end{pmatrix}$$

となる。β_i は ${}^tAA$ の固有値である。しかし、$\beta_i=0$ の場合があるので、上の A_σ（直交行列）を使い

$${}^tA_\sigma{}^tT_2{}^tAAT_2A_\sigma=\begin{pmatrix}\beta_{\sigma(1)}&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&\beta_{\sigma(r)}&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}$$

簡単にするために $T_2A_\sigma\to T_2$ とし、固有値の順番も $\beta_{\sigma(r)}\to\beta_r$ としても問題ないので

$${}^tT_2{}^tAAT_2=\begin{pmatrix}\beta_1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&\beta_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}$$

と仕切り直しても問題ない。

AT_2 の列ベクトルを $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{t}_n$ とすれば、

$$ {}^t T_2 {}^t A A T_2 = {}^t(AT_2)(AT_2) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{t}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{t}_1 , \boldsymbol{t}_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\boldsymbol{t}_n , \boldsymbol{t}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \beta_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

上式から $(\boldsymbol{t}_i , \boldsymbol{t}_j) = \beta_i \delta_{ij}$

よって、$(\boldsymbol{t}_i , \boldsymbol{t}_i) = \beta_i \rightarrow \|\boldsymbol{t}_i\| = \sqrt{\beta_i} = \gamma_i$ なので、$\dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1}$, $\dfrac{\boldsymbol{t}_2}{\gamma_2}$, $\cdots$, $\dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r}$ は正規直交系をなし

$\boldsymbol{t}_i = 0$ ($r+1 \leqq i \leqq n$) となる。

そこで、$\dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1}$, $\dfrac{\boldsymbol{t}_2}{\gamma_2}$, $\cdots$, $\dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r}$ を第1～第 r 行ベクトルとするような n 次直交行列を T_1 とすれば、

$$ T_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad T_1 A T_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

ただし、T_1 の各行ベクトルは直交するが、$T_1 {}^t T_1 = E_{(r)}$ となってしまうので直交行列と呼んでよいか疑問である。

(P. 162　注意)

A を (m , n) 行列とすれば、ある m 次直交行列 T_1 , n 次直交行列 T_2 があって

$$ T_1 A T_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

ただし、${}^t AA$ の階数を r とし、その 0 でない固有値を γ_1^2 , γ_2^2 , $\cdots$, γ_r^2 とする。

(証明) A は (m , n) 行列なので ${}^t A$ は (n , m) 行列となり、${}^t AA$ は (n , n) 行列となる。また、${}^t({}^t AA) = {}^t AA$ なので、${}^t AA$ は対称行列である。よって、定理4により、ある n 次直交行列 T_2 があって

$$ {}^t T_2 {}^t A A T_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} $$

(注意) AT_2 は (m , n) 行列である.

${}^t AA$ の $\boldsymbol{x}$ を β_i に関する n 次固有ベクトルとした場合、$A\boldsymbol{x}$ は m 次ベクトルとなるが、$0 \leqq (A\boldsymbol{x} , A\boldsymbol{x})$

$=\beta_i$ なので上の証明と同様に $\gamma_i^2=\beta_i$ とできる。また、${}^tT_2{}^tAAT_2$ は n 次正方行列なので A_σ を施すことにより、$rank({}^tT_2{}^tAAT_2)=rank({}^tAA)=r\leqq m,n$（P. 110、P113例2 参）であるから

$$ {}^tT_2{}^tAAT_2=\begin{pmatrix}\beta_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \beta_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix} $$

としてよい。次に、AT_2 の m 次列ベクトルを $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ とすれば、

$$ {}^tT_2{}^tAAT_2={}^t(AT_2)(AT_2)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{t}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (\boldsymbol{t}_n,\boldsymbol{t}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \beta_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix} $$

上式から $(\boldsymbol{t}_i,\boldsymbol{t}_j)=\beta_i\delta_{ij}$

よって、$(\boldsymbol{t}_i,\boldsymbol{t}_i)=\beta_i\ \rightarrow\ \|\boldsymbol{t}_i\|=\sqrt{\beta_i}=\gamma_i$ なので、$\dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1},\dfrac{\boldsymbol{t}_2}{\gamma_2},\cdots,\dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r}$ は正規直交系をなし

$\boldsymbol{t}_i=0_i=0\ (r+1\leqq i\leqq n)$ となる。

そこで、$\dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1},\dfrac{\boldsymbol{t}_2}{\gamma_2},\cdots,\dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r}$ を第1～第 r 行ベクトルとするような (m,m) 行列を T_1 とすれば、

$$ T_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r}\\ 0_{r+1}\\ \vdots\\ 0_m\end{pmatrix}\quad \text{から}\quad T_1AT_2=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{t}_1}{\gamma_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\boldsymbol{t}_r}{\gamma_r}\\ 0_{r+1}\\ \vdots\\ 0_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_r & 0_{r+1} & \cdots & 0_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \gamma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix} $$

となり上手くいく。ただし、T_1 は (m,m) 行列であり、各行ベクトルは直交するが、直交行列と呼んでよいかは疑問である。

（P. 162　例3）

準備として、二重帰納法であるが

命題 $P(m,n)$ があって

ｉ）　任意の n に対し、$P(1,n)$ が成り立つ。

ⅱ）　任意の m に対し、$P(m,1)$ が成り立つ。

ⅲ）　$P(m-1,n)$, $P(m,n-1)$ が成り立つと仮定して $P(m,n)$ が成り立つ。

ｉ）、ⅱ）、ⅲ）が成り立つとき、任意の m,n に対し、$P(m,n)$ が成り立つ。

（略証）

任意の n に対して $P(m,n)$ が成り立つという命題を $B(m)$ とおく

$B(1)$ が成り立ち、$B(m-1)$ が成り立つと仮定したとき $B(m)$ が成り立てば、数学的帰納法によって、任意の m に対して $B(m)$ が成り立つ、つまり、任意の m,n に対し、$P(m,n)$ が成り立つ。このことを、ⅰ)、ⅱ)、ⅲ) から導き出せればよい。

まず、ⅰ) から 任意の n に対して $P(1,n)$ が成り立つので $B(1)$ は成り立つ。

次に、$B(m-1)$ が成り立つと仮定する。つまり、任意の n に対して、$P(m-1,n)$ が成り立つと仮定する。ⅱ)から、$P(m,1)$ は成り立つ。$P(m,n-1)$ を仮定すれば、$B(m-1)=P(m-1,n)$ が成り立つと仮定してあったので、ⅲ) から $P(m,n)$ が成り立ち、$B(m)$ が成り立つことになる。***END*** (新数学事典 大阪書籍 参照)

なんだか騙されたようである。そこで私なりの解釈は

座標を (m,n) とする。$1 \leqq m,n$ なので

◇は関係ない。●が成り立つとする。

$m+n-1$ についての従来の数学的帰納法で証明する。

1 のときは

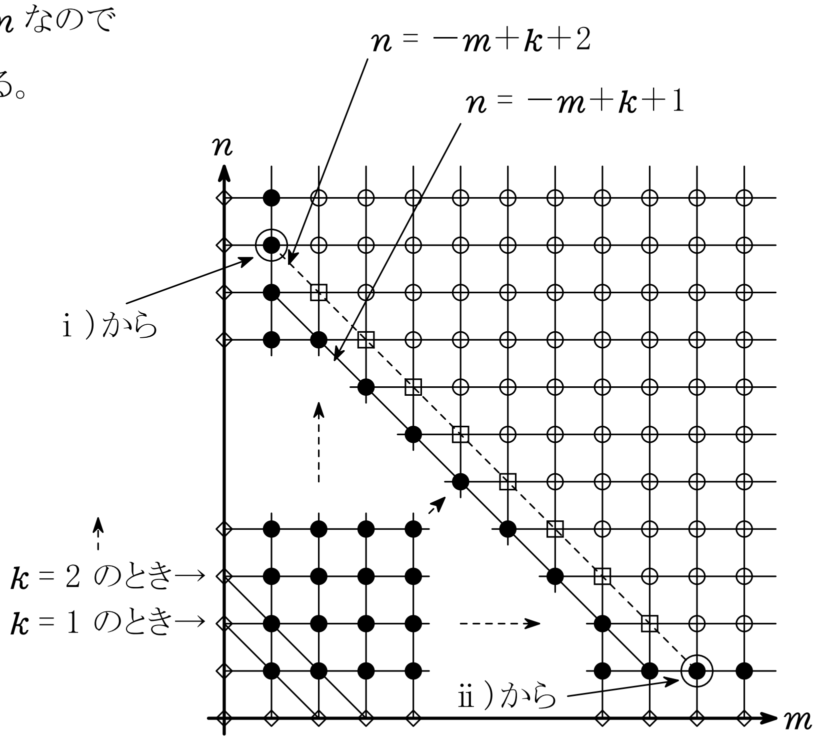
$m+n=2$

$P(1,1)$ はⅰ)、ⅱ)から成り立つ。

k のとき成り立つと仮定する。

$m+n-1=k$

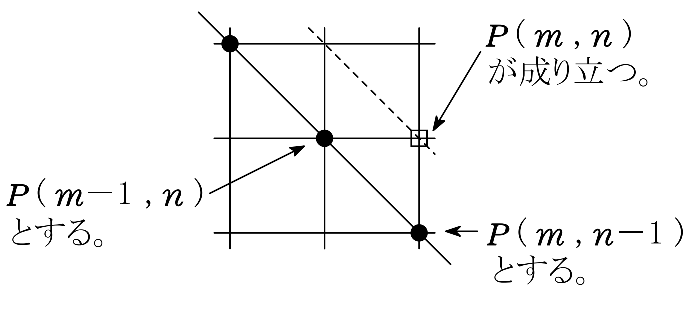
$m+n=k+1$



$P(1,k), P(2,k-1), P(3,k-2), \cdots, P(k-1,2), P(k,1)$ で成り立つ。

ⅲ)から、$P(1,k), P(2,k-1) \to P(2,k)$ で成り立つことになる。順にやっていくと、それらの点を□として、$m+n-1=k+1$ の直線上にのる。 ◉ についてはⅰ)、ⅱ)が必要

右の図で、$(m-1,n), (m,n-1)$ で成り立つと仮定し、(m,n) で成り立つということは点線上の格子点で成り立つことを意味する。つまり、$k+1$ で成り立つことになる。



ⅲ）については、$P(m', n')$（$m' \leqq m, n' \leqq n$，$m'+n' < m+n$）が成り立てば

$P(m, n)$も成立する。と置き換えることができる。実際、

$m'+n'-1 < m+n-1$ なので、$k+1 = m+n-1$ とすれば、$m'+n'-1 < k+1$ なので

最大でも、$m'+n'-1 = k$ となり、上図の点線の下の実線以下の (m', n') となる。

例）a, r を任意の正の整数とするとき、a を最小の数とする r 個の連続する正数の積

$a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1)$

を簡単のため（$a ; r$）で表す。特に（$1 ; r$）$= r!$ と書く。（$a ; r$）は $r!$ で割り切ることができることを証明する。

（証明）r に関する帰納法で証明する。

$r = 1$ の場合は（$a ; 1$）は $1!$ で割り切れるので上の命題を $P(a, r)$ とした場合、$P(a, 1)$ は成り立つ。よって、ⅰ）は OK!

$a = 1$ ならば（$a ; r$）$= r!$ であるから $P(1, r)$ は成り立つ。ⅱ）も OK!

そこで、次の様に式を変形する。

$(a ; r) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-2)(a+r-1)$

$= a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-2)\{r+(a-1)\}$

$= (a-1)a(a+1)\cdots(a+r-2)+ra(a+1)(a+2)\cdots(a+r-2)$

$= (a-1 ; r)+r(a ; r-1)$

ここからは ⅲ）の仮定から

第一項は $r!$ で割り切れる。また、（$a ; r-1$）は $(r-1)!$ で割り切れるから、第二項の $r(a ; r-1)$ も $r!$ で割切れる。したがって、（$a ; r$）は $r!$ で割り切れる。つまり、ⅲ）が成り立つことがわかったので、二重帰納法の原理から、任意の a、r に対し、$P(a, r)$ が成り立つことがわかった。

◎ $A_1, A_2, \cdots, A_m$ を交換可能な（実）対称行列とすれば、ある直交行列 T があって、$T^{-1}A_iT$　（$1 \leqq i \leqq m$）は<u>同時に</u>対角行列になる。

この命題を $P(m, n)$ として、二重帰納法で証明する。

$n = 1$ のときは明らか。また、$m = 1$ のときは定理4から明らか。

つまり $P(1, n)$, $P(m, 1)$ は成り立つ。したがって、m, n に関する二重帰納法で証明する。$m, n > 1$ とする。A_i の固有値を α_i とし、α_i に対する A_i の固有空間を W_{α_i} とする。

ある i に対し、$W_{\alpha_i} = V$ ならば、$W_{\alpha_i} = \{x ; x \in V, (A_i - \alpha_i E)x = 0\} = V$ なので $A_i = \alpha_i E$ となり、任意の直交行列 T に対し、$T^{-1}(\alpha_i E)T = \alpha_i E$ となるので、A_i は除外してもよいこと

になる。この場合は任意の n に対して $P(m-1, n)$ が成り立つと仮定してあるので、A_i が加わっても成立することを意味する。

次に、$W_{\alpha_1} \subsetneq V$（簡単のため $i=1$ とする。）とする。

$x \in W_{\alpha_1}$ ならば、互いに交換可能なので

$A_1A_ix = A_iA_1x = A_i(A_1x) = \alpha_1 A_ix \quad (1 \leqq i \leqq m)$

よって $A_ix \in W_{\alpha_1}$ となる。すなわち、W_{α_1} はすべての A_i $(1 \leqq i \leqq m)$ に関して A_i - 不変である。そのとき、$W_{\alpha_1}^{\perp}$ も A_i - 不変になる。実際、$x' \in W_{\alpha_1}^{\perp}$ とすれば、任意の $x \in W_{\alpha_1}$ に対し、$A_ix \in W_{\alpha_1}$ であるから、$(x, A_ix') = (A_ix, x') = 0$ よって、$A_ix' \in W_{\alpha_1}^{\perp}$ となる。

今、$dim\ W_{\alpha_1} = n_1$ とす、V の正規直交底 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ を $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n_1}$ が W_{α_1} の底になる（従って、$e'_{n_1+1}, \cdots, e'_n$ が $W_{\alpha_1}^{\perp}$ の底になる）ようにとり、$T_1 = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ とおけば、$n_1 < n$ なので

$$A_i(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow A'_i = T_1^{-1}A_iT_1 = \begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

（ただし、$A^{(1)}$ は n_1 次、$A^{(2)}$ は $n-n_1$ 次正方行列である。）

となる。また、$A_iA_j = A_jA_i$ $(1 \leqq i, j \leqq m)$ なので

$$A'_iA'_j = T_1^{-1}A_iT_1T_1^{-1}A_jT_1 = T_1^{-1}A_iA_jT_1 = T_1^{-1}A_jA_iT_1 = T_1^{-1}A_jT_1T_1^{-1}A_iT_1 = A'_jA'_i$$

となり、A'_i も互いに交換可能である。

$$\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_j^{(1)} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^{(1)}A_j^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)}A_j^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^{(1)} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_j^{(1)}A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)}A_i^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow A_i^{(1)}A_j^{(1)} = A_j^{(1)}A_i^{(1)}, \quad A_i^{(2)}A_j^{(2)} = A_j^{(2)}A_i^{(2)}$$

となり、$A_i^{(1)}, A_i^{(2)}$ も互いに交換可能となる。

${}^t(A'_i) = {}^t(T_1^{-1}A_iT_1) = {}^t({}^tT_1A_iT_1) = {}^tT_1{}^tA_iT_1 = T_1^{-1}A_iT_1 = A'_i$ なので、対称行列となる。

つまり、$A_i^{(1)}, A_i^{(2)}$ も対称行列である。

以上の内容は、任意の $m > 1$ で成り立つことなので、$P(0 < n_1 < n, m)$ で成り立つと仮定すれば、n_1 次の直交行列 $T_2^{(1)}$，$(n-n_1)$ 次の直交行列 $T_2^{(2)}$ があって

$T_2^{(1)-1}A_i^{(1)}T_2^{(1)}, T_2^{(2)-1}A_i^{(2)}T_2^{(2)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ は同時に対角行列になる。

よって、$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix}$ とおけば

$${}^t\boldsymbol{T} = {}^t(\ \boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix}) = {}^t\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix}{}^t\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & {}^t\boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix}{}^t\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}_1^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{T}_1^{-1} = (\ \boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix})^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}$$

となり、$\boldsymbol{T}$ は直交行列となる。また、

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix} \quad (1 \leqq \boldsymbol{i} \leqq \boldsymbol{m})$$

$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_i^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_i^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_2^{(1)-1}\boldsymbol{A}_i^{(1)}\boldsymbol{T}_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_2^{(2)-1}\boldsymbol{A}_i^{(2)}\boldsymbol{T}_2^{(2)}\end{pmatrix}$$

したがって、$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{T}$（$1 \leqq \boldsymbol{i} \leqq \boldsymbol{m}$）は $\boldsymbol{T}$ によって同時に対角化される。つまり、$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ が成り立つことがわかった。しかし、この証明は $\boldsymbol{m}$ を固定し、$\boldsymbol{n}$ についてだけの帰納法にすぎないような気がする。二重帰納法の ⅱ’) がどこに隠れているのかが疑問である。

証明に自信がないので次のようにしてもう一度証明する。

◎ $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ を交換可能な（実）対称行列とすれば、ある直交行列 $\boldsymbol{T}$ があって、
$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{T}$ （$1 \leqq \boldsymbol{i} \leqq 2$）は同時に対角行列になる。

この命題を帰納法で証明する。

$\boldsymbol{A}_1$ の固有値を α_1 とし、α_1 に対する $\boldsymbol{A}_1$ の固有空間を $\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ とする。

$\boldsymbol{W}_{\alpha_1} = \boldsymbol{V}$ ならば、$\boldsymbol{W}_{\alpha_1} = \{\ \boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}, (\ \boldsymbol{A}_1 - \alpha_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0\ \} = \boldsymbol{V}$ なので $\boldsymbol{A}_1 = \alpha_1\boldsymbol{E}$ となり、任意の直交行列 $\boldsymbol{T}$ に対し、$\boldsymbol{T}^{-1}(\ \alpha_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{T} = \alpha_1\boldsymbol{E}$ となるので、$\boldsymbol{A}_2$ を対角化する直交行列 $\boldsymbol{T}$ を使えば同時に対角化できる。

よって、$\boldsymbol{W}_{\alpha_1} \subsetneqq \boldsymbol{V}$ とする。

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ ならば、

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_2(\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}\ ) = \alpha_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}$

よって $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ となる。すなわち、$\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ は $\boldsymbol{A}_2$ − 不変である。

そのとき、$\boldsymbol{W}_{\alpha_1}{}^{\perp}$ も $\boldsymbol{A}_2$ − 不変になる。実際、$\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{W}_{\alpha_1}{}^{\perp}$ とすれば、任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_1}$

に対し、$A_2\boldsymbol{x} \in W_{\alpha_1}$ であるから、$(\boldsymbol{x}, A_2\boldsymbol{x}') = (A_2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0$ よって、$A_2\boldsymbol{x}' \in W_{\alpha_1}{}^{\perp}$となる。今、$dim\ W_{\alpha_1} = n_1$ とする。V の正規直交底 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ を $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_{n_1}$ が W_{α_1}の底になる (従って、$\boldsymbol{e}'_{n_1+1}, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ が $W_{\alpha_1}{}^{\perp}$ の底になる) ようにとり、 $T_1 = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n)$ とおけば、$n_1 < n$ なので

$$A_2(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n)\begin{pmatrix} A_2^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)} \end{pmatrix} \to A'_i = T_1^{-1}A_2T_1 = \begin{pmatrix} A_2^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

(ただし、$A^{(1)}$ は n_1 次、$A^{(2)}$ は $n - n_1$ 次正方行列である。)

となる。また、$A_1A_2 = A_2A_1$ なので

$$A'_1A'_2 = T_1^{-1}A_1T_1T_1^{-1}A_2T_1 = T_1^{-1}A_1A_2T_1 = T_1^{-1}A_2A_1T_1 = T_1^{-1}A_2T_1T_1^{-1}A_1T_1 = A'_2A'_1$$

となり、$A'_i\ (1 \leqq i \leqq 2)$ も互いに交換可能である。

$$\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & 0 \\ 0 & A_1^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)}A_2^{(1)} & 0 \\ 0 & A_1^{(2)}A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & 0 \\ 0 & A_1^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_2^{(1)}A_1^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)}A_1^{(2)} \end{pmatrix} \to A_1^{(1)}A_2^{(1)} = A_2^{(1)}A_1^{(1)}\ ,\ A_1^{(2)}A_2^{(2)} = A_2^{(2)}A_1^{(2)}$$

となり、$A_i^{(1)}, A_i^{(2)}\ (1 \leqq i \leqq 2)$ も互いに交換可能となる。

$${}^t(A'_i) = {}^t(T_1^{-1}A_iT_1) = {}^t({}^tT_1A_iT_1) = {}^tT_1{}^tA_iT_1 = T_1^{-1}A_iT_1 = A'_i$$ なので、対称行列となる。

つまり、$A_i^{(1)}, A_i^{(2)}\ (1 \leqq i \leqq 2)$ も対称行列である。

$n = 1$ のときは明らかなので、$1 \leqq n_1 < n$ で成り立つと仮定し帰納法で証明する。つまり、n_1 次の直交行列 $T_2^{(1)}$, $(n - n_1)$ 次の直交行列 $T_2^{(2)}$ があって

$T_2^{(1)-1}A_i^{(1)}T_2^{(1)}, T_2^{(2)-1}A_i^{(2)}T_2^{(2)}\ (1 \leqq i \leqq 2)$ は同時に対角行列になる。

よって、$T = T_1\begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix}$ とおけば

$${}^tT = {}^t\left(T_1\begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix}{}^tT_1 = \begin{pmatrix} {}^tT_2^{(1)} & 0 \\ 0 & {}^tT_2^{(2)} \end{pmatrix}{}^tT_1 = \begin{pmatrix} T_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)-1} \end{pmatrix}T_1^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix}^{-1}T_1^{-1} = \left(T_1\begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix}\right)^{-1} = T^{-1}$$

となり、T は直交行列となる。また、

$$T^{-1}A_iT = \begin{pmatrix} T_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)-1} \end{pmatrix} T_1^{-1}A_iT_1 \begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1 \leqq i \leqq 2)$$

$$= \begin{pmatrix} T_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2^{(1)-1}A_i^{(1)}T_2^{(1)} & 0 \\ 0 & T_2^{(2)-1}A_i^{(2)}T_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

したがって、$T^{-1}A_iT$（$1 \leqq i \leqq 2$）は T によって同時に対角化される。

これならスッキリする。

高木貞治　著　代数学講義　P．378 には次のような証明があった。

「交換可能な対称行列 H , K が同一の直交行列 U で同時に対角行列に変形できる。」

H は対称行列なので、直交行列 U_1 があって対角行列に変形できる。相異なる固有値 α_1 , α_2 , $\cdots$, α_s に対応して、

$$H_0 = U_1^{-1}HU_1 = \begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & H_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix} \quad \text{ただし} \quad H_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & & 0 \\ & \alpha_i & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

（n_i 次）で $\sum n_i = n$ とする。この U_1 で K を変形すると $HK = KH$ なので

$$U_1^{-1}HKU_1 = U_1^{-1}HU_1U_1^{-1}KU_1 = \begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & H_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix} U_1^{-1}KU_1$$

$$= U_1^{-1}KHU_1 = U_1^{-1}KU_1U_1^{-1}HU_1 = U_1^{-1}KU_1 \begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & H_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix}$$

となる。そこで、

$$K_0 = U_1^{-1}KU_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1s} \\ K_{21} & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ K_{s1} & K_{s2} & \cdots & K_{ss} \end{pmatrix}$$

（K_{ii} は H_i と同じ次数の正方行列）とおくと

$$\begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & H_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1s} \\ K_{21} & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ K_{s1} & K_{s2} & \cdots & K_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1s} \\ K_{21} & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ K_{s1} & K_{s2} & \cdots & K_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & H_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix}$$

とならなければいけないので、両辺計算してみると

$$\begin{pmatrix} H_1K_{11} & H_1K_{12} & \cdots & H_1K_{1s} \\ H_2K_{21} & H_2K_{22} & & H_2K_{2s} \\ & & \ddots & \\ H_sK_{s1} & H_sK_{s2} & \cdots & H_sK_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}H_1 & K_{12}H_2 & \cdots & K_{1s}H_s \\ K_{21}H_1 & K_{22}H_2 & & K_{2s}H_s \\ & & \ddots & \\ K_{s1}H_1 & K_{s2}H_2 & \cdots & K_{ss}H_s \end{pmatrix}$$

ここで、各成分を比べてみると、例えば、H_1K_{12} と $K_{12}H_2$ では、

$H_1K_{12} = \alpha_1 K_{12}$ ， $K_{12}H_2 = \alpha_2 K_{12}$ であり、$\alpha_1 \neq \alpha_2$ なので $K_{12} = 0$

つまり、$K_{ij} = 0$（$i \neq j$）とならなければならない。したがって、

$$K_0 = U_1^{-1}KU_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & K_{ss} \end{pmatrix}$$

K は対称行列だったので、${}^tK = K$ 、U_1 は直交行列であることから $U_1^{-1} = {}^tU_1$

$${}^tK_0 = U_1^{-1}\,{}^tKU_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & K_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tK_{11} & & & 0 \\ & {}^tK_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & {}^tK_{ss} \end{pmatrix}$$

よって、K_{ii} は対称行列となる。簡単にするために、以後 $K_{ii} = K_i$ とする。

そこで、各 K_i を対角行列にする直交行列を P_i とすれば、

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & P_s \end{pmatrix}$$ と U_1 の積が求める直交行列 U となる。

実際、$U = U_1P$ とすれば U は直交行列の積なので直交行列であり、

$U^{-1}KU = (U_1P)^{-1}KU_1P = P^{-1}K_0P$ となり、対角行列となる。また、H に関しては

$$U^{-1}HU = (U_1P)^{-1}HU_1P = P^{-1}\begin{pmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix}P$$

$$= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & & 0 \\ & P_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & P_s^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & P_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1^{-1}H_1P_1 & & & 0 \\ & P_2^{-1}H_2P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & P_s^{-1}H_sP_s \end{pmatrix}$$

$$P_i^{-1}H_iP_i=P_i^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i\end{pmatrix}P_i=P_i^{-1}P_i\begin{pmatrix}\alpha_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i\end{pmatrix}$$

よって、H_0 を変えないので、対角行列となる。

なお、量子力学では、この定理はかなり重要なようだ。

（P. 163　注意）

$$T^{-1}A_iA_jT=T^{-1}A_iTT^{-1}A_jT=T^{-1}A_jTT^{-1}A_iT=T^{-1}A_jA_iT\ \rightarrow\ A_iA_j=A_jA_i$$

（P. 163　エルミット行列）

エルミット行列　：　${}^tA=\overline{A}$　（$a_{ij}=\overline{a_{ji}}$）（注 $b_{ii}+ic_{ii}=b_{ii}-ic_{ii}\ \rightarrow\ c_{ii}=0$）

$$A=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}+ic_{12} & b_{13}+ic_{13} & \cdots & b_{1n}+ic_{1n}\\ b_{12}-ic_{12} & b_{22} & b_{23}+ic_{23} & \cdots & b_{2n}+ic_{2n}\\ b_{13}-ic_{13} & b_{23}-ic_{23} & b_{33} & \cdots & b_{3n}+ic_{3n}\\ \\ b_{1n}-ic_{1n} & b_{2n}-ic_{2n} & b_{3n}-ic_{3n} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

$a_{ij}=b_{ij}+ic_{ij}$, $a_{ji}=d_{ji}+if_{ji}$ とすると

$a_{ij}=\overline{a_{ji}}\rightarrow b_{ij}+ic_{ij}=d_{ji}-if_{ji}\ \rightarrow b_{ij}=d_{ji}$, $c_{ij}=-f_{ji}$

対角成分が実数で、他の成分は対角成分を対称の軸として実部は等しく虚部の符号は反対になる。（共役）

歪（ワイ）エルミット行列　：　${}^tA=-\overline{A}$　（$a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$）（注 $b_{ii}+ic_{ii}=-(b_{ii}-ic_{ii})\rightarrow\ b_{ii}=0$）

$$A=\begin{pmatrix}ic_{11} & b_{12}+ic_{12} & b_{13}+ic_{13} & \cdots & b_{1n}+ic_{1n}\\ -b_{12}+ic_{12} & ic_{22} & b_{23}+ic_{23} & \cdots & b_{2n}+ic_{2n}\\ -b_{13}+ic_{13} & -b_{23}+ic_{23} & ic_{33} & \cdots & b_{3n}+ic_{3n}\\ \\ -b_{1n}+ic_{1n} & -b_{2n}+ic_{2n} & -b_{3n}+ic_{3n} & \cdots & ic_{nn}\end{pmatrix}$$

$a_{ij}=b_{ij}+ic_{ij}$, $a_{ji}=d_{ji}+if_{ji}$ とすると

$a_{ij}=-\overline{a_{ji}}\rightarrow b_{ij}+ic_{ij}=-d_{ji}+if_{ji}\ \rightarrow b_{ij}=-d_{ji}$, $c_{ij}=f_{ji}$

対角成分が純虚数で、他の成分は対角成分を対称の軸として虚部は等しく実部の符号は反対になる。

1）A : 歪エルミット行列 $\Leftrightarrow$ iA : エルミット行列

⇒)

$$iA=\begin{pmatrix} -c_{11} & ib_{12}-c_{12} & ib_{13}-c_{13} & \cdots & ib_{1n}-ic_{1n} \\ -ib_{12}-c_{12} & -c_{22} & ib_{23}-c_{23} & \cdots & ib_{2n}-ic_{2n} \\ -ib_{13}-c_{13} & -ib_{23}-c_{23} & -c_{33} & \cdots & ib_{3n}-ic_{3n} \\ \\ -ib_{1n}-c_{1n} & -ib_{2n}-c_{2n} & -ib_{3n}-c_{3n} & \cdots & -c_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=b_{ij}+ic_{ij}$ とすれば、$a_{ji}=-b_{ij}+ic_{ij}$

よって、$ia_{ij}=ib_{ij}-c_{ij}$

$\overline{ia_{ji}}=\overline{(-i\,b_{ij}-c_{ij})}=ib_{ij}-c_{ij}\ \rightarrow ia_{ij}=\overline{ia_{ji}}$ となり、iA はエルミット行列となる。

⇐)

$iA=A'$ 、$A'=(a'_{ij})$, $a'_{ij}=b'_{ij}+ic'_{ij}$ とおけば、

$ia_{ij}=a'_{ij}$ なので $a_{ij}=-ia'_{ij}=-ib'_{ij}+c'_{ij}$ … ①

仮定から A' はエルミット行列なので $a'_{ji}=b'_{ij}-ic'_{ij}$

$a_{ji}=-ia'_{ji}=-ib'_{ij}-c'_{ij}\ \rightarrow \overline{a_{ji}}=\overline{(-ib'_{ij}-c'_{ij})}=ib'_{ij}-c'_{ij}\ \rightarrow\ -\overline{a_{ji}}=-ib'_{ij}+c'_{ij}$

よって、①から $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$ となり、A は歪エルミット行列となる。

（問4）

$$A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}+ic_{12} & b_{13}+ic_{13} & \cdots & b_{1n}+ic_{1n} \\ b_{12}-ic_{12} & b_{22} & b_{23}+ic_{23} & \cdots & b_{2n}+ic_{2n} \\ b_{13}-ic_{13} & b_{23}-ic_{23} & b_{33} & \cdots & b_{3n}+ic_{3n} \\ \\ b_{1n}-ic_{1n} & b_{2n}-ic_{2n} & b_{3n}-ic_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

から、$\{1+2+\cdots+(n-1)\}\times2+n=\dfrac{n(n-1)}{2}\times2+n=n^2$

2) 任意の n 次正方行列 A は

$A=B+iC$ （B, C はエルミット行列）

なる形に一意的に表される。

（証）$B=\dfrac{1}{2}(A+{}^t\overline{A})$, $iC=\dfrac{1}{2}(A-{}^t\overline{A})$

とおけば、

${}^t\overline{B}=\dfrac{1}{2}{}^t(\overline{A}+{}^tA)=\dfrac{1}{2}({}^t\overline{A}+A)=B\ \rightarrow\ {}^tB=\overline{B}$ 　よって、B はエルミット行列となる。

${}^t\overline{iC}={}^t(-i\overline{C})=-i\,{}^t\overline{C}=\dfrac{1}{2}{}^t(\overline{A}-{}^tA)=\dfrac{1}{2}({}^t\overline{A}-A)=-iC\ \rightarrow\ {}^tC=\overline{C}$ よって、C はエルミ

ット行列となる。そして、$A = B + iC$ となる。

一意性については、$A = B' + iC'$（B', C' はエルミット）とする。${}^t\overline{A} = {}^t\overline{B'} - i\,{}^t\overline{C'} = B' - iC'$

$B' = \frac{1}{2}(A + {}^t\overline{A})$, $iC' = \frac{1}{2}(A - {}^t\overline{A})$ となり、$B = B'$, $C = C'$ になる。

3）エルミット行列 A の固有値 α_1, α_2, $\cdots$, α_n は実数である。A に対し、適当なユニタリー行列 U をとれば（ユニタリー行列：${}^t\overline{A}A = E$）

$$U^{-1}AU = {}^t\overline{U}AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

（証）$Ax = \alpha x$ $(x \neq 0)$（注 $(a, b) \neq (a, b)_u$）

とすれば、$(Ax, \overline{x}) = (\alpha x, \overline{x}) = \alpha(x, \overline{x})$

$= (x, {}^t\overline{A}x) = (x, \overline{Ax}) = (x, \overline{\alpha}\overline{x}) = \overline{\alpha}(x, \overline{x})$

$(x, \overline{x}) > 0$ なので、$\alpha = \overline{\alpha}$ となり、α は実数となる。

しかし、固有ベクトルは実ベクトルとは限らない。

複素ベクトル空間の正規直交系と直交補空間

$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ を正規直交系、すまわち、$(f_i, f_j)_u = (f_i, \overline{f_j}) = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ なるベクトルの集合とすれば、次のようなことが成立する。

$x = c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$, $y = d_1f_1 + d_2f_2 + \cdots + d_nf_n$

に対して、$(x, y)_u = (c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n, d_1f_1 + d_2f_2 + \cdots + d_nf_n)_u$

$= (c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n, \overline{d_1f_1 + d_2f_2 + \cdots + d_nf_n})$

$= c_1\overline{d_1} + c_2\overline{d_2} + \cdots + c_n\overline{d_n}$

$(x, y)_u = (x, \overline{y}) = c_1\overline{d_1} + c_2\overline{d_2} + \cdots + c_n\overline{d_n}$

（P. 104　定理　5'）要点だけ

W を r 次元の部分空間とする。$\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ を W に含まれる正規直交系とする。$p < r$ とすれば、$\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ に一次従属でない W のベクトルが存在する。その任意の1つを a とする。今、

$c_i = (a, \overline{f_i})$　$(1 \leqq i \leqq p)$

$a' = \sum_{i=1}^{p} c_if_i$　,　$a'' = a - a' = a - \sum_{i=1}^{p} c_if_i$

とおけば、$\boldsymbol{a}'' \neq 0$（$\boldsymbol{a}'' = 0$ ならば、$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{p} c_i \boldsymbol{f}_i$ となり、一次従属になる）

また、$(\boldsymbol{a}'', \overline{\boldsymbol{f}_i}) = (\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{f}_i}) - (\sum_{i=1}^{p} c_i \boldsymbol{f}_i, \overline{\boldsymbol{f}_i}) = c_i - c_i = 0 \quad (1 \leqq i \leqq p)$

さらに、$\boldsymbol{f}_{p+1} = \dfrac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{a}'', \overline{\boldsymbol{a}''})}} \boldsymbol{a}'' = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}''\|} \boldsymbol{a}''$

とおけば、$(\boldsymbol{f}_{p+1}, \overline{\boldsymbol{f}_i}) = (\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}''\|} \boldsymbol{a}'', \overline{\boldsymbol{f}_i}) = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}''\|} (\boldsymbol{a}'', \overline{\boldsymbol{f}_i}) = 0$

$$(\boldsymbol{f}_{p+1}, \overline{\boldsymbol{f}_{p+1}}) = (\frac{1}{\|\boldsymbol{a}''\|} \boldsymbol{a}'', \overline{\frac{1}{\|\boldsymbol{a}''\|} \boldsymbol{a}''}) = \frac{(\boldsymbol{a}'', \overline{\boldsymbol{a}''})}{(\boldsymbol{a}'', \overline{\boldsymbol{a}''})} = 1 \quad (1 \leqq i \leqq p)$$

よって、$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_p, \boldsymbol{f}_{p+1}\}$ はまた、W に含まれる正規直交系となる。

したがって、$p = 0$ として、任意の部分空間 W の底としてつねに正規直交系 $\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_r\}$ をとることができる。

（複素ベクトル空間の*Schmidt*の直交化法）（$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$，$(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = \overline{k}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$）

W の一つの底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられていたとすれば、

$c_{11} = \|\boldsymbol{a}_1\|^{-1}$

$\boldsymbol{f}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots ((\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{f}_1}) = (\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} \boldsymbol{a}_1, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} \overline{\boldsymbol{a}_1}) = 1)$

$$(\boldsymbol{a}_2, \overline{\boldsymbol{f}_1}) = c \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|}$$

$$(\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{f}_2}) = (\boldsymbol{f}_1, \overline{\frac{\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|}}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} (\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{a}_2} - \overline{c\boldsymbol{f}_1})$$

ここで、$(\boldsymbol{a}_2, \overline{\boldsymbol{f}_1}) = c = (\overline{\overline{\boldsymbol{f}_1}, \boldsymbol{a}_2}) = (\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{a}_2})$ なので

$$= \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} \{(\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{a}_2}) - (\boldsymbol{f}_1, \overline{c\boldsymbol{f}_1})\} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} \{c - \overline{\overline{c}}\} = 0$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} = \frac{-c\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} + \frac{\boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} = \frac{-cc_{11}}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} \boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} \boldsymbol{a}_2$$

$= c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 \quad (\dfrac{-cc_{11}}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} = c_{12}, \ \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1\|} = c_{22}$ とした。）$\|\boldsymbol{f}_2\| = 1$ である。

$$(\boldsymbol{a}_3, \overline{\boldsymbol{f}_1}) = c_1, (\boldsymbol{a}_3, \overline{\boldsymbol{f}_2}) = c_2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2\|} = \frac{-c_1c_{11}\boldsymbol{a}_1 - c_2(c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2\|}$$

$$= \frac{-c_1 c_{11} - c_2 c_{12}}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1 \boldsymbol{f}_1 - c_2 \boldsymbol{f}_2 \|} \boldsymbol{a}_1 + \frac{-c_2 c_{22}}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1 \boldsymbol{f}_1 - c_2 \boldsymbol{f}_2 \|} \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1 \boldsymbol{f}_1 - c_2 \boldsymbol{f}_2 \|} \boldsymbol{a}_3$$

$= c_{13} \boldsymbol{a}_1 + c_{23} \boldsymbol{a}_1 + c_{33} \boldsymbol{a}_1$

$(\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{f}_3})$ については、$(\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{a}_3 - c_1 \boldsymbol{f}_1 - c_2 \boldsymbol{f}_2}) = (\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{a}_3}) - (\boldsymbol{f}_1, \overline{c_1 \boldsymbol{f}_1}) - (\boldsymbol{f}_1, \overline{c_2 \boldsymbol{f}_2})$

$= c_1 - \overline{\overline{c_1}} - 0 = 0$ なので、$(\boldsymbol{f}_1, \overline{\boldsymbol{f}_3}) = 0$

$(\boldsymbol{f}_2, \overline{\boldsymbol{f}_3})$ については、$(\boldsymbol{f}_2, \overline{\boldsymbol{a}_3 - c_1 \boldsymbol{f}_1 - c_2 \boldsymbol{f}_2}) = (\boldsymbol{f}_2, \overline{\boldsymbol{a}_3}) - (\boldsymbol{f}_2, \overline{c_1 \boldsymbol{f}_1}) - (\boldsymbol{f}_2, \overline{c_2 \boldsymbol{f}_2})$

$= c_2 - 0 - \overline{\overline{c_2}} = 0$ なので、$(\boldsymbol{f}_2, \overline{\boldsymbol{f}_3}) = 0$

$\| \boldsymbol{f}_3 \| = 1$ である。

さらに続けていけば

$\boldsymbol{f}_1 = c_{11} \boldsymbol{a}_1$

$\boldsymbol{f}_2 = c_{12} \boldsymbol{a}_1 + c_{22} \boldsymbol{a}_2$

$\boldsymbol{f}_3 = c_{13} \boldsymbol{a}_1 + c_{23} \boldsymbol{a}_2 + c_{33} \boldsymbol{a}_3$

$\vdots$

$\boldsymbol{f}_r = c_{1r} \boldsymbol{a}_1 + c_{2r} \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{rr} \boldsymbol{a}_r$

$\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_p$ がすでに得られていたとすれば

$$\boldsymbol{f}_{p+1} = \frac{\boldsymbol{a}_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{a}_{p+1}, \overline{\boldsymbol{f}_i}) \boldsymbol{f}_i}{\| \boldsymbol{a}_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{a}_{p+1}, \overline{\boldsymbol{f}_i}) \boldsymbol{f}_i \|}$$

$(\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{f}_{p+1}})$ は

$$(\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{a}_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{a}_{p+1}, \overline{\boldsymbol{f}_i}) \boldsymbol{f}_i}) = (\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{a}_{p+1}} - \sum_{i=1}^{p} \overline{(\boldsymbol{a}_{p+1}, \overline{\boldsymbol{f}_i})}\, \overline{\boldsymbol{f}_i})$$

$$= (\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}) - (\boldsymbol{f}_j, (\overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}, \boldsymbol{f}_1) \overline{\boldsymbol{f}_1}) - \cdots - (\boldsymbol{f}_j, (\overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}, \boldsymbol{f}_p) \overline{\boldsymbol{f}_p})$$

$$= (\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}) - (\boldsymbol{f}_j, (\overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}, \boldsymbol{f}_j) \overline{\boldsymbol{f}_j}) = (\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}) - (\overline{\overline{\boldsymbol{a}_{p+1}}, \boldsymbol{f}_j}) = 0$$

よって、$(\boldsymbol{f}_j, \overline{\boldsymbol{f}_{p+1}}) = 0 \quad (1 \leqq j \leqq p)$

このようにして、正規直交系 $\{ \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_r \}$ を得ることができる。

（注意） $c_{ii} \neq 0 \ (1 \leqq i \leqq r)$ なぜなら

$c_{ii} = \dfrac{1}{\| \boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i, \overline{\boldsymbol{f}_k}) \boldsymbol{f}_k \|}$ なので $\| \boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i, \overline{\boldsymbol{f}_k}) \boldsymbol{f}_k \| = 0$ ならば

$$\boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1}(\boldsymbol{a}_i, \overline{\boldsymbol{f}_k})\boldsymbol{f}_k = 0 \ \to\ \boldsymbol{a}_i = \sum_{k=1}^{i-1}(\boldsymbol{a}_i, \overline{\boldsymbol{f}_k})\boldsymbol{f}_k$$

よって、下の表から $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_{i-1}$ の線型結合になってしまうので、底であることに反する。

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1\\
&\boldsymbol{f}_2 = c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2\\
&\boldsymbol{f}_3 = c_{13}\boldsymbol{a}_1 + c_{23}\boldsymbol{a}_2 + c_{33}\boldsymbol{a}_3\\
&\quad\vdots\\
&\boldsymbol{f}_r = c_{1r}\boldsymbol{a}_1 + c_{2r}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{rr}\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}}$$

これを逆に $\boldsymbol{a}_i$ に関して解けば

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1 = c'_{11}\boldsymbol{f}_1\\
&\boldsymbol{a}_2 = c'_{12}\boldsymbol{f}_1 + c'_{22}\boldsymbol{f}_2\\
&\boldsymbol{a}_3 = c'_{13}\boldsymbol{f}_1 + c'_{23}\boldsymbol{f}_2 + c'_{33}\boldsymbol{f}_3\\
&\quad\vdots\\
&\boldsymbol{a}_r = c'_{1r}\boldsymbol{f}_1 + c'_{2r}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + c'_{rr}\boldsymbol{f}_r
\end{aligned}}$$

$\boldsymbol{f}_1 = \dfrac{1}{c'_{11}}\boldsymbol{a}_1$ つまり、$c_{11} = \dfrac{1}{c'_{11}}$ である。

2番目の式を $\boldsymbol{f}_2$ について解くと、$\boldsymbol{f}_2 = \dfrac{-c'_{12}}{c'_{22}}\boldsymbol{f}_1 + \dfrac{1}{c'_{22}}\boldsymbol{a}_2$ 、$\boldsymbol{f}_1$ の中には $\boldsymbol{a}_2$ は含まれないので表現の一意性から $c_{22} = \dfrac{1}{c'_{22}}$ となる。同様に $\boldsymbol{f}_i$ について解けば、$\boldsymbol{f}_1 \sim \boldsymbol{f}_{i-1}$ の中に $\boldsymbol{a}_i$ は含まれないので表現の一意性から $c_{ii} = \dfrac{1}{c'_{ii}}$ となる。また、$\neq 0$ である。

$\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{f}_j\ (1 \leqq j \leqq r)$ を第 j 列ベクトルとする (n, r) 行列を A, F とすると

※ $$A = F\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1r}\\ & c'_{22} & \cdots & c'_{2r}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & \cdots & c'_{rr}\end{pmatrix} = FC$$ とおく

P. 72 の例3 から、${}^tF\overline{F} = ((\boldsymbol{f}_i, \overline{\boldsymbol{f}_j})) = (\delta_{ij}) = E^{(r)}$ であるから $\overline{{}^tF\overline{F}} = {}^t\overline{F}F = E^{(r)}$

$A = FC \ \to\ {}^tA = {}^tC\,{}^tF \ \to\ {}^t\overline{A} = {}^t\overline{C}\,{}^t\overline{F}$

${}^t\overline{A}A = {}^t\overline{C}\,{}^t\overline{F}FC = {}^t\overline{C}C = ((\boldsymbol{a}_i, \overline{\boldsymbol{a}_j}))$

したがって、$det({}^t\overline{A}A) = det({}^t\overline{C}C) = det({}^t\overline{C})det(C) = (\prod_{i=1}^{r}\overline{c'_{ii}})(\prod_{i=1}^{r}c'_{ii})$

$= \left(\prod_{i=1}^{r} \| c'_{ii} \| \right)^2 \neq 0$

$r = n$ の場合には、${}^t\boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\,{}^t\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{E}^{(n)}$ すなわち、$\boldsymbol{F}^{-1} = {}^t\overline{\boldsymbol{F}}$ ← ユニタリー行列

A は W の一次独立な底の行列だったので、$r = n$ の場合には、正則行列になる。底のとり方は任意なので、※より、任意の正則行列は正則なユニタリー行列と三角行列の積に分解できることがわかる。

（複素ベクトル空間の直交補空間）

$\{ \boldsymbol{x} \,;\, (\boldsymbol{x} , \overline{\boldsymbol{y}}) = 0 \ \ for\ all\ \ \boldsymbol{y} \in W \} = W^{\perp}$ ← W の直交補空間

直交補空間は部分空間である。なぜなら

任意の $\boldsymbol{x} , \boldsymbol{z} \in W^{\perp}$ をとったとき、$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{z} , \overline{\boldsymbol{y}}) = \alpha(\boldsymbol{x} , \overline{\boldsymbol{y}}) + \beta(\boldsymbol{z} , \overline{\boldsymbol{y}}) = 0 + 0 = 0$ だからである。

$V^n = W + W^{\perp}$ ， $W \cap W^{\perp} = \{ 0 \}$ つまり直和になる。

（証）$W \cap W^{\perp} = \{ 0 \}$ であることは明らかである。実際、$\boldsymbol{x} \in W \cap W^{\perp}$ とすれば、$\boldsymbol{x} \in W$, $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ なので、$(\boldsymbol{x} , \overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ したがって、$\boldsymbol{x} = 0$ でなければならない。

次に、$V^n = W + W^{\perp}$ を示す。

$W + W^{\perp}$ は部分空間なので $W + W^{\perp} \subset V^n$ は明らかである。

任意の $\boldsymbol{x} \in V^n$ に対し、$dim\ W = r$ とし、W の正規直交底 $\{ \boldsymbol{f}_1 , \cdots , \boldsymbol{f}_r \}$ をとる。

$(\boldsymbol{x} , \overline{\boldsymbol{f}_i}) = c_i \quad (1 \leqq i \leqq r)$

$\boldsymbol{x}' = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{f}_i$ ， $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$

とおけば、明らかに、$\boldsymbol{x}' \in W$ また、任意の $\boldsymbol{f}_i\ (1 \leqq i \leqq r)$ に対して

$(\boldsymbol{x}'' , \overline{\boldsymbol{f}_i}) = (\boldsymbol{x} , \overline{\boldsymbol{f}_i}) - (\boldsymbol{x}' , \overline{\boldsymbol{f}_i}) = c_i - c_i = 0$

$W = \{ \{ \boldsymbol{f}_1 , \cdots , \boldsymbol{f}_r \} \}$ であるから、任意の $\boldsymbol{y}$ に対して $(\boldsymbol{x}'' , \overline{\boldsymbol{y}}) = 0$ よって、$\boldsymbol{x}'' \in W^{\perp}$ である。

つまり、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' \in W + W^{\perp}$ 故に、$V^n = W + W^{\perp}$（直和）となる。

A がエルミット行列ならば対角化可能

$n = 1$ のときは、$A\boldsymbol{x} = [a]\boldsymbol{x}$ とすれば、$[a]\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}$ なのでユニタリー行列として $U = [1]$ をとれば、$U^{-1} = [1]$ なので $U^{-1}AU = [1][a][1] = [a]$ 、固有値を a として対角行列になる。よって n に関する帰納法で証明する。

α_1 を A の1つの固有値とし、x_1 をそれに対する固有ベクトルとする。$\{\{x_1\}\}$ の直交補空間を W_1 とすれば、$x \in W_1$ に対し、$Ax_1 = \alpha_1 x_1$

$$(x_1, \overline{Ax}) = ({}^t\overline{A}x_1, \overline{x}) = (Ax_1, \overline{x}) = (\alpha_1 x_1, \overline{x}) = \alpha_1(x_1, \overline{x}) = 0$$

よって、$Ax \in W_1$　すなわち、W_1 は A－不変である。

今、正規直交底 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ を $\{\{e_1'\}\} = \{\{x_1\}\}$, $W_1 = \{\{e_2', \cdots, e_n'\}\}$ となるようにとる。この底に関して A を表現する行列を A' とすれば

$$A(e_1', e_2', \cdots, e_n') = (e_1', e_2', \cdots, e_n')\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A'_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A'_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$e_1', e_2', \cdots, e_n'$ を列ベクトルとする行列を U_1 とおけば、U_1 はユニタリー行列（P. 130参）なので、$A' = U_1^{-1}AU_1 = {}^t\overline{U_1}AU_1$ （注 ${}^tA = \overline{A} \to {}^t\overline{A} = A$, ${}^tU_1\overline{U_1} = E$ ）

よって、${}^tA' = {}^t({}^t\overline{U_1}AU_1) = {}^tU_1{}^tA\overline{U_1} = {}^tU_1\overline{AU_1} = \overline{A'}$ となり、A' はエルミット行列であり、A'_1 もエルミット行列となる。よって、帰納法の仮定から、A'_1 は対角化可能であって、ある（$n-1$）次ユニタリー行列 U_2' があって、$U_2'^{-1}A'_1U_2'$ は対角行列になる。故に

$U = U_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$ とすれば

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}^{-1} U_1^{-1}AU_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}^{-1} U_1^{-1}(U_1A'U_1^{-1})U_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$$

ここで、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = E \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2'^{-1} \end{pmatrix}$ なので

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2'^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & U_2'^{-1}A'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & U_2'^{-1}A'_1U_2' \end{pmatrix}$$

は対角行列となり、固有値を対角成分とする行列に相似になる。また、

${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tU_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{U_2'} \end{pmatrix} = E$ よって、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$ はユニタリー行列であって

${}^t\overline{U}U = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}{}^tU_1\overline{U_1}\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}} = E$ なので、U もユニタリー行列となる。

4）エルミット行列 A の相異なる固有値に対する固有空間は内積（$x,\overline{y}$）に関して直交する。A の相異なる固有値（の全体）を $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ とすれば、V^n は α_i（$1\leqq i\leqq s$）に対する A の（せまい意味の）固有空間 W_{α_i} の直和に分解される。

$V^n=W_{\alpha_1}\dotplus W_{\alpha_2}\dotplus\cdots\dotplus W_{\alpha_s}$　　（直和）

（証）上の U の列ベクトルを $t_1,t_2,\cdots,t_n$ とすれば、内積（$x,\overline{y}$）に関して正規直交系をなし、

$$A(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & 0\\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

だから、$At_i=\alpha_i t_i$ なので $t_i\in W_{\alpha_i}$ また、$\{t_k;\alpha_k=\alpha_i\}$（$\alpha_1\sim\alpha_n$ は重複を含めているので）は P. 146例4からもわかるように W_{α_i} の1つの底になる。U はユニタリー行列なので、W_{α_i}（$1\leqq i\leqq s$）は互いに直交し、かつ V^n はそれらの直和になる。

ここまできて、P. 160の脚注が少し気になる。（x,y），（$x,\overline{y}$）どちらでもよい？

5）任意の n 次正方行列 A に対し、適当なユニタリー行列 U をとれば

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & *\\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

（証）P. 161の例1を簡略してなぞると

x_1 を A の固有値 α_1 に対する固有ベクトルとし、$e_1'=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ とおき、それを延長して、内積（$x,\overline{y}$）に関して正規直交底 $\{e_1',e_2',\cdots,e_n'\}$ を作る。$U_1=(e_1',e_2',\cdots,e_n')$ とすれば、U_1 はユニタリー行列であって、

$$U_1^{-1}AU_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ & & A_1' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

となる。帰納法の仮定から（$n-1$）次ユニタリー行列 U_2' があって

$$U_2'^{-1}A_1'U_2'=\begin{pmatrix}\alpha_2 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

$U=U_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix}$ とすれば、U はユニタリー行列であって、A は上三角行列となる。

6) 任意の (m , n) 行列 A に対し、${}^t\overline{A}A$ の階数を r 、${}^t\overline{A}A$ の 0 でない固有値を $\gamma_1^2, \cdots,$ γ_r^2 ($\gamma_i > 0$) とおけば、適当なユニタリー行列 U_1 , U_2 があって

$$U_1AU_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(証) A は (m , n) 行列なので ${}^t\overline{A}$ は (n , m) 行列となり、${}^t\overline{A}A$ は (n , n) 行列となる。また、${}^t({}^t\overline{A}A) = {}^tA\overline{A} = \overline{{}^t\overline{A}A}$ なので、${}^t\overline{A}A$ はエルミット行列である。よって、ある n 次ユニタリー行列 U_2 があって

$${}^tU_2{}^t\overline{A}AU_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

(注意) AU_2 は (m , n) 行列、${}^t\overline{A}Ax = \beta_i x \ \rightarrow \ {}^tA\overline{Ax} = \beta_i\overline{x}$

ここで、$\beta_1, \cdots, \beta_n$ は ${}^t\overline{A}A$ の(実)固有値である。

x を β_i に関する n 次固有ベクトルとした場合、Ax は m 次ベクトルとなるが、$0 \leqq (Ax , \overline{Ax}) = (x , {}^tA\overline{Ax}) = (x , \beta_i\overline{x}) = \beta_i(x , \overline{x})$ よって、$\beta_i \geqq 0$ なので上の証明と同様に $\gamma_i^2 = \beta_i$ とできる。また、${}^tU_2{}^t\overline{A}AU_2$ は n 次正方行列なので A_σ (A_σ は直交行列であり、${}^t(U_2A_\sigma) = A_\sigma\overline{U_2} = \overline{A_\sigma U_2} \rightarrow U_2$ として) を施すことにより、$rank\,({}^tU_2{}^t\overline{A}AU_2) = rank\,({}^t\overline{A}A) = r \leqq m , n$ (P. 110、P. 113例2 参照)であるから、P. 162脚注と同様に

$${}^t\overline{U_2}\,{}^t\overline{A}AU_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \beta_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

としてよい。次に、AU_2 の n 次列ベクトルを $t_1 , t_2 , \cdots , t_n$ とすれば、

$${}^t\overline{U_2}\,{}^t\overline{A}AU_2 = {}^t(\overline{AU_2})(AU_2) = \begin{pmatrix} \overline{t_1} \\ \vdots \\ \overline{t_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{t_1} , t_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\overline{t_n} , t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \beta_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

上式から $(\overline{t_i} , t_j) = \beta_i\delta_{ij} \ \rightarrow \ (t_i , \overline{t_j}) = \beta_i\delta_{ij}$ (右辺は実数なので)

よって、$(t_i , \overline{t_i}) = \beta_i \ \rightarrow \ \| t_i \| = \sqrt{\beta_i} = \gamma_i$ なので、$\dfrac{\overline{t_1}}{\gamma_1} , \dfrac{\overline{t_2}}{\gamma_2} , \cdots , \dfrac{\overline{t_r}}{\gamma_r}$ は正規直交系をなし

$t_i = 0_i = 0$ ($r+1 \leqq i \leqq n$) となる。

そこで、$\dfrac{\overline{t_1}}{\gamma_1}$, $\dfrac{\overline{t_2}}{\gamma_2}$, … , $\dfrac{\overline{t_r}}{\gamma_r}$ を第1～第 r 行ベクトルとするような（ m , m ）行列を U_1 とすれば、

$$U_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{t_1}}{\gamma_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\overline{t_r}}{\gamma_r} \\ 0_{r+1} \\ \vdots \\ 0_m \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad U_1AU_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{t_1}}{\gamma_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\overline{t_r}}{\gamma_r} \\ 0_{r+1} \\ \vdots \\ 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_r & 0_{r+1} & \cdots & 0_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \gamma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となり上手くいく。ただし、U_1 は (m , m) 行列であり、各行ベクトルは内積 (x , $\overline{y}$)にかんして直交するが、ユニタリー行列と呼んでよいかは疑問である。

（P. 164　二次形式）

任意の二次形式は

$f(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \cdots + b_{nn}x_n^2 + (b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \cdots + b_{1n}x_1x_n) + (b_{21}x_2x_1 + b_{23}x_2 x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n) + \cdots + (b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \cdots + b_{n,n-1}x_nx_{n-1})$

であるが、$x_ix_j = x_jx_i$ ($1 \leqq i , j \leqq n$) であるから、($b_{ij} + b_{ji}$)$x_ix_j = 2a_{ij}x_ix_j$, $b_{ii} = a_{ii}$ とすれば

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

と表すことができる。さらに、$i > j$ のとき $a_{ij} = a_{ji}$ とおき、行列 $A = (a_{ij})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおけば

$$f(x) = {}^t xAx = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と書くことができる。この A を二次形式の係数行列といい、対称行列になる。

（例） $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$　（ $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, $a_{23} = 4$ ）

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1+x_2+2x_3 \\ x_1+3x_2+4x_3 \\ 2x_1+4x_2+5x_3 \end{pmatrix}$$

$= 2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3 + x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3 + 2x_1x_3+4x_2x_3+5x_3^2$

$= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

逆に任意の対称行列 A に対し、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は二次形式になる。

（P. 165　注意）

P. 33 から、$A=(a_{ij})$ を (n, m) 行列、$\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトル、$\boldsymbol{y}$ を m 次元ベクトルとすれば、

$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})=({}^tA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$

となる。この式は $\boldsymbol{x}$ についても $\boldsymbol{y}$ についても線型であり、このような多項式を双一次形式という。

（例）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \text{として、}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{13}x_1y_3+a_{14}x_1y_4+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+a_{23}x_2y_3+a_{24}x_2y_4+a_{31}x_3y_1+a_{32}x_3y_2$$
$$+a_{33}x_3y_3+a_{34}x_3y_4$$

逆に、$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に関する双一次形式とすれば、$\boldsymbol{e}_i\ (1 \leqq i \leqq n)$, $\boldsymbol{e}'_i\ (1 \leqq j \leqq m)$ をそれぞれ n, m 次元単位ベクトルとおくとき、$\boldsymbol{x}$ 、$\boldsymbol{y}$ についても線型であるから

$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}'_1+y_2\boldsymbol{e}'_2+\cdots+y_n\boldsymbol{e}'_n$ に対して

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle=\langle x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n, y_1\boldsymbol{e}'_1+y_2\boldsymbol{e}'_2+\cdots+y_n\boldsymbol{e}'_n \rangle=\sum_{i,j}\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j \rangle x_iy_j$

$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j \rangle=a_{ij}$（内積ではない）とすれば、$A=(a_{ij})$ は (n, m) 行列となる。したがって

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ となる。この A を双一次形式の係数行列という。

そこで、A を任意の n 次行列とし、双一次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}=\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$ において、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ とおけば

（$n=4$ の場合）

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+\boldsymbol{a_{12}x_1x_2}+a_{13}x_1x_3+a_{14}x_1x_4+\boldsymbol{a_{21}x_1x_2}+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{24}x_2x_4+a_{31}x_1x_3+a_{32}x_2x_3+$$
$$a_{33}x_3^2+a_{34}x_3x_4+a_{41}x_1x_4+a_{42}x_2x_4+a_{43}x_3x_4+a_{44}x_4$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} & a_{14}+a_{14} \\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} & a_{24}+a_{42} \\ a_{13}+a_{31} & a_{23}+a_{32} & 2a_{33} & a_{34}+a_{43} \\ a_{14}+a_{41} & a_{24}+a_{42} & a_{34}+a_{43} & 2a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} & a_{14}+a_{14} \\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} & a_{24}+a_{42} \\ a_{13}+a_{31} & a_{23}+a_{32} & 2a_{33} & a_{34}+a_{43} \\ a_{14}+a_{41} & a_{24}+a_{42} & a_{34}+a_{43} & 2a_{44} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}(A+{}^tA) \leftarrow A \text{ の対称部分となる。}$$

（一般には）

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} $$

$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + \boldsymbol{x_i}(a_{i1}x_1 + \cdots + \boldsymbol{a_{ij}x_j} + \cdots + a_{in}x_n) + \cdots + \boldsymbol{x_j}(a_{j1}x_1$
$+ \cdots + \boldsymbol{a_{ji}x_i} + \cdots + a_{jn}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n)$

$$ = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ & & a_{ij}+a_{ji} & \\ & a_{ij}+a_{ji} & & \\ a_{1n}+a_{n1} & \cdots & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} $$

$$ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ & & a_{ij}+a_{ji} & \\ & a_{ij}+a_{ji} & & \\ a_{1n}+a_{n1} & \cdots & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + {}^tA) $$

特に、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}$（対称）ならば、($n = 4$ の場合)

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} $$

$= a_{11}x_1y_1 + \boldsymbol{a_{12}x_1y_2} + a_{13}x_1y_3 + a_{14}x_1y_4 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 + a_{24}x_2y_4 + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3$
$y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{34}x_3y_4 + a_{41}x_4y_1 + a_{42}x_4y_2 + a_{43}x_4y_3 + a_{44}x_4y_4$

$$ {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} $$

$= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + a_{13}x_3y_1 + a_{14}x_4y_1 + \boldsymbol{a_{21}x_1y_2} + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_3y_2 + a_{24}x_4y_2 + a_{31}x_1y_3 + a_{32}x_2y_3$
$+ a_{33}x_3y_3 + a_{34}x_4y_3 + a_{41}x_1y_4 + a_{42}x_2y_4 + a_{43}x_3y_4 + a_{44}x_4y_4$

係数を比べて、$a_{ij} = a_{ji}$ となっているので、A は対称行列になる。

（一般には）

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} $$

$= x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) + \cdots + \boldsymbol{x_i}(a_{i1}y_1 + \cdots + \boldsymbol{a_{ij}y_j} + \cdots + a_{in}y_n) + \cdots + \boldsymbol{x_j}(a_{j1}y_1 + \cdots + \boldsymbol{a_{ji}y_i} + \cdots + a_{jn}y_n) + \cdots + x_n(a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nj}y_j + \cdots + a_{nn}y_n)$

$$ {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} $$

$= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + \boldsymbol{y_i}(a_{i1}x_1 + \cdots + \boldsymbol{a_{ij}x_j} + \cdots + a_{in}x_n) + \cdots + \boldsymbol{y_j}(a_{j1}x_1 + \cdots + \boldsymbol{a_{ji}x_i} + \cdots + a_{jn}x_n) + \cdots + y_n(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n)$

係数を比べて、$a_{ij} = a_{ji}$ となっているので、A は対称行列になる。

したがって、対応する二次形式の係数行列は A となる。

逆に二次形式 $A[\boldsymbol{x}] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ （$i > j$ のとき $a_{ij} = a_{ji}$）

$\frac{1}{2}(A[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}] - A[\boldsymbol{x}] - A[\boldsymbol{y}]) = \frac{1}{2}({}^t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} - {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y})$

$= \frac{1}{2}({}^t\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + {}^t\boldsymbol{y}A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} - {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y})$

$= \frac{1}{2}({}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y} - {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} - {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y})$

$= \frac{1}{2}({}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x})$ ← A が対称行列ならば ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}$ なので

$= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$

これを $A[\boldsymbol{x}]$ の極化形式と呼ぶようだが何のためになるのかはわからない。

（P. 165　問1）

$A = (a_{ij})$ とすれば

$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j}{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j}(x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) + \cdots + x_i(a_{i1}y_1 + \cdots + a_{ij}y_j + \cdots + a_{in}y_n) + \cdots + x_j(a_{j1}y_1 + \cdots + a_{ji}y_i + \cdots + a_{jn}y_n) + \cdots + x_n(a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nj}y_j + \cdots + a_{nn}y_n)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1a_{1j} + \cdots + x_ia_{ij} + \cdots + x_ja_{jj} + \cdots + x_na_{nj}) = a_{ij}$

$A = (a_{ij})$ が対称のとき

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(2a_{jj}x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right) = 2a_{ij}$$

二次形式 $A[x] = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ において、変数の正則一次変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ を行えば、$\boldsymbol{x}'$ に関する二次形式が得られる。その係数行列を A' とすれば

$${}^t\boldsymbol{x}'A'\boldsymbol{x}' = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{x}')A(P\boldsymbol{x}') = {}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPAP\boldsymbol{x}'$$

${}^t({}^tPAP) = {}^tPAP$ も対称行列であるから、$A' = {}^tPAP$ となる。

(P. 166　定理4’’)

実係数の二次形式 $A[x] = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対し、適当に変数の直交変換 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}'$ を行えば

$A[x] = {}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tTAT\boldsymbol{x}' = {}^tTAT\,[\boldsymbol{x}']$

${}^tTAT$ は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を A の固有値として対角行列になるので

$A[x] = {}^tTAT\,[\boldsymbol{x}'] = \alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \cdots + \alpha_n x_n'^2$

となる。

そこで、A の固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の中で、p 個は >0 , q 個は <0 , 残りは $=0$ であるとする。簡単のために、$\alpha_1, \cdots, \alpha_p > 0$, $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_{p+q} < 0$, $\alpha_{p+q+1}, \cdots, \alpha_n = 0$ であるとする。(底の置換を A_σ を施せばよい。${}^t(TA_\sigma)A(TA_\sigma)$, TA_σ : 直交行列)

$$P = T\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_p}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{p+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{p+q}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = TQ \text{ とする。}$$

p 個　　q 個

$${}^tPAP = {}^tQ\,{}^tTATQ = Q({}^tTAT)Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{対角行列の積は対角行列}$$

よって、次の定理の前半を得る。

（P. 167　定理5）

実係数の二次形式 $A[\boldsymbol{x}]$ に対し、適当に変数の実正則変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ を行えば

$A[\boldsymbol{x}] = {}^tPAP\,[\boldsymbol{x}'] = x_1'^2 + \cdots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \cdots - x_{p+q}'^2$　←　二次形式の標準形

となる。ここで、p , q は A によって一意的に定まる。（*Sylvester* の慣性法則）

（一意性の証明）

今、別の実正則一次変換 $\boldsymbol{x} = P'\boldsymbol{x}''$ に対して

$A[\boldsymbol{x}] = {}^tP'AP'\,[\boldsymbol{x}''] = x_1''^2 + \cdots + x_{p'}''^2 - x_{p'+1}''^2 - \cdots - x_{p'+q'}''^2$

となったとする。$p = p'$, $q = q'$ を示せばよい。まず、$p + q = rank\,A$ であるから $p + q = p' + q'$ は明らかである。$p > p'$ として矛盾を出す。

(*)　$A[\boldsymbol{x}] = x_1'^2 + \cdots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \cdots - x_{p+q}'^2 = x_1''^2 + \cdots + x_{p'}''^2 - x_{p'+1}''^2 - \cdots - x_{p'+q'}''^2$

（ $\boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x}$　，　$\boldsymbol{x}'' = P'^{-1}\boldsymbol{x}$ ）

であるが、

$x_i' = 0$（$p+1 \leqq i \leqq n$）

$x_i'' = 0$（$1 \leqq i \leqq p'$）

とした場合

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{とすれば} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$P'^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p'1} & \cdots & b_{p'n} \\ b_{p'+1,1} & \cdots & b_{p'+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{とすれば} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{p'+1}'' \\ \vdots \\ x_{p'+q'}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p'1} & \cdots & b_{p'n} \\ \hline b_{p'+1,1} & \cdots & b_{p'+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{p+1,1}x_1 + \cdots + a_{p+1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{p'1}x_1 + \cdots + b_{p'n}x_n = 0 \end{cases}$$

←　方程式は $p' + (n - p)$ 個ある。$p > p'$ としたので
$p' - p < 0$ から $p' + (n - p) < n$ となる。
P. 116定理10系から自明な解($\neq 0$)をもつ。

その解を $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ とすれば

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}x_{01}\\ \vdots\\ x_{0n}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x'_{10}\\ \vdots\\ x'_{p0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & a_{pn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{01}\\ \vdots\\ x_{0n}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x''_{p'+1,0}\\ \vdots\\ x''_{n0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{p'+1,1} & \cdots & b_{p'+1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{01}\\ \vdots\\ x_{0n}\end{pmatrix}$$

として

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}x'_{10}\\ \vdots\\ x'_{p0}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}''=\boldsymbol{P}'^{-1}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ x''_{p'+1,0}\\ \vdots\\ x''_{n0}\end{pmatrix}$$

となり、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ のとき (∗) は

$x'^2_{10}+\cdots+x'^2_{p0}=-x''^2_{p'+1,0}-\cdots-x''^2_{p'+q',0}$

となり

$\begin{pmatrix}x'_{10}\\ \vdots\\ x'_{p0}\end{pmatrix}=0$ でなければならない。（当然右辺も 0 である）

すると、$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0=0$ となってしまい、$\boldsymbol{P}^{-1}$ は正則なので $\boldsymbol{x}_0=0$ となり矛盾する。

したがって、$p \leqq p'$ となる。同様にして、$p<p'$ と仮定すれば、$p \geqq p'$ となるので

$p=p'$ となる。したがってまた、$q=q'$

(p, q) を二次形式 $A[\boldsymbol{x}\}$ 、または、対称行列 A の符号数という。

◎2つの実対称行列 A , A' が同値であるためにはそれらの符号数が一致することが必要十分である。（定理5から明らかだが確認のために証明する。）

（証）⇒） $A'={}^tPAP$ を仮定する。実対称行列 A' の固有値を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ としたとき、適当な直交行列 T をとれば、

$${}^tTA'T=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}={}^tT{}^tPAPT={}^t(PT)A(PT)$$

したがって、$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}'$ とすれば

$A'[\boldsymbol{x}]={}^t\boldsymbol{x}A'\boldsymbol{x}={}^t(T\boldsymbol{x}')A'(T\boldsymbol{x}')={}^t\boldsymbol{x}'{}^tTA'T\boldsymbol{x}'={}^tTA'T[\boldsymbol{x}']=\alpha_1 x'^2_1+\cdots+\alpha_n x'^2_n$

$\boldsymbol{x}=PT\boldsymbol{x}''$ とすれば

$A[\boldsymbol{x}]={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t(PT\boldsymbol{x}'')A(PT\boldsymbol{x}'')={}^t\boldsymbol{x}''{}^t(PT)A(PT)\boldsymbol{x}''={}^t(PT)A(PT)[\boldsymbol{x}'']=\alpha_1 x''^2_1+\cdots+\alpha_n$

x''^2_n よって、定理5から符号数は一致する。

⇐) 逆に符号数が一致していれば

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = {}^tQA'Q
$$

となる正則行列 P, Q が存在する。したがって、$A = ({}^tP)^{-1}\,{}^tQA'QP^{-1} = {}^t(QP^{-1})A'(QP^{-1})$

(注 ${}^t((P^{-1})P)) = {}^tP\,{}^t(P^{-1}) = E \to ({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$)

したがって同値となる。

(P. 168 問2)

$(x_1+x_2)^2+x_3x_4$ の符号を求めよ。

$$
x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_3x_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad , \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{とする。}
$$

$$
\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x^4-2x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x(2x-1)(x-2)(2x+1) = 0
$$

固有値は 2 , $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0 → 符号数は $(2, 1)$

($\alpha = 2$ の場合の固有ベクトルを求める)

$$
(A-2E)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ -2x_3+\frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_3-2x_4 \end{pmatrix} = 0 \ \to \ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{←(適当に決める)}
$$

($\alpha = \frac{1}{2}$ の場合の固有ベクトルを求める)

$$
(A-\frac{1}{2}E)x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1+x_2 \\ x_1+\frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4 \end{pmatrix} = 0 \ \to \ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

（ $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ の場合の固有ベクトルを求める）

$$\left(A+\frac{1}{2}E\right)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1+x_2 \\ x_1+\frac{3}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4 \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（ $\alpha = 0$ の場合の固有ベクトルを求める）

$$(A-0E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \\ \frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_3 \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← すべて直交しているので**OK**！

$$\boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{t}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{t}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← 単位ベクトルにする

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t\boldsymbol{TAT} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = TQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \end{pmatrix} {}^t\!\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$$

（P. 168　$A[x] \geqq 0$, $A[x] > 0$）

非負値 : 任意の実ベクトル x に対し、$A[x] \geqq 0$　　→ $A \geqq 0$

正値　: 任意の $\neq 0$ の実ベクトルに対し、$A[x] > 0$　→ $A > 0$

$A \cong A'$, $A \geqq 0 \Rightarrow A' \geqq 0$ （$A \cong A'$, $A > 0 \Rightarrow A' > 0$）

標準形の二次形式

$$A[x] = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 + 0x_{p+q+1}^2 + \cdots + 0x_n^2$$

◎ $A \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \geqq 0 , \cdots , \alpha_n \geqq 0$

◎ $A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0 , p = n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 > 0 , \cdots , \alpha_n > 0$

${}^t x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \neq 0$ であるが $p < n$ ならば $A[x] = 0$ となってしまう。

特に

$$A \geqq 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq 0 \text{ , } A > 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$$

また

$A \geqq 0 , B \geqq 0 \Rightarrow A + B \geqq 0$　（$\alpha_1 + \beta_1 , \cdots , \alpha_p + \beta_p , \beta_{p+1} , 0 , \cdots , 0$）

$A > 0 , B \geqq 0 \Rightarrow A + B > 0$　（$\alpha_1 + \beta_1 , \cdots , \alpha_p + \beta_p , \alpha_{p+1} , \cdots , \alpha_n$）

$A \geqq 0 , c \geqq 0 \Rightarrow cA \geqq 0$　（$c\alpha_1 , \cdots , c\alpha_p , 0 , \cdots , 0$）

$A > 0 , c > 0 \Rightarrow cA > 0$　（$c\alpha_1 , \cdots , c\alpha_n$）

（P. 168　例）

任意の n 次実行列 P に対して、${}^t PP \geqq 0$

${}^t PP[x] = (x , {}^t PPx) = (Px , Px) \geqq 0$　、（注 ${}^t({}^t PP) = {}^t PP$）

特に P が正則ならば、$\boldsymbol{x} \neq 0$ に対し、$P\boldsymbol{x} \neq 0$ よって、$(P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{x}) > 0$

逆に ${}^tPP > 0$ ならば　すべての固有値が > 0 , $\neq 0$ なので、${}^tPP$ は正則である。$det({}^tPP) \neq 0$

$det({}^tPP) = det\,{}^tP\, det\,P = (det\,P)^2 \neq 0$ よって、$det\,P \neq 0$ で正則となる。

◎任意の n 次非負値対称行列 A は $A = {}^tPP$ と表すことができる。

（証明）

$A \geqq 0$ ならば、定理5から、ある n 次正則行列 Q があって

$${}^tQAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とかける。よって、$P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ とおけば、${}^tPP = {}^t(Q^{-1})\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

$= ({}^tQ)^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = A$

（脚注 別証）$A > 0$ のとき、$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ は P. 123 の内積の条件を満たしている。

(3.1) $\langle \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, A\boldsymbol{b}) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle$

(3.2) $\langle c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = (c\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = c\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$

(3.3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = (\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = (A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$

(3.3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = (\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}) = A[\boldsymbol{a}] > 0$ なので

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geqq 0$ かつ $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a} = 0$

よって、P. 104 定理5 により、$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を内積として、正規直行底 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ が存在する。そのとき $\langle \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j \rangle = \delta_{ij} = (\boldsymbol{q}_i, A\boldsymbol{q}_j)$ 、したがって、$Q = (\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$ とおけば

$${}^tQAQ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\boldsymbol{q}_1 & \cdots & A\boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} = E \qquad (END)$$

P の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ とすれば、$A = {}^tPP$ から $a_{ij} = (\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j)$ 、特に

$a_{ii} = (\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_i) \geqq 0$

また、$a_{ii} = 0$ ならば、$\boldsymbol{p}_i = 0$ 、したがって $a_{ij} = (\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = 0\ (1 \leqq j \leqq n)$

$$A = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) & \cdots & 0 & \cdots & (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_n) \\ (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2) & \cdots & 0 & \cdots & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_n) \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \ddots & \\ (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_n) & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_n) & \cdots & 0 & \cdots & (\boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{p}_n) \end{pmatrix}$$

$a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ij} = (\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = 0$

A は実対称行列なので列も行も 0 になる。

また上記の表現 $A={}^tPP$ において $P=TP_1$（P. 106 参 T：直交行列、P_1：正則な三角行列）と分解すれば、$A={}^tP_1{}^tTTP_1={}^tP_1P_1$ よって、はじめから P として三角行列をとることができる。

そのとき

(31) $A={}^tPP$, $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_{nn} \end{pmatrix}$

$$A={}^tPP=\begin{pmatrix} p_{11} & & & 0 \\ p_{12} & p_{22} & & \\ & & \ddots & \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

これから特に、$a_{ii}=\sum_{j=1}^{i}p_{ji}^2=p_{1i}^2+p_{2i}^2+\cdots+p_{ii}^2\geqq p_{ii}^2$ よって

(32) $\prod_{i=1}^{n}a_{ii}\geqq\prod_{i=1}^{n}p_{ii}^2=det({}^tPP)=det(P)^2=|A|$

となる。

（P. 169　注意）

$A>0$ のとき (31) のような表現（ただし、$p_{ii}>0$）は一意的である。実際、

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ \boxed{p_{1i} & \cdots & p_{ii} & 0} & \cdots & & \\ & & & \ddots & & & \\ p_{1j} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{ii} & & \\ & & & & & \ddots & \\ p_{1n} & \cdots & p_{2n} & \cdots & p_{jn} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1i} & \cdots & \boxed{p_{1j}} & \cdots & p_{1n} \\ & \ddots & & & & & \\ & & p_{ii} & \cdots & \boxed{p_{ij}} & \cdots & p_{in} \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \boxed{p_{jj}} & \cdots & p_{jn} \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

（$i\leqq j$ の場合）

$a_{ij}=\sum_{k\leqq i}p_{ki}p_{kj}$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ p_{1j} & \cdots & p_{jj} & 0 & \cdots & & \\ & & & \ddots & & & \\ \boxed{p_{1i} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{ii}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ p_{1n} & \cdots & p_{jn} & \cdots & p_{in} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & \boxed{p_{1j}} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1n} \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boxed{p_{jj}} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{jn} \\ & & \boxed{0} & \ddots & & & \\ & & \boxed{\vdots} & & p_{ii} & \cdots & p_{in} \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

（$j\leqq i$ の場合）

$a_{ij}=\sum_{k\leqq j}p_{ki}p_{kj}$　まとめると、$a_{ij}=\sum_{k=\min(i,j)}p_{ki}p_{kj}$

先にP. 170問3を解いてみる。

$p_{11}^2=2$ から　$\sqrt{2}\times p_{12}=1$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&0&0\\p_{12}&p_{22}&0\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\0&p_{22}&p_{23}\\0&0&p_{33}\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\&x&y\\0&&z\end{pmatrix}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+x^2=2\rightarrow x^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$p_{12}p_{13}+p_{22}p_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y=1\rightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$p_{13}p_{13}+p_{23}p_{23}+z^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+z^2=2\ \rightarrow\ z^2=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\rightarrow z=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{\frac{3}{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}p_{11}&&&&&&&0\\p_{12}&p_{22}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\\p_{14}&p_{24}&p_{34}&p_{44}\\p_{15}&p_{25}&p_{35}&p_{45}&p_{55}\\p_{16}&p_{26}&p_{36}&p_{46}&p_{56}&p_{66}\\&&&&&&\ddots\\p_{1n}&p_{2n}&p_{3n}&p_{4n}&p_{5n}&p_{6n}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{p_{11}}&p_{12}&p_{13}&p_{14}&p_{15}&p_{16}&\cdots&p_{1n}\\&p_{22}&p_{23}&p_{24}&p_{25}&p_{26}&\cdots&p_{2n}\\&&p_{33}&p_{34}&p_{35}&p_{36}&\cdots&p_{3n}\\&&&p_{44}&p_{45}&p_{46}&\cdots&p_{4n}\\&&&&p_{55}&p_{56}&\cdots&p_{5n}\\&&&&&p_{66}&\cdots&p_{6n}\\&&&&&&\ddots\\0&&&&&&&p_{nn}\end{pmatrix}$$

p_{11} を求め順に $p_{12}\sim P_{1n}$ まで求める。

$$\begin{pmatrix}p_{11}&&&&&&&0\\p_{12}&\boxed{p_{22}}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\\p_{14}&p_{24}&p_{34}&p_{44}\\p_{15}&p_{25}&p_{35}&p_{45}&p_{55}\\p_{16}&p_{26}&p_{36}&p_{46}&p_{56}&p_{66}\\&&&&&&\ddots\\p_{1n}&p_{2n}&p_{3n}&p_{4n}&p_{5n}&p_{6n}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}&p_{14}&p_{15}&p_{16}&\cdots&p_{1n}\\&\boxed{p_{22}}&p_{23}&p_{24}&p_{25}&p_{26}&\cdots&p_{2n}\\&&p_{33}&p_{34}&p_{35}&p_{36}&\cdots&p_{3n}\\&&&p_{44}&p_{45}&p_{46}&\cdots&p_{4n}\\&&&&p_{55}&p_{56}&\cdots&p_{5n}\\&&&&&p_{66}&\cdots&p_{6n}\\&&&&&&\ddots\\0&&&&&&&p_{nn}\end{pmatrix}$$

p_{22} を求め順に $p_{23}\sim P_{2n}$ まで求める。

上の作業を続けていくと $p_{11},\cdots,p_{1n},p_{22},\cdots,p_{2n},p_{33},\cdots,p_{3n},\cdots,p_{n-1,n},p_{nn}$ まで求めることができる。したがって、p_{ij} は A によって一意的に決まる。

（$Jacobi$ の変形）

$$x_i' = x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{p_{ij}}{p_{ii}} x_j = x_i + \frac{p_{i,i+1}}{p_{ii}} x_{i+1} + \frac{p_{i,i+2}}{p_{ii}} x_{i+2} + \cdots + \frac{p_{i,\mathrm{n}-1}}{p_{ii}} x_{n-1} + \frac{p_{i,\mathrm{n}}}{p_{ii}} x_n \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

$$p_{ii} x_i' = p_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} p_{ij} x_j = p_{ii} x_i + p_{i,i+1} x_{i+1} + p_{i,i+2} x_{i+2} + \cdots + p_{i,\mathrm{n}-1} x_{n-1} + p_{i,\mathrm{n}} x_n \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

$$\begin{pmatrix} p_{11}x_1' \\ p_{22}x_2' \\ p_{33}x_3' \\ \vdots \\ p_{nn}x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ & & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Px$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i'^2 = p_{11}^2 x_1'^2 + p_{22}^2 x_2'^2 + \cdots + p_{nn}^2 x_n'^2 = \begin{pmatrix} p_{11}x_1' & p_{22}x_2' & p_{33}x_3' & \cdots & p_{nn}x_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}x_1' \\ p_{22}x_2' \\ p_{33}x_3' \\ \vdots \\ p_{nn}x_n' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} {}^t pp \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A[x]$$

また、$A > 0$ のとき 、$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} p_{ii}^2 = |A|$ ならば $p_{ij} = 0\ (i < j)$ 、すなわち A は対角行列となる。逆に A が対角行列であれば、p_{ij} の求め方から $p_{ij} = 0\ (i \neq j)$ となり、$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} p_{ii}^2 = |A|$ となる。

（P. 170　主小行列式）

$$\begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_3 \\ (1 \leqq 2 < 3 < 5 \leqq n) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & a_{24} & \boxed{a_{25}} & a_{26} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & a_{34} & \boxed{a_{35}} & a_{36} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & \boxed{a_{52}} & \boxed{a_{53}} & a_{54} & \boxed{a_{55}} & a_{56} & \cdots & a_{5n} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & \cdots & a_{6n} \\ & & & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{n6} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 & 0 & x_5 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \cdots & a_{5n} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & \cdots & a_{6n} \\ & & & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{n6} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \geqq 0$ ならば、任意のベクトルに対して $A[x] \geqq 0$ なので $\sum_{\mu,\nu}^{k} a_{i(\mu),i(\nu)} x_{i(\mu)} x_{i(\nu)}$ は $\geqq 0$ となる。$A > 0$ に関しても同様に > 0 となる。その係数行列は

$\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix}$ であり、対称行列であるから、 $\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix} \geqq, > 0$

したがって

$\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix}$ は、定理4'' から 0 以上の固有値を対角成分とする対角行列と相似な

ので

$$(33)\quad \begin{vmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{vmatrix} \overset{\text{普通の不等号}\downarrow}{\geqq , >} 0 \quad (1 \leqq i_1 , \cdots , < i_k \leqq n)$$

これから、任意の 1 , 2 次正方行列を選んだ場合、$a_{ii} \geqq , > 0$ がわかる。また、$a_{ii} = 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} & a_{45} & \boxed{a_{46}} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \cdots & a_{5n} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & \boxed{a_{64}} & a_{65} & \boxed{a_{66}} & \cdots & a_{6n} \\ & & & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{n6} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = -a_{ij}^2 \geqq 0 \text{ から } a_{ij} = 0$$

$(1 \leqq j \leqq n)$ を得る。

よって、次の定理6の前半を得る。

定理6

n 次実対称行列 $A = (a_{ij})$ に対し、$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1k} \\ & \ddots & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{pmatrix}$ (主小行列式の一部)とおけば

$A > 0 \iff | A^{(k)} | > 0 \quad (1 \leqq k \leqq n)$

(先に脚注)

例) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - 2x = x(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\to\ x = 0$, $x^2 - 2x - 2 = 0$, $(x - 1)^2 - 1 - 2 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$

$(1 + \sqrt{3}) x_1'^2 - (\sqrt{3} - 1) x_2'^2 + 0 x_3'^2$ ← 二次形式の標準形

（$Jacobi$ の変換による）

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&i\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&i\end{pmatrix}$$

$$x_1{}'=x_1+\frac{p_{12}}{p_{11}}x_2+\frac{p_{13}}{p_{11}}x_3=x_1+x_2+x_3$$

$$x_2{}'=x_2+\frac{p_{23}}{p_{22}}x_3=x_2 \qquad \rightarrow\ p_{11}^2x_1'^2+p_{22}^2x_2'^2+p_{33}^2x_3'^2=x_1'^2+0x_2'^2-x_3'^2\ \leftarrow \text{標準形}$$

$$x_3{}'=x_3$$

確かに符号数は一致する。よって、符号数 $(1,1)$ なので $A \geqq 0$ ではない。しかし、

$$|A^{(1)}|=|1|=1\geqq 0\ ,\ |A^{(2)}|=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0\ ,\ |A^{(3)}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0$$

主小行列式なら、$|1|=1$, $|1|=1$, $|0|=0$, $\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$, $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0$$

つまり、$\geqq$ と $>$ の違いが次の定理に影響してくるはずだ。

（証）$\Leftarrow$ 逆は n に関する帰納法で証明する。$n=1$ の場合は明白。よって、$n-1$ で成り立つとすれば、$A^{(n-1)}$ が使える。よって

$A^{(n-1)}>0$, $|A|>0\ \Rightarrow\ A>0$ をいえばよい。

まず、次の公式を使う。

n 次実対称行列 $A=\begin{pmatrix}A^{(n-1)}&\boldsymbol{a}\\{}^t\boldsymbol{a}&a_n\end{pmatrix}$ において、$|A^{(n-1)}|>,\neq 0$ ならば、$A^{(n-1)-1}$ が存在し

↑

違い！

$$(*)\ A=\begin{pmatrix}E&0\\{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{(n-1)}&0\\0&a_n-A^{(n-1)-1}[\boldsymbol{a}]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a}\\0&1\end{pmatrix}$$

となる。(*) 右辺を計算する。

$$\begin{pmatrix}E&0\\{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{(n-1)}&0\\0&a_n-A^{(n-1)-1}[\boldsymbol{a}]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a}\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E&0\\{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{(n-1)}&0\\0&a_n-{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a}\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E&0\\{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{(n-1)}&\boldsymbol{a}\\0&a_n-{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & \boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a}+a_n-{}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & \boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{a} & a_n \end{pmatrix} = A$

(*) 式から

$|A| = det\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n - A^{(n-1)-1}[\boldsymbol{a}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= |A^{(n-1)}|(a_n - A^{(n-1)-1}[\boldsymbol{a}])$

仮定により、$|A| > 0$, $|A^{(n-1)}| > 0$ なので、$a_n - A^{(n-1)-1}[\boldsymbol{a}] > 0$

$a_n' = a_n - A^{(n-1)-1}[\boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n-1)} \\ x_n \end{pmatrix}$ とおけば

$\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix}[\boldsymbol{x}] = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}^{(n-1)} & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n-1)} \\ x_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}^{(n-1)} & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(n-1)}\boldsymbol{x}^{(n-1)} \\ a_n'x_n \end{pmatrix}$

$= {}^t\boldsymbol{x}^{(n-1)}A^{(n-1)}\boldsymbol{x}^{(n-1)} + a_n'x_n^2$

$= A^{(n-1)}[\boldsymbol{x}^{(n-1)}] + a_n'x_n^2 > 0$ （$|A^{(n-1)}| > 0$, $a_n' > 0$ と帰納法の仮定から）

よって、$\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix} > 0$

$A^{(n-1)}$ は対称行列であり、${}^tB = B \to {}^tBB^{-1} = E \to {}^t(B^{-1})B = E \to B^{-1} = {}^t(B^{-1})$ なので

${}^t(A^{(n-1)-1}) = A^{(n-1)-1}$ である。

$\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\boldsymbol{a}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

から、A と $\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix}$ は同値、したがって、$A > 0$ となる。

$A \geqq 0 \Leftarrow |A^{(k)}| \geqq 0$ （$1 \leqq k \leqq n$）とすると、$|A^{(n-1)}| = 0$ の場合もあるので逆行列がとれないため、上の証明は適用できない。

（P. 171　問4）

$A' = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ {}^t\boldsymbol{x} & 0 \end{pmatrix}$ とおけば、$|A| \neq 0$ なので、(*) から

$$A' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\boldsymbol{x}A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t\boldsymbol{x}A^{-1}\boldsymbol{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{-1}\boldsymbol{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\boldsymbol{x}A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ 0 & -{}^t\boldsymbol{x}A^{-1}\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} \\ {}^t\boldsymbol{x} & 0 \end{pmatrix}$$

$|A'| = |A|(-{}^t\boldsymbol{x}A^{-1}\boldsymbol{x}) = -|A|\times(A^{-1}[\boldsymbol{x}])$

ここで、$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ とすれば、$A^{-1}[\boldsymbol{x}] = {}^t(A\boldsymbol{x}')A^{-1}(A\boldsymbol{x}') = {}^t\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}' = A[\boldsymbol{x}']$

$|A'| = -|A|(A[\boldsymbol{x}'])$

したがって、$A[\boldsymbol{x}'] = x_1'^2 + \cdots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \cdots - x_q'^2$ としたら

$|A| > 0$ つまり、A の正の固有値が p 個で負の固有値が q 個あるはずなので、q が偶数個のとき $|A| > 0$ となる。

$|A'| = |A|(-x_1'^2 - \cdots - x_p'^2 + x_{p+1}'^2 + \cdots + x_q'^2)$ の符号数は (q, p) となる。

$|A| < 0$ つまり、A の正の固有値が p 個で負の固有値が q 個あるはずなので、q が奇数個のとき $|A| < 0$ となる。

$|A'| = |A|(x_1'^2 + \cdots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \cdots - x_q'^2)$ の符号数は (p, q) となる。

(P. 171　注意)

固有値を求めることは困難なので、そのために定理6の存在価値がある。しかし、$|A^{(n)}| = |A| = 0$ の場合、つまり正則でないときは使えない。そこで、次の一般化があるようだ。

階数 r の実対称行列 A があって、A に適当な行および列の置換を行い $|A^{(r)}| \neq 0$ 、かつ、$|A^{(k)}|$ $(1 \leqq k \leqq r)$ の中相隣る2つのものが共に 0 になることはないようにすることができる。

(A_σ の復習)

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^tA_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA_\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a & d \\ e & f & b & g \\ f & h & c & i \\ g & i & d & j \end{pmatrix} \leftarrow \text{列が置換されている。}$$

$${}^tA_\sigma B = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ a & b & c & d \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \leftarrow \text{行が置換されている。}$$

$${}^tA_\sigma BA_\sigma = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & b & g \\ f & h & c & i \\ b & c & a & d \\ g & i & d & j \end{pmatrix}$$

$(a \quad e \quad h \quad j) \rightarrow (e \quad h \quad a \quad j)$

A_σ は直交行列であって、${}^t({}^tA_\sigma BA_\sigma) = {}^tA_\sigma BA_\sigma$ （B：対称行列）→ ${}^tA_\sigma BA_\sigma$ は対称行列

対角成分 $(a \quad e \quad h \quad j)$ を $(j \quad a \quad h \quad e)$ としたいならば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tA_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & d & i & g \\ d & a & c & b \\ i & c & h & f \\ g & b & f & e \end{pmatrix}$$

さて、実対称行列であることを維持しながら上の条件を満たすように簡単に変形できるだろうか、疑問である。これ以上は他書に譲る。

（P. 165　エルミット形式）

1）エルミット行列 $A = (a_{ij})$ $(a_{ij} = \overline{a_{ji}},\ {}^t\overline{A} = A^* = A \rightarrow \overline{A} = {}^tA)$ に対し

$A\{x\} = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{x_i}x_j = {}^t\overline{x}Ax = {}^t({}^tA\overline{x})x = {}^t({}^tx({}^tA\overline{x})) = {}^t({}^tx(\overline{Ax})) = {}^t(x, \overline{Ax})$ ←スカラー

$= (x, \overline{Ax}) = (x, Ax)_u = ({}^t\overline{A}x, \overline{x}) = (Ax, \overline{x}) = (Ax, x)_u$

をエルミット形式という。

$(n = 3$ の場合$)$

$$A\{x\} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & a_{23} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \overline{a_{12}}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \overline{a_{13}}x_1 + \overline{a_{23}}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = (\overline{x}, Ax)$$

$$= a_{11}x_1\overline{x_1} + a_{12}x_2\overline{x_1} + a_{13}x_3\overline{x_1} + \overline{a_{12}}x_1\overline{x_2} + a_{22}x_2\overline{x_2} + a_{23}x_3\overline{x_2} + \overline{a_{13}}x_1\overline{x_3} + \overline{a_{23}}x_2\overline{x_3} + a_{33}x_3\overline{x_3}$$

$$= a_{11}\boldsymbol{x_1}\overline{x_1} + \overline{a_{12}}\boldsymbol{x_1}\overline{x_2} + \overline{a_{13}}\boldsymbol{x_1}\overline{x_3} + a_{12}\boldsymbol{x_2}\overline{x_1} + a_{22}\boldsymbol{x_2}\overline{x_2} + \overline{a_{23}}\boldsymbol{x_2}\overline{x_3} + a_{13}\boldsymbol{x_3}\overline{x_1} + a_{23}\boldsymbol{x_3}\overline{x_2} + a_{33}\boldsymbol{x_3}\overline{x_3}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ a_{12} & a_{22} & \overline{a_{23}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} = (x, {}^tA\overline{x}) = (x, \overline{Ax}) = (x, Ax)_u$$

◎ $A\{x\}$ は x_i に任意の複素数値を代入しても実数値となる。

（証）$A\{x\} = {}^t\overline{x}Ax \rightarrow \overline{A\{x\}} = \overline{{}^t\overline{x}Ax} = {}^tx\overline{A}\,\overline{x} = (x, \overline{Ax}) = A\{x\}$

したがって、共役して等しいので、$A\{x\}$ は実数である。

◎ エルミット行列 A とエルミット形式 $A\{x\}$ は一対一に対応する。

$A\{x\} = {}^t\overline{x}Ax$ と定義したとすれば明らかであるが、エルミット形式の定義がわからない。実数？

2） $A\{x\}$ において変数の正則一次変換 $x = Px'$ を行えば、係数行列は $P^{*}AP$ になる。

係数行列を A' として、x' に関するエルミット形式を考えれば

$${}^{t}\overline{x}Ax = {}^{t}\overline{Px'}APx' = {}^{t}\overline{x'}\,{}^{t}\overline{P}APx' = {}^{t}\overline{x'}A'x' \quad \to \quad A' = {}^{t}\overline{P}AP = P^{*}AP$$

$${}^{t}\overline{A'} = A'^{*} = {}^{t}\left(\overline{{}^{t}\overline{P}AP}\right) = P^{*}AP$$

A' はエルミット行列になる。そして、係数行列は $P^{*}AP$ である。

3） エルミット形式 $A\{x\}$ に対し、変数のユニタリー変換 $x = Ux'$ を行えば、標準形

$$U^{*}AU\{x'\} = \alpha_1\overline{x_1}'x_1' + \alpha_2\overline{x_2}'x_2' + \cdots + \alpha_n\overline{x_n}'x_n'$$

になる。係数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は A の固有値で実数であり、正なるものの個数 p と負なるものの個数 q の組 (p, q) は一定である。(p, q) を A の符号数という。

（証）

エルミット形式 $A\{x\} = {}^{t}\overline{x}Ax$ に対し、適当に変数のユニタリー変換 $x = Ux'$ を行えば

$$A\{x\} = {}^{t}\overline{x}'\,{}^{t}\overline{U}AUx' = {}^{t}\overline{U}AU\{x'\}$$

${}^{t}\overline{U}AU$ はP. 164 , 3）より $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を A の固有値として対角行列になるので

$$A\{x\} = {}^{t}\overline{U}AU\{x'\} = \begin{pmatrix} \overline{x_1}' & \overline{x_2}' & \cdots & \overline{x_n}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1\overline{x_1}'x_1' + \alpha_2\overline{x_2}'x_2' + \cdots + \alpha_n\overline{x_n}'x_n'$$

そこで、A の固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の中で、p 個は >0 , q 個は <0 , 残りは $=0$ であるとする。簡単のために、$\alpha_1, \cdots, \alpha_p > 0$, $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_{p+q} < 0$, $\alpha_{p+q+1}, \cdots, \alpha_n = 0$

であるとする。（底の置換を A_σ を施せばよい。A_σ は直交行列なので ${}^{t}\overline{A_\sigma} = A_\sigma^{-1}$, $A_\sigma^{-1}\,{}^{t}\overline{U}AUA_\sigma = {}^{t}\overline{A_\sigma}\,{}^{t}\overline{U}AUA_\sigma = {}^{t}(\overline{UA_\sigma})A(UA_\sigma)$, UA_σ : ユニタリー行列）

$$P = U\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_p}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{p+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{p+q}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = UQ \text{ とする。} \quad ({}^{t}\overline{Q} = Q)$$

$$
{}^t\overline{P}AP = {}^t(\overline{UQ})AUQ = Q({}^t\overline{U}AU)Q =
\begin{array}{c}
\quad p\text{ 個} \qquad\qquad\qquad q\text{ 個} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & -1 & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & -1 & & & \\
& & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\leftarrow \text{積は対角行列}
$$

よって

$$
A\{\boldsymbol{x}\} = {}^t\overline{P}AP\{\boldsymbol{x}'\} = \overline{x_1'}x_1' + \cdots + \overline{x_p'}x_p' - \overline{x_{p+1}'}x_{p+1}' - \cdots - \overline{x_{p+q}'}x_{p+q}'
$$

となる。

（符号数の一意性の証明）

今、別の正則一次変換 $\boldsymbol{x} = P'\boldsymbol{x}''$ に対して

$$
{}^tP'AP'[\boldsymbol{x}''] = \overline{x_1''}x_1'' + \cdots + \overline{x_{p'}''}x_{p'}'' - \overline{x_{p'+1}''}x_{p'+1}'' - \cdots - \overline{x_{p'+q'}''}x_{p'+q'}''
$$

となったとする。$p = p'$, $q = q'$ を示せばよい。まず、$p+q = rank\ A$ であるから $p+q = p'+q'$ は明らかである。$p > p'$ として矛盾を出す。

$$
(*)\quad \overline{x_1'}x_1' + \cdots + \overline{x_p'}x_p' - \overline{x_{p+1}'}x_{p+1}' - \cdots - \overline{x_{p+q}'}x_{p+q}' = \overline{x_1''}x_1'' + \cdots + \overline{x_{p'}''}x_{p'}'' - \overline{x_{p'+1}''}x_{p'+1}''
$$

$$
- \cdots - \overline{x_{p'+q'}''}x_{p'+q'}'' \quad (\ \boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x} \quad , \quad \boldsymbol{x}'' = P'^{-1}\boldsymbol{x}\ )
$$

であるが、

$x_i' = 0$（$p+1 \leqq i \leqq n$）

$x_i'' = 0$ ($1 \leqq i \leqq p'$)

とした場合

$$
P^{-1} = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\
a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\quad \text{とすれば} \quad
\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{a_{p+1,1}} & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{a_{p+1,n}} \\
\multicolumn{1}{|c}{\vdots} & & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\
\multicolumn{1}{|c}{a_{n1}} & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{a_{nn}} \\
\hline
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$
P'^{-1} = \begin{pmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{p'1} & \cdots & b_{p'n} \\
b_{p'+1,1} & \cdots & b_{p'+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}
\quad \text{とすれば} \quad
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{p'+1}'' \\ \vdots \\ x_{p'+q'}'' \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{ccc}
\hline
\multicolumn{1}{|c}{b_{11}} & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{b_{1n}} \\
\multicolumn{1}{|c}{\vdots} & & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\
\multicolumn{1}{|c}{b_{p'1}} & \cdots & \multicolumn{1}{c|}{b_{p'n}} \\
\hline
b_{p'+1,1} & \cdots & b_{p'+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$\begin{cases} a_{p+1,1}x_1+\cdots+a_{p+1,n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \\ b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ b_{p'1}x_1+\cdots+b_{p'n}x_n=0 \end{cases}$$

← 方程式は $p'+(n-p)$ 個ある。$p>p'$ としたので $p'+(n-p)<n$ となる。P. 111定理10系から自明な解($\neq 0$)をもつ。

その解を $\boldsymbol{x}_0\neq 0$ とすれば

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_{10} \\ \vdots \\ x'_{p0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x''_{p'+1,0} \\ \vdots \\ x''_{n0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{p'+1,1} & \cdots & b_{p'+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n}\end{pmatrix}$$

として

$$\boldsymbol{x}'=P^{-1}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} x'_{10} \\ \vdots \\ x'_{p0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}''=P'^{-1}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x''_{p'+1,0} \\ \vdots \\ x''_{n0}\end{pmatrix}$$

となり、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ のとき (*) は

$$\overline{x'_{10}}x'_{10}+\cdots+\overline{x'_{p0}}x'_{p0}=-\overline{x''_{p'+1,0}}x''_{p'+1,0}-\cdots-\overline{x''_{p'+q',0}}x''_{p'+q',0}$$

となり

$\begin{pmatrix} x'_{10} \\ \vdots \\ x'_{p0}\end{pmatrix}=0$ でなければならない。(当然右辺も 0 である)

すると、$P^{-1}\boldsymbol{x}_0=0$ となってしまい、P^{-1} は正則なので $\boldsymbol{x}_0=0$ となり矛盾する。

したがって、$p\leqq p'$ となる。同様にして、$p<p'$ と仮定すれば、$p\geqq p'$ となるので

$p=p'$ となる。したがってまた、$q=q'$

4) 任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $A\{\boldsymbol{x}\}\geqq 0$ のとき、$A\geqq 0$ 、さらに $\boldsymbol{x}\neq 0$ に対し $A\{\boldsymbol{x}\}>0$ のとき、$A>0$ とかく。($A\{\boldsymbol{x}\}$ が実数なので) $A\{\boldsymbol{x}\}>0$ のとき、$A\{\boldsymbol{x}\}$ を正値エルミット形式という。

任意の n 次複素行列 P に対し、$P^*P={}^t\overline{P}P\geqq 0$ 特に、P : 正則 $\Leftrightarrow$ $P^*P>0$

逆に、任意の $\geqq 0$ なるエルミット行列 A は、$A=P^*P$ の形に表される。

(注 $A\{\boldsymbol{x}\}={}^t\overline{P}AP\{\boldsymbol{x}'\}=\overline{x_1'}x_1'+\cdots+\overline{x_p'}x_p'\geqq 0$ ($\overline{x_i'}x_i'\geqq 0$))

(証)

◎ 任意の n 次複素行列 P に対して、${}^t\overline{P}P\geqq 0$

${}^t\overline{P}P\{x\} = (x , \overline{{}^t\overline{P}Px}) = (x , {}^t\overline{PPx}) = (Px , \overline{Px}) \geqq 0$

特に P が正則ならば、$x \neq 0$ に対し、$Px \neq 0$ よって、${}^t\overline{P}P\{x\} = (Px , \overline{Px}) > 0$

逆に ${}^t\overline{P}P > 0$ ならば すべての固有値が > 0 , $\neq 0$ なので、${}^t\overline{P}P$ は正則である。$det({}^t\overline{P}P) \neq 0$, $det({}^t\overline{P}P) = det\ {}^t\overline{P}\ det\ P \neq 0$ よって、$det\ P \neq 0$ で正則となる。

◎ 任意の $\geqq 0$ なるエルミット行列 A は、$A = P^*P$ の形に表される。

（証）

$A \geqq 0$ ならば、上の 3) から、ある n 次正則行列 Q があって

$${}^t\overline{Q}AQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とかける。よって、$P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ とおけば、${}^t\overline{P}P = {}^t(\overline{Q^{-1}}) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

ここで、${}^t((B^{-1})B)) = {}^tB\,{}^t(B^{-1}) = E \rightarrow ({}^tB)^{-1} = {}^t(B^{-1}))$ だったので

$Q^{-1}Q = E \rightarrow \overline{(Q^{-1})}\overline{Q} = E \rightarrow \overline{(Q)}^{-1} = \overline{(Q^{-1})}$ 、${}^t\overline{(Q^{-1})} = {}^t((\overline{Q})^{-1}) = ({}^t(\overline{Q}))^{-1} = ({}^t\overline{Q})^{-1}$

よって、${}^t\overline{P}P = {}^t(\overline{Q^{-1}}) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = ({}^t\overline{Q})^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = A$

P の列ベクトルを p_i ($1 \leqq i \leqq n$) とすれば、$A = {}^t\overline{P}P$ から $a_{ij} = (p_i , \overline{p_j})$ 、特に

$a_{ii} = (p_i , \overline{p_i}) \geqq 0$

また、$a_{ii} = 0$ ならば、$p_i = 0$ 、したがって $a_{ij} = (p_i , \overline{p_j}) = 0$ ($1 \leqq j \leqq n$)

$$A = \begin{pmatrix} (p_1 , \overline{p_1}) & (p_1 , \overline{p_2}) & \cdots & 0 & \cdots & (p_1 , \overline{p_n}) \\ (p_2 , \overline{p_1}) & (p_2 , \overline{p_2}) & \cdots & 0 & \cdots & (p_2 , \overline{p_n}) \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \ddots & \\ (p_1 , \overline{p_n}) & (p_2 , \overline{p_n}) & \cdots & 0 & \cdots & (p_n , \overline{p_n}) \end{pmatrix}$$

$a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ij} = (p_i , p_j) = 0$

A はエルミット行列なので列も行も 0 になる。

5) $A = (a_{ij}) \geqq , > 0$ とすれば

$$\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix} \geqq, > 0 \quad (1 \leqq i(1) < i(2) < \cdots < i(k) \leqq n)$$

$A \geqq 0$ ならば、任意のベクトルに対して $A\{x\} \geqq 0$ なので $x_{i(1)} , \cdots , x_{i(k)}$ 以外の変数を 0 にし

ても $\sum_{\mu,\nu}^{k} a_{i(\mu),i(\nu)}\overline{x_{i(\mu)}}x_{i(\nu)}$ は ≧ 0 となる。$A>0$ に関しても同様に > 0 となる。係数行列は

$\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix}$ であり、エルミット行列であるから、$\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix} \geqq, > 0$

したがって

$\begin{pmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{pmatrix}$ は、P. 163 , 3)から 0 個以上の正の固有値を対角成分とする対角

行列と相似なので（$A=P^{-1}BP \to |A| = |P^{-1}||B||P| = |B|$）

$$(33)\quad \begin{vmatrix} a_{i(1),i(1)} & & a_{i(1),i(k)} \\ & \ddots & \\ a_{i(k),i(1)} & & a_{i(k),i(k)} \end{vmatrix} \overset{\text{普通の不等号}\ \downarrow}{\geqq,} > 0 \quad (1 \leqq i_1, \cdots, < i_k \leqq n)$$

特に

$a_{ii} \geqq, > 0 \ (1 \leqq i \leqq n), |A| \geqq, > 0$

また、二次形式と同様、$A = {}^t\overline{P}P$ において、複素ベクトル空間でも *Schmidt* の直交化法は可能

で、任意の正則行列は正則なユニタリー行列と三角行列の積に分解できることがわかっている

ので、$P=UP_1$（U：ユニタリー行列、P_1：三角行列）と分解すれば、$A = {}^t\overline{P_1}\,{}^t\overline{U}UP_1 = {}^t\overline{P_1}P_1$ よっ

て、はじめから P として三角行列をとることができる。

そのとき

$$(31)\ A = {}^t\overline{P}P \quad , \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = {}^t\overline{P}P = \begin{pmatrix} \overline{p_{11}} & & & 0 \\ \overline{p_{12}} & \overline{p_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ \overline{p_{1n}} & \overline{p_{2n}} & \cdots & \overline{p_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

これから特に、$a_{ii} = \sum_{j=1}^{i} \overline{p_{ji}}\,p_{ji} \geqq \overline{p_{ii}}\,p_{ii} \geqq, > 0$ よって

$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geqq \prod_{i=1}^{n} \overline{p_{ii}}\,p_{ii} = det\,({}^t\overline{P}P) = |\overline{P}||P| = |A| \geqq 0$

となる。

（注意）$A = P^{*}P$, $P = (\boldsymbol{p}_1 , \cdots , \boldsymbol{p}_n)$ (P : 正則行列) とおけば、$a_{ii} = (\boldsymbol{p}_i , \overline{\boldsymbol{p}_i}) = \| \boldsymbol{p}_i \|^2$

$|A| = |\overline{P}||P| = (abs|P|)^2$ であるから

$$|A| = (abs|P|)^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \| \boldsymbol{p}_i \|^2 = \prod_{i=1}^{n} (\boldsymbol{p}_i , \overline{\boldsymbol{p}_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}\overline{p_{ij}})) = \prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(\| p_{ij} \|^2) \leqq \prod_{i=1}^{n}(n(\underset{1\leqq i,j\leqq n}{Max} \| p_{ij} \|^2) = n^n(\underset{1\leqq i,j\leqq n}{Max} \| p_{ij} \|^2)^n$$

よって

$$abs|P| \leqq n^{\frac{n}{2}}(\underset{1\leqq i,j\leqq n}{Max} \| p_{ij} \|)^n \quad \leftarrow \quad \boldsymbol{Hadamard}$$ （アダマール）の不等式

6）n 次エルミット行列 $A = (a_{ij})$ に対し、$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \cdots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ とおけば

$A > 0 \quad \Leftrightarrow |A^{(k)}| > 0 \quad (1 \leqq k \leqq n)$

(証) $\Rightarrow$ につては 5) から明らか。 $\Leftarrow$ 逆は n に関する帰納法で証明する。$n = 1$ の場合は明白。よって、$n-1$ で成り立つとすれば、$A^{(n-1)}$ が使える。よって

$A^{(n-1)} > 0$, $|A| > 0 \quad \Rightarrow \quad A > 0$ をいえばよい。

まず、次の公式を使う。

n 次エルミット行列 $A = \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & \boldsymbol{a} \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}} & a_n \end{pmatrix}$ において、$|A^{(n-1)}| >, \neq 0 \rightarrow A^{(n-1)-1}$ が存在し

$$(*)\ A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n - A^{(n-1)-1}\{\boldsymbol{a}\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。実際 (*) 右辺を計算する。

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n - A^{(n-1)-1}\{\boldsymbol{a}\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n - {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & \boldsymbol{a} \\ 0 & a_n - {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & \boldsymbol{a} \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}} & {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} + a_n - {}^t\overline{\boldsymbol{a}}A^{(n-1)-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & \boldsymbol{a} \\ {}^t\overline{\boldsymbol{a}} & a_n \end{pmatrix} = A$$

この式から

$$|A| = det\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\overline{a}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n - A^{(n-1)-1}\{a\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= |A^{(n-1)}|\,(a_n - A^{(n-1)-1}\{a\})$$

仮定により、$|A| > 0$, $|A^{(n-1)}| > 0$ なので、$a_n - A^{(n-1)-1}\{a\} > 0$

$a_n' = a_n - A^{(n-1)-1}\{a\}$, $x = \begin{pmatrix} x^{(n-1)} \\ x_n \end{pmatrix}$ とおけば

$$\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix}\{x\} = \begin{pmatrix} {}^t\overline{x^{(n-1)}} & \overline{x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(n-1)} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\overline{x^{(n-1)}} & \overline{x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(n-1)}x^{(n-1)} \\ a_n' x_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\overline{x^{(n-1)}}A^{(n-1)}x^{(n-1)} + a_n'\overline{x_n}x_n$$

$= A^{(n-1)}\{x^{(n-1)}\} + a_n'\overline{x_n}x_n > 0$ （ $|A^{(n-1)}| > 0$, $a_n' > 0$ と帰納法の仮定から ）

よって、$\begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix} > 0$

$A^{(n-1)}$ はエルミット行列であり、${}^t\overline{B} = B \to {}^t\overline{B}B^{-1} = E \to {}^tB(\overline{B^{-1}}) = E \quad \to ({}^tB)^{-1} = (\overline{B^{-1}})$ なので、$(\overline{A^{(n-1)-1}}) = ({}^tA^{(n-1)})^{-1} = {}^t(A^{(n-1)-1})$ である。(注 $({}^tB)^{-1} = (B^{-1})^t$)

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^t\overline{a}A^{(n-1)-1} & 1 \end{pmatrix} = {}^t\overline{\begin{pmatrix} E & A^{(n-1)-1}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = {}^t\begin{pmatrix} E & \overline{A^{(n-1)-1}a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} E & {}^t(A^{(n-1)-1})\overline{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から、$A \cong \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & 0 \\ 0 & a_n' \end{pmatrix}$ したがって、$A > 0$ となる。

ここで、エルミット行列の同値であるが、$A \cong B \Leftrightarrow A = P^*BP$ のはずである。また、上の 3) , 4) から、<u>二つのエルミット行列 A , A' が同値であるためにはそれらの符号数が一致することが必要十分であること</u>がわかる。

◎「エルミット行列 A とエルミット形式 $A\{x\}$ は一対一に対応する。」についてだが、$A\{x\}$ が実数であることが条件かもしれない。$A\{x\} = \cdots + a_{ij}\overline{x_i}x_j + \overline{a_{ji}}x_i\overline{x_j} + \cdots$ において $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ならば任意の x に対して $A\{x\}$ が実数になるからである。ならば、a_{ii} が実数であることに納得できる。

（P. 173　問5）

A , B を2つのエルミット行列とし、特に $A>0$ とする。そのとき、適当な正則行列 P をとれば

$$P^*AP=E \quad , \quad P^*BP=\begin{pmatrix}\beta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n\end{pmatrix}$$

となることを証明せよ。

（証明）$A>0$ なので 3）により、適当な正則行列 P_1 をとれば、$P_1^*AP_1=E$ とすることができる。

${}^t(\overline{P_1^*BP_1})=P_1^*BP_1$ なので $P_1^*BP_1$ はエルミット行列である。よって、適当にユニタリー行列 P_2 をとれば、$P_2^*(P_1^*BP_1)P_2$ を対角行列にすることができる。よって、$P=P_1P_2$ とすればよい。

$$P^*AP=P_2^*P_1^*AP_1P_2=P_2^*EP_2={}^t\overline{P_2}P_2=E$$

（P. 173　正規行列）

$A^*={}^t\overline{A}$ を A の随伴行列という。$A^{**}={}^t\overline{(({}^t\overline{A}))}=A \;\rightarrow\; {}^tA=\overline{(({}^t\overline{A}))}$

$(Ax\,,\,y)_u=(Ax\,,\,\overline{y})={}^t(Ax)\overline{y}={}^tx\,{}^tA\overline{y}={}^tx\,\overline{(({}^t\overline{A}))}\,\overline{y}={}^tx\,\overline{A^*y}=(x\,,\,\overline{A^*y})=(x\,,\,A^*y)_u$

A：エルミット行列　$\Rightarrow$（$Ax\,,\,y)_u=(x\,,\,A^*y)_u=(x\,,\,Ay)_u$

任意の x , y に対し、$(Ax\,,\,y)_u=(x\,,\,Ay)_u$ $\Rightarrow$ $(x\,,\,A^*y)_u=(x\,,\,Ay)_u$ $\Rightarrow A^*=A$

A：ユニタリー行列　$\Rightarrow$ $(Ax\,,\,Ay)_u=(x\,,\,A^*Ay)_u=(x\,,\,y)_u$

任意の x , y に対し、$(Ax\,,\,Ay)_u=(x\,,\,y)_u$ $\Rightarrow$ $(x\,,\,A^*Ay)_u=(x\,,\,y)_u$ $\Rightarrow A^*A=E$

◎ 複素正方行列 A のユニタリー行列による対角化

A がエルミット行列ならば、ユニタリー行列によって対角化できる。

A がユニタリー行列によって対角化できるとすれば

$U^*AU=D$　　U：ユニタリー行列 ， D：対角行列　$\rightarrow$　$A=UDU^*$ とかける。

よって、$A^*=U\overline{D}U^*$（対角行列なので $D^*=\overline{D}$ ，対角行列は交換可能）

したがって、$AA^*=UDU^*U\overline{D}U^*=UD\overline{D}U^*=U\overline{D}DU^*=U\overline{D}U^*UDU^*=A^*A$

すなわち

(36)　$AA^*=A^*A$

この条件を満たす n 次複素正方行列を**正規行列**という。

逆に正規行列 A はユニタリー行列によって対角化できることを証明する。

（証明）

まずは準備として、一般に部分空間 $\boldsymbol{W}$ が A − 不変ならば、$\boldsymbol{W}^{\perp}$ は A^* − 不変である。なぜならば、$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{W}^{\perp}$ とすれば、$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$ であるから

$(\boldsymbol{x} , A^*\boldsymbol{x}') = (A\boldsymbol{x} , \boldsymbol{x}') = 0$

よって、$A^*\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{W}^{\perp}$ すなわち、$\boldsymbol{W}^{\perp}$ は A^* − 不変である。

さて、n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ のときは明らかである。α_1 を A の1つの固有値とし、$\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ を α_1 に対する A のせまい意味での固有空間とする。$\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ は A − 不変であるが、A^* − 不変でもある。実際、$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ とすれば、A と A^* の可換性から

$AA^*\boldsymbol{x} = A^*A\boldsymbol{x} = A^*(\alpha_1\boldsymbol{x}) = \alpha_1 A^*\boldsymbol{x}$

よって、$A^*\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ すなわち、$\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ は A^* − 不変である。したがって、上の内容から、$\boldsymbol{W}^{\perp}_{\alpha_1}$ は $(A^*)^* = A$ − 不変である。

よって、$dim\ \boldsymbol{W}_{\alpha_1} = n_1$ として、V の複素正規直交底 $\boldsymbol{e}_1' , \cdots , \boldsymbol{e}_n'$ を $\boldsymbol{e}_1' , \cdots , \boldsymbol{e}_{n_1}'$ が $\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ の底に、$\boldsymbol{e}_{n_1+1}' , \cdots , \boldsymbol{e}_n'$ が $\boldsymbol{W}^{\perp}_{\alpha_1}$ の底になるようにとり、底の変換 $(\boldsymbol{e}_i) \to (\boldsymbol{e}_i')$ 行列を U_1 とすれば、U_1 はユニタリー行列であり

$\boldsymbol{W}^{\perp}_{\alpha_1}$ が A − 不変だから 0

$$A(\boldsymbol{e}_1' , \cdots , \boldsymbol{e}_{n_1}' , \boldsymbol{e}_{n_1+1}' , \cdots , \boldsymbol{e}_n')$$

$$= (\boldsymbol{e}_1' , \cdots , \boldsymbol{e}_{n_1}' , \boldsymbol{e}_{n_1+1}' , \cdots , \boldsymbol{e}_n')\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \alpha_1 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & A_1' & \\ 0 & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{W}_{\alpha_1}$ が A − 不変だから 0

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{E}_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix}$$

となる。$n_1 = n$ なら、これで証明は終わる。$n_1 < n$ ならば、$U_1U_1^* = \boldsymbol{E} \rightarrow U_1^{-1} = U_1^*$ だから

$U_1^{-1}AU_1(U_1^{-1}AU_1)^* = U_1^{-1}AU_1U_1^*A^*U_1 = U_1^{-1}AA^*U_1 = U_1^{-1}A^*AU_1$

$= U_1^{-1}A^*U_1U_1^{-1}AU_1 = (U_1^*A^*U_1)U_1^{-1}AU_1 = (U_1^{-1}AU_1)^*U_1^{-1}AU_1$

なので、$U_1^{-1}AU_1$ は正規行列であり、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} E_{n_1} & 0 \\ 0 & (A_1')^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \overline{\alpha_1} E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1'(A_1')^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} E_{n_1} & 0 \\ 0 & (A_1')^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \overline{\alpha_1} E_{n_1} & 0 \\ 0 & (A_1')^* A_1' \end{pmatrix}$$

よって、$A_1'(A_1')^* = (A_1')^* A_1'$ となり、A_1' も正規行列であるので、帰納法の仮定より、$(n-n_1)$ 次ユニタリー行列 U_2' があって、$U_2'^{-1} A_1' U_2'$ が対角行列になる。よって

$U = U_1 \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$ とおけば、$UU^* = U_1 \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & (U_2')^* \end{pmatrix} U_1^* = U_1 U_1^* = E$

U はユニタリー行列であり

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}^* U_1^* A U_1 \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & (U_2')^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & (U_2')^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_1'(U_2')^* \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{n_1} & 0 \\ 0 & (U_2')^* A_1' (U_2')^* \end{pmatrix}$ となり、対角行列となる。

よって、次の定理7を得る。

（定理　7　*Toeplitz*（テプリッツ） 定理）

複素正方行列 A がユニタリー行列によって対角化できるためには、A が正規行列であることが必要十分である。

（定理　7'）

A の固有値の中相異なるものを $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とし、α_i に対する A のせまい意味での固有空間を W_{α_i} とする。W_{α_i} $(1 \leqq i \leqq s)$ が内積 $(x, y)_u$ に関して直交し、かつ V がそれらの直和になるためには、A が正規行列であることが必要十分である。

（証明）

$AA^* = A^*A$ ならば、定理7より、適当なユニタリー行列 U をとれば、$U^{-1}AU$ を対角行列にすることができるので、後はP. 146の例4の証明と同様である。逆に、直和に分解できたとしたら、P. 147の3）⇒1）の証明と同様（P はユニタリー行列になる）にして $P^{-1}AP = P^*AP$ は対角行列になる。したがって、P. 174 の (35) , (36) から正規行列となる。

（P. 168　注意1）

$2m$ 個の行列 $A_1, \cdots, A_m, A_1^*, \cdots, A_m^*$ が互いに交換可能ならば、あるユニタリー行列 U があって、$U^{-1}A_iU$（$1 \leqq i \leqq m$）が同時に対角化可能である。また、逆も成立する。

（証明）ここでは、$m = 2$ とし、n についての数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のときは明らかである。よって、$< n$ で成り立つと仮定し n で成り立つことを証明する。

A_1 の固有値を α_1 とし、α_1 に対する A_1 の固有空間を W_{α_1} とする。$W_{\alpha_1} = V$ ならば、$W_{\alpha_1} = \{ x \,;\, x \in V, (A_1 - \alpha_1 E)x = 0 \} = V$ なので $A_1 = \alpha_1 E$ となり、任意のユニタリー行列 U に対し、$U^{-1}(\alpha_1 E)U = \alpha_1 E$ となるので、A_1 は除外してもよいことになる。

次に、$W_{\alpha_1} \subsetneqq V$ とする。

$x \in W_{\alpha_1}$ ならば、

$A_1A_ix = A_iA_1x = A_i(A_1x) = \alpha_1 A_ix$　（$1 \leqq i \leqq 2$）

$A_1A_i^*x = A_i^*A_1x = A_i^*(A_1x) = \alpha_1 A_i^*x$　（$1 \leqq i \leqq 2$）

よって $A_ix, A_i^*x \in W_{\alpha_1}$ となる。すなわち、W_{α_1} はすべての A_i, A_i^*（$1 \leqq i \leqq 2$）に関して A_i－不変、A_i^*－不変である。

そのとき、$W_{\alpha_1}{}^{\perp}$ も A_i－不変、A_i^*－不変である。実際、$x' \in W_{\alpha_1}{}^{\perp}$ とすれば、任意の $x \in W_{\alpha_1}$ に対し、$A_ix, A_i^*x \in W_{\alpha_1}$ であるから、$(x, A_ix')_u = (A_i^*x, x')_u = 0$ よって、$A_ix' \in W_{\alpha_1}{}^{\perp}$ となる。また、$(A_i^*x', x)_u = (x', A_ix)_u = 0$ よって、$A_i^*x' \in W_{\alpha_1}{}^{\perp}$

今、$dim\, W_{\alpha_1} = n_1$ とす、V の正規直交底 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ を $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n_1}$ が W_{α_1} の底になる（従って、$e'_{n_1+1}, \cdots, e'_n$ が $W_{\alpha_1}{}^{\perp}$ の底になる）ようにとり、$U_1 = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ とおけば、$n_1 < n$ なので、U_1 を共通として

$$A_i(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix} \to A'_i = U_1^*A_iU_1 = \begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

（ただし、$A^{(1)}$ は n_1 次、$A^{(2)}$ は $n-n_1$ 次正方行列である。）

となる。また、$A_iA_j^* = A_j^*A_i$（$1 \leqq i, j \leqq 2$）なので

$$A'_iA'^*_j = U_1^*A_iU_1U_1^*A_j^*U_1 = U_1^*A_iA_j^*U_1 = U_1^*A_j^*A_iU_1 = U_1^*A_j^*U_1U_1^*A_iT_1 = A'^*_jA'_i$$

となり、$A'_iA'^*_j = A'^*_jA'_i$（$1 \leqq i, j \leqq 2$）も互いに交換可能である。

$$\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_j^{(1)*} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^{(1)}A_j^{(1)*} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)}A_j^{(2)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^{(1)*} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_j^{(1)*}A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_j^{(2)*}A_i^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow A_i^{(1)}A_j^{(1)*} = A_j^{(1)*}A_i^{(1)}\ ,\ A_i^{(2)}A_j^{(2)*} = A_j^{(2)*}A_i^{(2)}$$

となり、互いに交換可能となる。

$$A'_iA'^*_i = U_1^*A_iU_1U_1^*A_i^*U_1 = U_1^*A_iA_i^*U_1 = U_1^*A_i^*A_iU_1 = U_1^*A_i^*U_1U_1^*A_iU_1 = A'^*_iA'_i$$

したがって、A'_i は正規行列である。

つまり、$A_i^{(1)}, A_i^{(2)}$ も正規行列である。

$n_1 < n$ なので帰納法の仮定より、n_1 次のユニタリー行列 $U_2^{(1)}$,（$n-n_1$）次のユニタリー行列 $U_2^{(2)}$ があって $U_2^{(1)*}A_i^{(1)}U_2^{(1)}$, $U_2^{(2)*}A_i^{(2)}U_2^{(2)}$（$1 \leqq i \leqq 2$）は同時に対角行列になる。

よって、$U = U_1\begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix}$ とおけば

$$U^* = \left(U_1\begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix}^* U_1^* = \begin{pmatrix} U_2^{(1)*} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)*} \end{pmatrix} U_1^*$$

$$= \begin{pmatrix} U_2^{(1)-1} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)-1} \end{pmatrix} U_1^{-1} = \left(U_1\begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix}\right)^{-1} = U^{-1}$$

となり、U はユニタリー行列となる。また、

$$U^*A_iU = \begin{pmatrix} U_2^{(1)*} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)*} \end{pmatrix} U_1^*A_iU_1 \begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1 \leqq i \leqq 2)$$

$$= \begin{pmatrix} U_2^{(1)*} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ 0 & A_i^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{(1)*}A_i^{(1)}U_2^{(1)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2)*}A_i^{(2)}U_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

したがって、U^*A_iU（$1 \leqq i \leqq 2$）は U によって同時に対角化される。

逆については、実際、ある U に対し U^*A_iU（$1 \leqq i \leqq 2$）が同時に対角行列になるとすれば

U^*A_iU は対角行列なので $(U^*A_iU)(U^*A_jU) = (U^*A_jU)(U^*A_iU) \rightarrow U^*A_iA_jU = U^*A_jA_iU$

$\rightarrow A_iA_j = A_jA_i$

また、U^*A_iU が対角行列ならば $U^*A_i^*U$ も対角行列なので $U^*A_j^*U$ も対角行列になる。よって

$(U^*A_iU)(U^*A_j^*U) = (U^*A_j^*U)(U^*A_iU) \rightarrow U^*A_iA_j^*U = U^*A_j^*A_iU \rightarrow A_iA_j^* = A_j^*A_i$

よって、互いに交換可能となる。

（P. 175　注意2）

P. 164の 5) から定理7の「十分」の部分は、適当なユニタリー行列 U をとれば

$$U^*AU = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{nn} \end{pmatrix} = C \text{（三角行列）}$$

$A = UCU^*$

と表される。よって、$AA^* = A^*A$ ならば

$(UCU^*)(UC^*U^*) = UCC^*U^* = (UC^*U^*)(UCU^*) = UC^*CU^* \rightarrow CC^* = C^*C$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & & & \\ & & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{c_{11}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \overline{c_{1i}} & \cdots & \overline{c_{ii}} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \overline{c_{1n}} & \cdots & \overline{c_{in}} & \cdots & \overline{c_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{c_{11}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \overline{c_{1i}} & \cdots & \overline{c_{ii}} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \overline{c_{1n}} & \cdots & \overline{c_{in}} & \cdots & \overline{c_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & & & \\ & & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

したがって、両辺の（i, i）成分を比較すると $\sum_{j \geqq i} c_{ij}\overline{c_{ij}} = \sum_{j \leqq i} \overline{c_{ji}}c_{ji}$（$1 \leqq i \leqq n$）

$\sum_{j > i} \| c_{ij} \|^2 + \| c_{ii} \|^2 = \sum_{j < i} \| c_{ji} \|^2 + \| c_{ii} \|^2$（$1 \leqq i \leqq n$）

よって、$\sum_{j > i} \| c_{ij} \|^2 = \sum_{j < i} \| c_{ji} \|^2$（$1 \leqq i \leqq n$）

$i = 1$ の場合、右辺 $= \sum_{j < 1} \| c_{j1} \|^2 = 0$、したがって左辺も $= 0$ つまり $\sum_{j > 1}^{n} \| c_{1j} \|^2 = 0$

$\rightarrow c_{1j} = 0$（$2 \leqq j \leqq n$）$\rightarrow c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = \cdots = c_{1n} = 0$

$i=2$ の場合、右辺 $=\sum_{j<2}\|c_{j2}\|^2=0$ 、したがって左辺も $=0$ つまり $\sum_{j>2}^{n}\|c_{2j}\|^2=0$

$\rightarrow\ c_{2j}=0\ (3\leqq j\leqq n)\rightarrow c_{23}=c_{24}=c_{25}=c_{26}=\cdots=c_{2n}=0$

$i=3$ の場合、右辺 $=\sum_{j<3}\|c_{j3}\|^2=0$ 、したがって左辺も $=0$ つまり $\sum_{j>3}^{n}\|c_{3j}\|^2=0$

$\rightarrow\ c_{3j}=0\ (4\leqq j\leqq n)\rightarrow c_{34}=c_{35}=c_{36}=c_{37}=\cdots=c_{3n}=0$

$i=4$ の場合、右辺 $=\sum_{j<4}\|c_{j4}\|^2=0$ 、したがって左辺も $=0$ つまり $\sum_{j>4}^{n}\|c_{4j}\|^2=0$

$\rightarrow\ c_{4j}=0\ (5\leqq j\leqq n)\rightarrow c_{45}=c_{46}=c_{47}=c_{48}=\cdots=c_{4n}=0$

以下同様にして、$c_{ij}=0$ （$1\leqq i<j\leqq n$）を得る。よって、C は対角行列である。

（P. 175　問1）

A が正規行列 $\Leftrightarrow$ 任意のベクトル x に対し、$\|Ax\|=\|A^*x\|$

（証明）

$\Rightarrow$) $\|Ax\|^2=(Ax,Ax)_u=(x,A^*Ax)_u=(x,AA^*x)_u=(A^*x,A^*x)_u=\|A^*x\|^2$

$\|Ax\|,\|A^*x\|>0$ なので $\|Ax\|=\|A^*x\|$

$\Leftarrow$) $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)_u=\|x\|^2+(x,y)_u+(y,x)_u+\|y\|^2$

$(y,x)_u=\overline{(x,y)_u}$ なので、$(x,y)_u+(y,x)_u=2Re(x,y)_u$

$Re(x,y)_u=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$

任意の x,y に対し、$Re(Ax,Ay)_u=\frac{1}{2}(\|Ax+Ay\|^2-\|Ax\|^2-\|Ay\|^2)$

$=\frac{1}{2}(\|A^*x+A^*y\|^2-\|A^*x\|^2-\|A^*y\|^2)=Re(A^*x,A^*y)_u$

したがって

$Re(Ax,Ay)_u=Re(A^*x,A^*y)_u$

x は任意なので、ix とおいても成り立つはずである。

$\|ix+y\|^2=(ix+y,ix+y)_u=(ix,ix)_u+(ix,y)_u+(y,ix)_u+(y,y)_u$

$=i\times(-i)(x,x)_u+(ix,y)_u+(y,ix)_u+\|y\|^2$

$=\|x\|^2+(ix,y)_u+(y,ix)_u+\|y\|^2=\|x\|^2+i(x,y)_u-i(y,x)_u+\|y\|^2$

$=\|x\|^2+i(x,y)_u-i\overline{(x,y)_u}+\|y\|^2=\|x\|^2+i\{(x,y)_u-\overline{(x,y)_u}\}+\|y\|^2$

ここで、 $\boxed{\frac{1}{2i}\{(x,y)_u-(\overline{x,y})_u)=Im(x,y)_u}$ なので

$= \| \boldsymbol{x} \|^2 + i\,2\,i\,Im\,(\,\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\,)_u + \| \boldsymbol{y} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 - 2Im\,(\,\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\,)_u + \| \boldsymbol{y} \|^2$

よって

$$-\frac{1}{2}Im\,(\,\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\,)_u = \| i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 - \| \boldsymbol{x} \|^2 - \| \boldsymbol{y} \|^2$$

$$-\frac{1}{2}Im\,(\,A\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}\,)_u = \| iA\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y} \|^2 - \| A\boldsymbol{x} \|^2 - \| A\boldsymbol{y} \|^2$$

$$= \| A(\,i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,) \| - \| A\boldsymbol{x} \|^2 - \| A\boldsymbol{y} \|^2$$

$$= \| A^*(\,i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,) \|^2 - \| A^*\boldsymbol{x} \|^2 - \| A^*\boldsymbol{y} \|^2 = -\frac{1}{2}Im\,(\,A^*\boldsymbol{x}\,,\,A^*\boldsymbol{y}\,)_u$$

$$Im\,(\,A\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}\,)_u = Im\,(\,A^*\boldsymbol{x}\,,\,A^*\boldsymbol{y}\,)_u$$

実部、虚部ともに等しいので、$(\,A\boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}\,)_u = (\,A^*\boldsymbol{x}\,,\,A^*\boldsymbol{y}\,)_u = (\,\boldsymbol{x}\,,\,A^*A\boldsymbol{y}\,)_u = (\,\boldsymbol{x}\,,\,AA^*\boldsymbol{y}\,)_u$

任意の $\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}$ に対して成り立つので、$A^*A = AA^*$ となる。

（P. 175　問2）

A が正規行列のとき、$\boldsymbol{x}$ を A の固有値 α に対する固有ベクトルとすれば、$\boldsymbol{x}$ は A^* の $\overline{\alpha}$ に対する固有ベクトルである。

（証明）

A が正規行列ならば、$A-\alpha E$ も正規行列である。なぜなら、

$$(\,A-\alpha E\,)^*(\,A-\alpha E\,) = (\,A^*-\overline{\alpha}E\,)(\,A-\alpha E\,) = A^*A-\alpha A^*-\overline{\alpha}A+\|\alpha\|^2E$$

$$= AA^*-\overline{\alpha}A-\alpha A^*+\|\alpha\|^2E = (\,A-\alpha E\,)(\,A^*-\overline{\alpha}E\,) = (\,A-\alpha E\,)(\,A-\alpha E\,)^*$$

よって、$\boldsymbol{x}$ を α に関する A の固有ベクトルとすれば、問1から

$$0 = \|\,(\,A-\alpha E)\boldsymbol{x}\,\| = \|\,(\,A-\alpha E)^*\boldsymbol{x}\,\| = \|\,(\,A^*-\overline{\alpha}E\,)\boldsymbol{x}\,\| \quad \to \quad (\,A^*-\overline{\alpha}E\,)\boldsymbol{x} = 0$$

したがって、$A^*\boldsymbol{x} = \overline{\alpha}\boldsymbol{x}$　すなわち、$\boldsymbol{x}$ は $\overline{\alpha}$ に関する A^* の固有ベクトルとなる。

（別証）

P. 174 (35)　$A = UDU^*$　（U : ユニタリー行列 , D : 対角行列 ）

と表せるので、D の対角成分を $\alpha_i\,(\,1 \leqq i \leqq n\,)$ 、U の列ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とすれば

$U = (\,\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{u}_n\,)\,,\,AU = UD$ なので、

$$AU = A(\,\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{u}_n\,) = (\,\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{u}_n\,)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{u}_i = \alpha_i\boldsymbol{u}_i$ 、すなわち、$\boldsymbol{u}_i$ は α_i に対する A の固有ベクトルとなる。よって与えられた α に対

し、$\{ \boldsymbol{u}_i ; \alpha_i = \alpha \}$ はそれに対する A の固有空間 W_α の底になる。同様に $A^* = U\overline{D}U^*$ から $A^*U = U\overline{D}$ なので

$$A^*U = A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & & 0 \\ & \overline{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

となり、$A^*\boldsymbol{u}_i = \overline{\alpha}_i\boldsymbol{u}_i$ 同様に、$\boldsymbol{u}_i$ は $\overline{\alpha_i}$ に対する A^* の固有ベクトルとなる。よって与えられた α に対し、$\{ \boldsymbol{u}_i ; \overline{\alpha_i} = \overline{\alpha} \}$ はそれに対する A^* の固有空間 $W_{\overline{\alpha}}$ の底になる。

故に、$W_\alpha = W_{\overline{\alpha}}$ となり、任意の固有ベクトル $\boldsymbol{x} \in W_{\overline{\alpha}} = W_\alpha$ に対し $A^*\boldsymbol{x} = \overline{\alpha}\boldsymbol{x}$ となる。

(P. 175 例1)

(36) $A^*A = AA^*$ (正規行列)

エルミット行列 ($A^* = A$)、ユニタリー行列 ($UU^* = E$) ともに正規行列である。

$A = UDU^*$ (U : ユニタリー行列 , D : 対角行列) とかけば

A : エルミット行列 $\Leftrightarrow$ $A^* = A$ $\Leftrightarrow$ $D = \overline{D}$ $\Leftrightarrow$ α_i : 実数 ($1 \leqq i \leqq n$)

ここで、α_i ($1 \leqq i \leqq n$) は D の対角成分、すなわち A の固有値

A : ユニタリー行列 $\Leftrightarrow$ $A^*A = E$ $\Leftrightarrow$ $U\overline{D}U^*UDU^* = E$ $\Leftrightarrow$ $\overline{D}D = E$ $\Leftrightarrow$ $\| \alpha_i \| = 1$ ($1 \leqq i \leqq n$)

(P. 176 問3)

$A = B + iC$, (B , C : エルミット行列) とすれば、A : 正規行列 $\Leftrightarrow$ B , C : 交換可能

(証明)

$\Rightarrow$)

$(B+iC)^*(B+iC) = (B-iC)(B+iC) = B^2 + iBC - iCB + C^2$

$(B+iC)(B+iC)^* = (B+iC)(B-iC) = B^2 + iCB - iBC + C^2$

$(B+iC)^*(B+iC) = (B+iC)(B+iC)^* \Leftrightarrow iBC - iCB = iCB - iBC \Leftrightarrow BC - CB = 0 \Leftrightarrow BC = CB$

(P. 176 問4)

任意の正則行列 A は、$A = HU$, H : 正値エルミット行列 , U : ユニタリー行列、という形に一意的に表される。また、A : 正則正規行列 $\Leftrightarrow$ B , C : 交換可能

(証明)

任意の正則行列 A に対し、P. 164エルミット行列性質 6) から、$A = U_1DU_2$ (U_1 , U_2 : ユニタ

リー行列 , D : 対角成分がすべて正の対角行列) とかくことができる。

$H = U_1 D U_1^*$, $U = U_1 U_2$ とすれば、$A = HU$ となり、H が正値エルミット行列であることは明らかである。$U^* U = U_2^* U_1^* U_1 U_2 = E$ なので U はユニタリー行列となる。

一意性について

$A = H'U'$ となる別の正値エルミット行列 H' とユニタリー行列 U' が存在したとすれば

$AA^* = HUU^*H^* = H^2$, $AA^* = H'^2$ を得る。 したがって、$H^2 = H'^2 \to H = H'$ を示せばよい。

$H = U_1 \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} U_1^{-1}$, $d_i > 0$ とすれば、$H^2 = U_1 \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix} U_1^{-1}$

ここで、$d_i = d_j \Leftrightarrow d_i^2 = d_j^2$ であるから、U_1 の列ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ とすれば、

$$H(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$$H^2(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix}$$

よって、d_i に対する固有空間 W_{d_i} と d_i^2 に対する固有空間 $W_{d_i^2}$ は一致する。つまり

$$V = W_{d_1} \dotplus \cdots \dotplus W_{d_n} = W_{d_1^2} \dotplus \cdots \dotplus W_{d_n^2}$$

同様に、H' , H'^2 の固有空間も一致する。したがって、$H^2 = H'^2$ ならば

$$H'^2 = H^2 = U_1 \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

なので、H'^2 も同じ固有値 d_1^2 , $\cdots$, d_n^2 をもち、H^2 と同じ固有空間に分解される。よって、H' も固有値 d_1 , $\cdots$, d_n をもち、同じ固有空間に分解される。すなわち、H , H' の固有空間は一致し、かつ対応する固有値も一致する。つまり、同じ U_1 により対角化され等しいので $H = H'$ となる。

後半)

A が正則正規行列ならば、$AA^* = A^*A \Leftrightarrow HUU^*H = U^*HHU \Leftrightarrow H^2 = U^{-1}H^2U$

$\Leftrightarrow UH^2 = H^2U \Leftrightarrow H^2$, U : 交換可能

H^2 , U : 交換可能ならば、H^2 の 固有値 d_i^2 に対する固有空間を $W_{d_i^2}$ とすれば、任意の $\boldsymbol{x} \in W_{d_i^2}$ に対し、$H^2(U\boldsymbol{x}) = UH^2\boldsymbol{x} = Ud_i^2\boldsymbol{x} = d_i^2(U\boldsymbol{x})$ すなわち、$U\boldsymbol{x} \in W_{d_i^2}$ よって、$W_{d_i^2}$ は

U－不変 である。

逆に、各 $W_{d_i^2}$ が U－不変 ならば、任意の $x \in W_{d_i^2}$ に対し、$Ux \in W_{d_i^2}$ である。よって

$H^2(Ux) = d_i^2(Ux) = Ud_i^2x = UH^2x$ なので、$H^2U = UH^2$ （各 $W_{d_i^2}$ に注意）

したがって

H^2, U：交換可能 ⇔ 各 $W_{d_i^2}$ が U－不変 ⇔ 各 W_{d_i} が U－不変 ⇔ H, U：交換可能

（P. 176 問5）

$A_1, \cdots, A_m$ をエルミット行列とすれば、$\sum_{i=1}^{m} A_i^2 = 0 \Rightarrow A_i = 0\ (1 \leqq i \leqq m)$

（証明）

$A_k = (a_{ij}^{(k)})\ (a_{ij}^{(k)} = \overline{a_{ji}^{(k)}})$ とおけば $A_k^2 = (\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}^{(k)})$、よって、$A_k^2$ の (i, i) 成分は

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell i}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} \overline{a_{i\ell}^{(k)}} = \sum_{\ell=1}^{n} \| a_{i\ell}^{(k)} \|^2$ となる。つまり、$tr(A_k^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \| a_{i\ell}^{(k)} \|^2$ 、仮定から

$\sum_{k=1}^{m} A_k^2 = 0$ なので、$tr(\sum_{k=1}^{m} A_k^2) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \| a_{i\ell}^{(k)} \|^2 = 0$

したがって、$a_{i\ell}^{(k)} = 0\ (1 \leqq i, \ell \leqq n, 1 \leqq k \leqq m)$、故に、$A_k = 0\ (1 \leqq k \leqq m)$

（P. 176 例2 複素ベクトル空間での射影子）

$x = x_1 + x_2\ (x_1 \in W, x_2 \in W^{\perp}, V = W \dotplus W^{\perp})$

$x_1 \in W_1$ とすれば $x_1 = x_1 + 0$, $x_1 \in W$, $0 \in W^{\perp}$ よって、$Ax_1 = x_1$ したがって、任意の x $\in V$ に対し、$A^2x = Ax_1 = x_1 = Ax \rightarrow A^2 = A$

次に、任意の $x, y \in V$ に対し、$x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ $(x_1, y_1 \in W,\ x_2, y_2 \in W^{\perp})$

とすれば、

$(Ax, y)_u = (x_1, y_1 + y_2)_u = (x_1, y_1)_u$

$= (x_1 + x_2, y_1)_u = (x, Ay)_u$

一方 $(Ax, y)_u = (x, A^*y)_u$ （P. 173 参照）

よって、すべての x, y に対して、$(x, Ay)_u = (x, A^*y)_u$ なので、$A^* = A$ となる。

W への射影子 A （$A^2 = A$, $A^* = A$）を冪等エルミット行列という。

逆に、そのような A が与えられたとすれば、

$W = \{ \boldsymbol{x} \,;\, \boldsymbol{x} \in V \,,\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \}$ ， $W' = \{ \boldsymbol{x} \,;\, \boldsymbol{x} \in V \,,\, A\boldsymbol{x} = 0 \}$

とすれば、W , W' が部分空間であることは明らかである。$V = W \dotplus W'$ (直和) となる。実際、

$\boldsymbol{x} \in W \cap W'$ ならば、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 0$ よって、$W \cap W' = \{ 0 \}$

また、$\boldsymbol{x} \in W$, $\boldsymbol{y} \in W'$ に対して

$(\boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{y})_u = (A\boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{y})_u = (\boldsymbol{x} \,,\, A^*\boldsymbol{y})_u = (\boldsymbol{x} \,,\, A\boldsymbol{y})_u = (\boldsymbol{x} \,,\, 0)_u = 0$

よって、$W \perp W'$ 、したがって P. 131問1から $V = W \dotplus W'$ (直和)、また、$W' = W^{\perp}$ となる。

また、部分空間 W , W' への射影子をそれぞれ A , A' とすれば、$W \perp W'$ となるためには、

$AA' = 0$ が必要十分である。

（復習）

任意の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V = W \dotplus W'$ （$\boldsymbol{x}_1 \in W$ ， $\boldsymbol{x}_2 \in W'$ ）に対し、A は W への

射影子なので、定義から $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$ 、また A は一次変換なので $A(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}_1) + A(\boldsymbol{x}_2)$

$= \boldsymbol{x}_1 + A(\boldsymbol{x}_2)$ したがって、$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1 + A(\boldsymbol{x}_2)$ から $A(\boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。

実際、$W \perp W'$ ならば、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し、$A'(\boldsymbol{x}) \in W'$ なので、$AA'(\boldsymbol{x}) = 0$ したがって

$AA' = 0$ となる。同様に $A'A = 0$ である。

逆に、$A'A = 0$ ならば、任意の $\boldsymbol{x} \in W$, $\boldsymbol{y} \in W'$ に対し、$(\boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{y})_u = (A\boldsymbol{x} \,,\, A'\boldsymbol{y})_u$

$= (A'A\boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{y})_u = 0$ よって、$W \perp W'$. $AA' = 0$ でも同様である。

また、B がエルミット行列のとき、W が $B-$ 不変なるためには $AB = BA$ が必要十分である。

なぜなら、W が $B-$ 不変ならば、任意の $\boldsymbol{x} \in W$ に対し、$B\boldsymbol{x} \in W$ したがって $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ なの

で$AB\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x}$ よって、$AB = BA$

任意の $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対し、$B\boldsymbol{y} \in W$ したがって、$B^* = B$ なので

$(B\boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{y})_u = (\boldsymbol{x} \,,\, B\boldsymbol{y})_u = 0$ したがって、$B\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ よって、$AB\boldsymbol{x} = 0$

$BA\boldsymbol{x} = B(0) = 0$ なので、$AB = BA$

$\boldsymbol{x} = 0$ ならば $AB\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x}$

以上により、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $AB = BA$

逆に、$AB = BA$ を仮定とする。$\boldsymbol{x} \in W$, $\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ に対し

$(Bx, y)_u = (BAx, y)_u = (ABx, y)_u = (Bx, Ay)_u = (Bx, 0)_u = 0$

よって、$Bx \in W$ したがって、B－不変となる。

定理7' から、正規行列に対し、相異なる固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とするとき

(*) $V = W_{\alpha_1} \dot{+} \cdots \dot{+} W_{\alpha_s}$ （直和）， $W_{\alpha_i} \perp W_{\alpha_j}$ （$1 \leqq i, j \leqq s$）

が成立する。よって、W_{α_i} への射影子を A_i とすれば (*) から

各 W_{α_i} の底を $dim\ W_{\alpha_i} = n_i$ とし、$u_1^{(i)}, \cdots, u_{n_i}^{(i)}$ とすれば、$u_1^{(1)}, \cdots, u_{n_s}^{(s)}$ を V の正規直交底

とすることができるので

$$A(u_1^{(1)}, \cdots, u_{n_s}^{(s)}) = (u_1^{(1)}, \cdots, u_{n_s}^{(s)}) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \alpha_s \end{pmatrix}$$

$$= (u_1^{(1)}, \cdots, u_{n_s}^{(s)}) \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \alpha_2 E_2 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s E_s \end{pmatrix} \right\}$$

$(u_1^{(1)}, \cdots, u_{n_s}^{(s)}) = U$ とすれば

$$A = U \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + U \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \alpha_2 E_2 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + \cdots + U \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s E_s \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$= \alpha_1 U \begin{pmatrix} E_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + \alpha_2 U \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + \cdots + \alpha_s U \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_s \end{pmatrix} U^{-1}$$

$= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s$

また、$A_1 + A_2 + \cdots + A_s$

$$= U \begin{pmatrix} E_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + U \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + \cdots + U \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_s \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$= U \left\{ \begin{pmatrix} E_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_s \end{pmatrix} \right\} U^{-1} = UEU^{-1} = E$$

A_iA_j（$i \neq j$）

となる。

逆に、$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s$ ，$A_1 + A_2 + \cdots + A_s = E$ ，$A_iA_j = 0$（$i \neq j$）

を満たす $A_1, \cdots, A_s$ が存在すれば

$A_i(A_1 + A_2 + \cdots + A_s) = A_i^2 = A_i$

また、$W_i = A_iV$ とすれば、$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_s$（P.132 の (2) , (3) の証明と同じ）

$W_i \perp W_j$ については

$x \in W_i$, $y \in W_j$ に対し、$(x, y)_u = (A_ix, A_jy)_u = (x, A_iA_jy)_u = (x, 0)_u = 0$

よって、$W_i \perp W_j$

$A_i^* = A_i$ については

任意の $x = x_1 + \cdots + x_i + \cdots + x_s \in V$ ，$y = y_1 + \cdots + y_i + \cdots + y_s \in V$（$x_i, y_i \in W_i$（$1 \leqq i \leqq s$）

$W_i = A_iV = \{x ; x \in V, A_ix = x\}$ だったので

$(A_ix, y)_u = (A_ix, y_1 + \cdots + y_i + \cdots + y_s)_u = (x_i, y_i)_u = (x_1, y_i)_u + \cdots + (x_s, y_i)_u$

$= (x_1 + \cdots + x_i + \cdots + x_s, y_i)_u = (x, A_iy)_u$

一方、$(A_ix, y)_u = (x, A_i^*y)_u$ これがすべての x , y で成り立つので、$A_i^* = A_i$ である。

したがって、$A^*A = (\overline{\alpha_1}A_1 + \overline{\alpha_2}A_2 + \cdots + \overline{\alpha_s}A_s)(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s)$

$= \|\alpha_1\|^2 A_1 + \cdots + \|\alpha_s\|^2 A_s$

$= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s)(\overline{\alpha_1}A_1 + \overline{\alpha_2}A_2 + \cdots + \overline{\alpha_s}A_s) = AA^*$

よって、A は正規行列である。

正規行列 A に対し、$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s$ ，$A_1 + A_2 + \cdots + A_s = E$ ，$A_iA_j = 0$（$i \neq j$）を満たす射影子 $A_1, \cdots, A_s$ は一意的である。

なぜなら、$A = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots + \alpha_s B_s$ ，$B_1 + B_2 + \cdots + B_s = E$ ，$B_iB_j = 0$（$i \neq j$）を満たす射影子 $B_1, \cdots, B_s$ が存在したとすれば、任意の $x \in V$ に対し、$x \in W_{\alpha_i}$ ならば

$\alpha_i A_ix = \alpha_i x = \alpha_i B_ix$

$x \notin W_{\alpha_i}$ ならば、$\alpha_i A_ix = \alpha_i B_ix = 0$

よって、$A_i = B_i$（$1 \leqq i \leqq s$）

よって、一意的である。また、このような分解をスペクトル分解という。

ある行列 B が A と交換可能ならば、各 W_{α_i} は B − 不変である。

なぜなら、$x \in W_{\alpha_i}$ ならば $A(Bx) = BAx = B\alpha_i x = \alpha_i(Bx)$ したがって、Bx は A に関する α_i の固有ベクトルであるから、$Bx \in W_{\alpha_i}$ よって、各 W_{α_i} は B − 不変である。

$x = x_1 + \cdots + x_s$（$x_i \in W_{\alpha_i}$）とすると、うえの結果から $Bx_i \in W_{\alpha_i}$ なので

$BA_i x = BA_i(x_1 + \cdots + x_s) = Bx_i = A_i(Bx_1 + \cdots + Bx_s) = A_i Bx$

よって、B は各 A_i と交換可能である。

逆に、B が各 A_i と交換可能ならば、

$AB = \alpha_1 A_1 B + \alpha_2 A_2 B + \cdots + \alpha_s A_s B = \alpha_1 BA_1 + \alpha_2 BA_2 + \cdots + \alpha_s BA_s = BA$

よって、A , B も交換可能である。

（P. 177 脚注）

P. 146例4の 2) から A の最小多項式 $\phi_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - \alpha_i)$ は重根を持たない。

P. 149 と同様にして $f_i(x) = \dfrac{\phi_A(x)}{(x - \alpha_i)} = \prod_{j \neq i}^{s}(x - \alpha_j)$ とおけば、各 $f_i(x)$ は共通因子をもたない。よって、$M_i(A) f_i(A) = C_i$ おき $C_1 + \cdots + C_s = E$ ， $C_i C_j = 0$（$i \neq j$）を得る。

また、$C_i^2 = C_i$ である。また、V は $C_i V = \{ x ; x \in V , C_i x = x \}$ の直和に分解される。

そして、$C_i V = W_{\alpha_i}$ に一致する。

実際、$(x - \alpha_i) f_i(x) = \phi_A(x)$ であるから、$(A - \alpha_i E) f_i(A) = 0$ よって、$(A - \alpha_i E) M_i(A) f_i(A) = 0$、$(A - \alpha_i E) C_i = 0$ を得る。故に、任意の $x \in V$ に対し、$(A - \alpha_i E) C_i(x) = 0$ なので $C_i x$ は A に関して、α_i 固有ベクトルとなる。したがって、$C_i V \subset W_{\alpha_i}$ である。

逆に、$x \in W_{\alpha_i}$ とすれば、$(A - \alpha_i E)x = 0$（続きはP. 150参照）、多項式、$M(x)$, $N(x)$ があって、$M(A)(A - \alpha_i E) + C_i N(A) = E$ これに x をほどこせば、$C_i N(A) x = x \in C_i V$

故に $C_i V \supset W_{\alpha_i}$

よって、$V = W_{\alpha_1} \dotplus \cdots \dotplus W_{\alpha_s}$ となる。よって、任意の $x = x_1 + \cdots + x_s$（$x_i \in W_{\alpha_i}$）に対し

$Ax = A\,(\,x_1 + \cdots + x_s\,) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s = \alpha_1 C_1(x) + \cdots + \alpha_s C_s(x)$

となり、スペクトル分解の一意性から、$A_i = C_i\,(\,1 \leqq i \leqq s\,)$となる。

よって、$M_i(A)f_i(A) = A_i$ なので、$M_i(A)f_i(A)$ は A の多項式であることから、A , B が交換可能ならば、A_i も B と交換可能である。

（P. 177　問6）

正規行列 A のスペクトル分解を $A = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i$ とすれば、A^* のスペクトル分解は $A^* = \sum_{i=1}^{s} \overline{\alpha_i} A_i$ である。これに関しては問2から、A^* の固有値は $\overline{\alpha_i}$ だったので、$A^* = \sum_{i=1}^{s} \overline{\alpha_i} A_i$ であり一意性から、$A^* = \sum_{i=1}^{s} \overline{\alpha_i} A_i$ しかないことがわかる。また、任意の多項式 $f(x)$ に対し、

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ とすれば、

$A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s$ なので、

$A^2 = (\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s)(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s) = \alpha_1^2 A_1 + \cdots + \alpha_s^2 A_s$

$\vdots$

$A^n = \alpha_1^n A_1 + \cdots + \alpha_s^n A_s$

となる。よって

$f(A) = a_0 E + a_1(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s) + a_2(\alpha_1^2 A_1 + \cdots + \alpha_s^2 A_s) + \cdots + a_n(\alpha_1^n A_1 + \cdots + \alpha_s^n A_s)$

ここで、$E = A_1 + \cdots + A_s$ に注意すれば

$= \sum_{i=1}^{s} f(\alpha_i) A_i$ となる。これも、$f(A) = f(\alpha_1)A_1 + \cdots + f(\alpha_s)A_s$, $E = A_1 + \cdots + A_s$, $A_i A_j = 0$ $(\,i \neq j\,)$ を満たすので一意性から、$f(A) = \sum_{i=1}^{s} f(\alpha_i) A_i$ に限ることがわかる。

また、正値エルミット行列 A に対し、A をスペクトル分解して、$A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s$ だったとしたならば、正値エルミット行列 X のスペクトル分解を $X = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_r B_s$ とし、（正値なので、$\beta_i > 0$（$1 \leqq i \leqq s$） であり、すべて実数である。）

$X^m = \beta_1^m B_1 + \cdots + \beta_r^m B_r = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s = A$

スペクトル分解の一意性から $\alpha_i = \beta_i^m$, $B_i = A_i\,(\,1 \leqq i \leqq s\,)$となる。

このことは、P. 155 の*Frobenius* の定理にも関係してくる。

（P. 177 問7）

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ のスペクトル分解を求めよ。

P. 161 の問3から、固有値は 1（重解）, 4

$$
{}^t\boldsymbol{TAT}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}
$$

固有値 1 に対する $\boldsymbol{W}_1$ の底は $\boldsymbol{t}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{t}_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{W}_2$ の底は $\boldsymbol{t}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$$
\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}
$$

$$
=\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&0\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&0\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}
$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

しかし、次の様にやった方が楽なようだ

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{t}_1\\ {}^t\boldsymbol{t}_2\\ {}^t\boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3)\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{t}_1\\ {}^t\boldsymbol{t}_2\\ {}^t\boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}$$

$$=\{(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,0)+4(0,0,\boldsymbol{t}_3)\}\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{t}_1\\ {}^t\boldsymbol{t}_2\\ {}^t\boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,0)\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{t}_1\\ {}^t\boldsymbol{t}_2\\ {}^t\boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}+4(0,0,\boldsymbol{t}_3)\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{t}_1\\ {}^t\boldsymbol{t}_2\\ {}^t\boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,0)\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{t}_1\\ {}^t\boldsymbol{t}_2\\ 0\end{pmatrix}+4(0,0,\boldsymbol{t}_3)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ {}^t\boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}$$

（線型代数学　笠原晧司 著　P．155 定理8．5）

$\boldsymbol{A}$ が半単純のとき、$\boldsymbol{A}=\alpha_1\boldsymbol{A}_1+\cdots+\alpha_s\boldsymbol{A}_s$ 、$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{A}_i$ を求める方法。

$$\boldsymbol{A}_i=\frac{(\boldsymbol{A}-\alpha_1\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{A}-\alpha_{i-1}\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\alpha_{i+1}\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{A}-\alpha_s\boldsymbol{E})}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_s)}\qquad(1\leqq i\leqq s)$$

（証明）

$f(\alpha)$ を α の多項式とすれば、$f(\boldsymbol{A})=f(\alpha_1)\boldsymbol{A}_1+\cdots+f(\alpha_s)\boldsymbol{A}_s$

そこで、$f(\alpha_1)=1$, $f(\alpha_2)=\cdots=f(\alpha_s)=0$

となる多項式を作って、$f(\boldsymbol{A})$ を求めればよい。そのような $f(\alpha)$ は

$$f(\alpha)=\frac{(\alpha-\alpha_2)\cdots(\alpha-\alpha_s)}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_s)}$$

である。

$\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ についても同様である。

試しに上の問についてやってみる。

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})}{(1-4)}=-\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})}{(4-1)}=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

これなら、固有ベクトルを求めなくてもよい。

（P. 177　実正規行列）

$\boldsymbol{A}$ の固有多項式

$$f_A(x)=\prod_{i=1}^{r_1}(x-a_i)\prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2}\{(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i})\}$$ （Ⅰ章、§5、定理5の重複を無視している。）

a_i : 実数　（$1 \leqq i \leqq r_1$），　α_i , $\overline{\alpha_i}$: 共役複素数　（$r_1+1 \leqq i \leqq r_1+r_2$）

よって、(35) において、$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a_1&&&&&&0\\&\ddots&&&&&\\&&a_{r_1}&&&&\\&&&\alpha_{r_1+1}&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&\alpha_{r_1+r_2}&\\0&&&&&&\overline{\alpha_{r_1+r_2}}\end{pmatrix}$$

ペアで r_2 組ある

としてよい。$\boldsymbol{U}$ の列ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ についても

$\boldsymbol{u}_i$: 実ベクトル　（$1 \leqq i \leqq r_1$）

$\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}$ ，$\boldsymbol{u}_{r_1+2j}$: 共役複素ベクトル（$1 \leqq j \leqq r_2$）

とすることができる。実際、a_i が実数ならば、W_{α_i} の底として、実正規直交底をとるこができる。

α_i が複素数の場合は、まず W_{α_i} の底として正規直交底をとり、$W_{\overline{\alpha_i}}$ の底としては、$\boldsymbol{A}$ に関して固有値 α_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とすれば、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=\alpha_i\boldsymbol{u}_i$ なので、両辺の複素共役をとれば、$\boldsymbol{A}$ は実行列なので、$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{u}_i}=\overline{\alpha_i}\,\overline{\boldsymbol{u}_i}$ となり、$\overline{\boldsymbol{u}_i}$ は$\boldsymbol{A}$ に関して、固有値 $\overline{\alpha_i}$ に対する固有ベクトルとなる。また、$\|\boldsymbol{u}_i\|=1$ ならば、$(\boldsymbol{u}_i,\overline{\boldsymbol{u}_i})=(\overline{\boldsymbol{u}_i},\boldsymbol{u}_i)$ なので、$\|\overline{\boldsymbol{u}_i}\|=1$ となり、$(\boldsymbol{u}_i,\overline{\boldsymbol{u}_j})=0$ ならば、$(\overline{\boldsymbol{u}_i},\overline{\overline{\boldsymbol{u}_j}})=0$ よって、W_{α_i} の底の複素共役をとればよい。

このようにして、$V=\sum W_{\alpha_i}$（直和）の正規直交底を作り、それを$\{\boldsymbol{u}_i\}$（$1 \leqq i \leqq n$）とおく。

例えば、$\boldsymbol{u}_i=\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_j=\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$ ならば $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)_u=(\boldsymbol{u}_i,\overline{\boldsymbol{u}_j})=0$ ，$\overline{\boldsymbol{u}_i}=\boldsymbol{u}_j$

α_{r_1+j} , $\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}$ の実部と虚部を分けて

$$\alpha_{r_1+j} = a_{r_1+j} + ib_{r_1+j}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} + i\boldsymbol{t}_{r_1+2j}) \quad (1 \leqq j \leqq r_2) \quad \cdots ①$$

とおけば

$$\overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} - i\boldsymbol{t}_{r_1+2j}) \qquad \cdots ① \text{の複素共役} \ \cdots ②$$

$$\sqrt{2}\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \sqrt{2}\,\overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}} = 2\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} \qquad \cdots \ \sqrt{2} \times ① + \sqrt{2} \times ②$$

$$\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j})$$

$$\sqrt{2}\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \sqrt{2}\,\overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}} = 2i\boldsymbol{t}_{r_1+2j} \qquad \cdots \ \sqrt{2} \times ① - \sqrt{2} \times ②$$

$$\boldsymbol{t}_{r_1+2j} = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j})$$

まとめると

$$\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j})$$

$$\boldsymbol{t}_{r_1+2j} = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j})$$

となる。さらに、$\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq r_1)$ とおけば、$\{\boldsymbol{t}_i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ は V の実正規直交底になる。

$$\| \boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} \|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}} + \overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j}}) = \frac{1}{2}(1+0+0+1) = 1$$

$$\| \boldsymbol{t}_{r_1+2j} \|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j}), \overline{\frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}} - \overline{\boldsymbol{u}_{r_1+2j}}) = \frac{1}{2}(1-0-0+1) = 1$$

◎ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_u$ の方がわかりやすい。

$$\| \boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} \|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j})\right)_u$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j})_u = \frac{1}{2}(1+0+0+1) = 1$$

よって、$\| \boldsymbol{t}_i \| = 1$（$1 \leqq i \leqq n$）は確認した。

あとは直交するかであるが、面倒なので

$\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} = \boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}$ ，　　$\boldsymbol{t}_{r_1+2j} = \boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j}$

として確認する。また、この確認は3つのグループに属するベクトルの直交性を調べるので、明らかなところは省略する。

A グループ　$\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{u}_i$（$1 \leqq i \leqq r_1$）

B グループ　$\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1} = \boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}$（$1 \leqq j \leqq r_2$）

C グループ　$\boldsymbol{t}_{r_1+2j} = \boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j}$（$1 \leqq j \leqq r_2$）

1）各グループ内

A）… 明らか。

B）$(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}, \boldsymbol{t}_{r_1+2k-1})_u = (\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \boldsymbol{u}_{r_1+2k-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2k})_u = 0$
（$j \neq k, 1 \leqq j, k \leqq r_2$）

C）$(\boldsymbol{t}_{r_1+2j}, \boldsymbol{t}_{r_1+2k})_u = (\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \boldsymbol{u}_{r_1+2k-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2k})_u = 0$
（$j \neq k, 1 \leqq j, k \leqq r_2$）

2）A グループとB グループ … 明らか。

3）A グループとC グループ … 明らか。

4）B グループとC グループ

（$1 \leqq j \leqq r_2$）
$(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}, \boldsymbol{t}_{r_1+2j})_u = (\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2j})_u = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

（$j \neq k, 1 \leqq j, k \leqq r_2$）
$(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}, \boldsymbol{t}_{r_1+2k})_u = (\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j}, \boldsymbol{u}_{r_1+2k-1} - \boldsymbol{u}_{r_1+2k})_u = 0$

End

次に

$A(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1})$

$= A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1} + \boldsymbol{u}_{r_1+2j})\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(a_{r_1+j}+ib_{r_1+j})\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}+(a_{r_1+j}-ib_{r_1+j})\boldsymbol{u}_{r_1+2j}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{a_{r_1+j}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}+\boldsymbol{u}_{r_1+2j})+i(b_{r_1+j}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}-\boldsymbol{u}_{r_1+2j}))\}$$

$$=a_{r_1+j}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}+\boldsymbol{u}_{r_1+2j})+b_{r_1+j}\frac{i^2}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}-\boldsymbol{u}_{r_1+2j})$$

$$=a_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}-b_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j}\quad\cdots\quad ①$$

$$A(\boldsymbol{t}_{r_1+2j})$$

$$=A(\frac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}-\boldsymbol{u}_{r_1+2j}))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}i}\{(a_{r_1+j}+ib_{r_1+j})\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}-(a_{r_1+j}-ib_{r_1+j})\boldsymbol{u}_{r_1+2j}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}i}\{a_{r_1+j}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}-\boldsymbol{u}_{r_1+2j})+i(b_{r_1+j}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}+\boldsymbol{u}_{r_1+2j}))\}$$

$$=a_{r_1+j}\frac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}-\boldsymbol{u}_{r_1+2j})+b_{r_1+j}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_{r_1+2j-1}+\boldsymbol{u}_{r_1+2j})$$

$$=a_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j}+b_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}$$

$$=b_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}+a_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j}\quad\cdots\quad ②$$

①, ② をまとめると

$$A(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1},\boldsymbol{t}_{r_1+2j})=(a_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}-b_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j}\ ,\ b_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}+a_{r_1+j}\boldsymbol{t}_{r_1+2j})$$

$$=(\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1},\boldsymbol{t}_{r_1+2j})\begin{pmatrix}a_{r_1+j} & b_{r_1+j}\\ -b_{r_1+j} & a_{r_1+j}\end{pmatrix}$$

P. 170問8 *End*

$$A(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)\begin{pmatrix}a_1 & & & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_{r_1} & & & & & & \\ & & & a_{r_1+1} & b_{r_1+1} & & & & \\ & & & -b_{r_1+1} & a_{r_1+1} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_{r_1+r_2} & b_{r_1+r_2} & \\ 0 & & & & & & -b_{r_1+r_2} & a_{r_1+r_2} & \end{pmatrix}$$

よって、$\boldsymbol{T}=(\,\boldsymbol{t}_1\,,\cdots,\,\boldsymbol{t}_n\,)$とおけば、直交行列であって

$$(37)\ \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}={}^{t}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a_{r_1} & & & & & \\ & & & a_{r_1+1} & b_{r_1+1} & & & \\ & & & -b_{r_1+1} & a_{r_1+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_{r_1+r_2} & b_{r_1+r_2} \\ 0 & & & & & & -b_{r_1+r_2} & a_{r_1+r_2} \end{pmatrix}$$

となる。

また、$\boldsymbol{T}'=(\,\boldsymbol{t}_1\,,\cdots,\,\boldsymbol{t}_{r_1}\,,\,\overbrace{\boldsymbol{t}_{r_1+1}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+3}\,,\cdots,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2}}^{r_2\text{ 列離れている}}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+4}\,,\cdots,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2r_2}\,)$とすると

$$=(\,\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2j}\,)\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_{r_1+j}\ \cdots\ b_{r_1+j}}}^{r_2\text{ 列}} \\ \begin{pmatrix} a_{r_1+j} & \cdots & b_{r_1+j} \\ \vdots & & \vdots \\ -b_{r_1+j} & \cdots & a_{r_1+j} \end{pmatrix} \end{array} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}}\right] r_2\text{ 行}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}'=(\,\cdots,\,\underbrace{\boldsymbol{t}_{r_1+1}\,,\cdots,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2}}_{r_2\text{ 列離れる}}\,,\cdots)\begin{array}{cl} \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_{r_1+1}\qquad\qquad b_{r_1+1}}}^{r_2\text{ 列離れる}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & a_{r_1} & & \\ & & a_{r_1+1} & b_{r_1+1} \\ & & & \\ & & -b_{r_1+1} & a_{r_1+1} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} & \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ \\ a \end{pmatrix}}\right] r_2\text{ 行離れる} \end{array}$$

よって

$$(37')\ \boldsymbol{T}'^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}'=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ & & a_{r_1} & & & & & & \\ \hline & & & a_{r_1+1} & & 0 & b_{r_1+1} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & 0 & & a_{r_1+r_2} & 0 & & b_{r_1+r_2} \\ \hline & & & -b_{r_1+1} & & 0 & a_{r_1+1} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -b_{r_1+r_2} & 0 & & a_{r_1+r_2} \end{array}\right)$$

（P．172　例3）

対称行列 A → $A^* = A$ → $A^*A = AA^*$

交代行列 A → $A^* = -A$ → $A^*A = (-A)A = A(-A) = AA^*$

直交行列 A → $A^*A = AA^* = E$

したがって、上の3つの行列はすべて実正規行列である。

ｉ)⇐) A が正規行列で固有値がすべて実数の場合は、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とすることができるので、${}^t(T^{-1}AT) = T^{-1}\,{}^tAT$ となり、$A = {}^tA$　よって、対称行列となる。

ⅱ）実正規行列に対し、A：交代行列 ⇔ A の固有値：純虚数（すなわち $a_i = 0$（$1 \leqq i \leqq r_1 + r_2$）

（証明）

⇒）$A^t = -A$（$a_{ji} = -a_{ij}$），$(Ax, y) = -(x, Ay)$ なので

$Ax = \alpha x$（$x \neq 0$）

とすれば、$(Ax, x)_u = (\alpha x, x)_u = \alpha(x, x)_u$

$= (x, A^*x)_u = (x, -Ax)_u = -(x, \alpha x)_u = -\overline{\alpha}(x, x)_u$

$(x, x)_u > 0$ なので、$\alpha = -\overline{\alpha}$ となり、$\alpha = a + ib$ ならば　$-\overline{\alpha} = -a + ib$　なので、$a = 0$ となり、α は純虚数となる。

⇐) A は正規行列なので、$A = UDU^*$ とすることができる。仮定から、D の対角成分は純虚数なので、$D^* = -D$ となる。よって、　$A^* = {}^tA = UD^*U^* = -UDU^* = -A$

すなわち、(37) において、$a_i = 0$（$1 \leqq i \leqq r_1 + r_2$）とすればよい。

ⅲ）⇐) A が正規行列で固有値の絶対値が 1 の複素数ならば、(38) の形にすることができる。

$T^{-1}AT$ は明らかに直交行列なので、それを B とすると、

$T^{-1}AT = B$ → $A = T\,{}^tB\,{}^tT$ → ${}^tAA = (TB\,{}^tT)T\,{}^tB\,{}^tT = E$

よって、直交行列となる。

（P．180　問9）

例3 ⅱ）から、$rank\,A = rank\,(\,T^{-1}AT\,) = 2r_2$

$\boldsymbol{T}'' = (\,\boldsymbol{t}_{r_1+1}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+3}\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2j-1}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2}\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+4}\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1+2r_2}\,,\,\boldsymbol{t}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{t}_{r_1}\,)$とすると

$$\boldsymbol{T}''^{-1}A\boldsymbol{T}'' = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & b_{r_1+1} & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & b_{r_1+r_2} & 0 & & 0 \\ -b_{r_1+1} & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -b_{r_1+r_2} & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ -B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \dfrac{1}{b_{r_1+1}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \dfrac{1}{b_{r_1+r_2}} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$ とおけば ${}^tB = B$ なので

$${}^t\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \boldsymbol{T}''^{-1}A\boldsymbol{T}'' \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ -B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B'B_1 & 0 \\ -B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B'B_1 & 0 \\ -B'B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、$P = \boldsymbol{T}''B$ とおけば、P は正則実行列となる。

（P．180　問10）

n 次直交行列 A について、$|\,A\,| = -1$ ならば -1 は A の固有値であり、$|\,A\,| = 1$ かつ n が奇数ならば 1 が A の固有値である。

（証明）例3 ⅲ）と⑶8) から明らかである。

（P．180　直交行列の群）

乗法の定義された集合 G において、次の3つを満たすとき G は群を作るという。

ｉ）結合の法則が成立する。

ⅱ）単位元 1 が存在する。（ $1a = a1 = a$ ）

ⅲ）すべての元に対して逆元が存在する。（ $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ ）

$O(n)$: n 次直交行列の群（ベクトル空間ではない。$E+E = 2E$ であって、$2E \neq$ 直交行列）

直交変換 $x \rightarrow Tx$ はベクトルの長さや角を変えない。長さや内積を変えないことはすでにわかっている。$(Tx , Ty) = \cos\theta_1\|Tx\|\,\|Ty\| = \cos\theta_1\|x\|\,\|y\|$, $(x , y) = \cos\theta_2\|x\|\,\|y\|$ とすれば、$(Tx , Ty) = (x , y)$ なので、$\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ （$0 \leqq \theta_1 , \theta_2 \leqq \pi$）$\rightarrow$ $\theta_1 = \theta_2$

$T \in O(n)$ に対し

$|T| = 1 \rightarrow$ 正格直交行列 , 回転

$|T| = -1 \rightarrow$ 変格直交行列

$|T_1| = |T_2| = 1$ ならば $|T_1T_2| = 1$, $|T_1^{-1}| = 1$ なので、正格直交行列全体は部分群を作る。

それを、$SO(n)$ と表す。

T_1 を1つの変格直交行列とすれば、変格直交行列全体は $T_1 \cdot SO(n) = SO(n) \cdot T_1$ と表される。

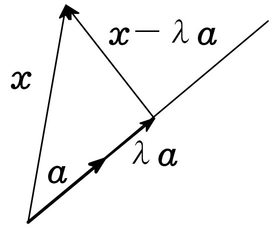
（注意） $O(n) = SO(n) \cup T_1 \cdot SO(n)$ … 傍系分解

特に、1つの（ $n-1$ ）次元部分空間 W の各ベクトルを<u>不変</u>にする直交変換（ $T_1 \neq E$ ）を W に関する鏡映、裏返しなどという。W の直交補空間は 1 次元であるから、$W^{\perp} = \{\{a\}\}$ とおけば、$T_1a = -a$ である。なぜなら、$y \in W$ に対し、$(T_1a, y) = (T_1a, T_1y) = (a , {}^tT_1T_1y)$ $= (a , y) = 0$ なので、$T_1a \in W^{\perp}$ となる。つまり、$W^{\perp}$ は T_1 − 不変である。また、$W^{\perp}$ は 1 次元なので、$T_1a = \pm a$ のどちらかである。もし、$T_1a = a$ ならば、任意の $ka \in W^{\perp}$（ $k \in R$ ）に対し、$T_1(ka) = kT_1a = ka$ となり、$V = W \dotplus \{\{a\}\}$ とおくとき、任意の $x \in V$ に対し、$T_1x = x$ となる。よって、$T_1 \neq E$ に反する。

よって、$W^{\perp} = \{\{a\}\}$ のとき、$W^{\perp}$ への射影子を $x \rightarrow \lambda a$ とすれば

$(x-\lambda a , a) = 0$

$(x , a)-\lambda(a , a) = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{(x , a)}{(a , a)}$



$\{\{a\}\}$ への射影子は $x \rightarrow \dfrac{(a , x)}{(a , a)}a$

だったので、直和分解 $V = W \dotplus \{\{a\}\}$ に即して

$x = x_1+x_2$ とすれば

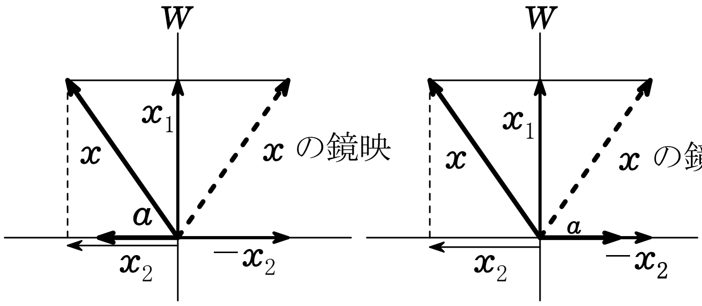
$$x_1 = x - \frac{(a, x)}{(a, a)} a$$

$$T_1 x = T_1 x_1 + T_1 x_2$$

$= x_1 + (-x_2)$ (a の向きを基準)

$$= x - \frac{(a, x)}{(a, a)} a - \frac{(a, x)}{(a, a)} a$$

$$= x - \frac{2(a, x)}{(a, a)} a$$



（W に関して裏返しになる。）

n 次元ベクトル x が ($n-1$) 次元 W に対して、a の向きとは逆側に写されると考えれば鏡映の意味がわかる。（図は W を直線としている。紙面とは垂直にある平面としてもよい。）

逆に、任意の実ベクトル $a \neq 0$ に対し、T_1 をこの式で定義すれば、$\{\{a\}\}^{\perp} = W$ に関しての鏡映が得られる。また、鏡映 T_1 に対し直交行列 $T = (t_1, \cdots, t_n)$ を $W = \{\{t_1, \cdots, t_{n-1}\}\}$，$\{\{a\}\} = \{\{t_n\}\}$ となるようにとれば

$$T^{-1} T_1 T = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって T_1 は変格直交行列である。固有値 -1 が1個の場合のみである。

（P．182　問1）

鏡映 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ を標準形に変換せよ。

$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & x+\cos\theta \end{vmatrix} = (x^2-1) = 0$　固有値は 1，-1

次に固有ベクトルを求める。($\alpha = 1$ の場合)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta - x_2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1\cos^2\theta + x_2\sin\theta\cos\theta = x_1\cos\theta$$

$$x_1\sin^2\theta - x_2\sin\theta\cos\theta = x_2\sin\theta$$

$$\rightarrow x_1 = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \rightarrow x_1 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} x_2$$

$$x_1 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} x_2 = \frac{\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} x_2 = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} x_2 = \frac{1+\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} x_2$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} x_2 = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} x_2$$

よって固有ベクトルを $t_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とする。

（ α ＝ －1 の場合 ）

$$\begin{array}{l} x_1 \cos^2\theta + x_2 \sin\theta\cos\theta = -x_1\cos\theta \\ x_1\sin^2\theta - x_2\sin\theta\cos\theta = -x_2\sin\theta \end{array} \rightarrow x_1 = -x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \rightarrow x_1 = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}x_2$$

$$x_1 = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}x_2 = \frac{-\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}x_2 = \frac{-1+\cos\theta}{\sin\theta}x_2$$

$$= \frac{-1+\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}x_2 = \frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}x_2 = \frac{-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}x_2 \rightarrow \boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$${}^t\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & -\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

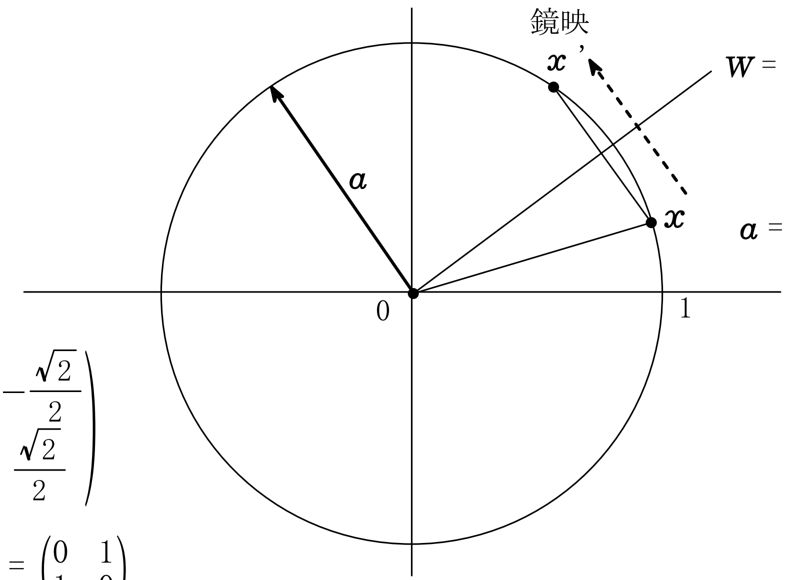
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

↓　　↓

$\boldsymbol{W}$ の底　｛$\{\boldsymbol{a}\}$｝の底

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ の場合

$$\boldsymbol{W} = \{\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\}\}, \ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{W} = \{\{\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\}\}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

鏡映 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}'$　$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ とすれば、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

30度のところにあった点 $\boldsymbol{x}$ が 60度のところの $\boldsymbol{x}'$ に鏡映された。

（P．175　注意）

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ -\sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

（１回の回転 ⇔ 2回の鏡映）

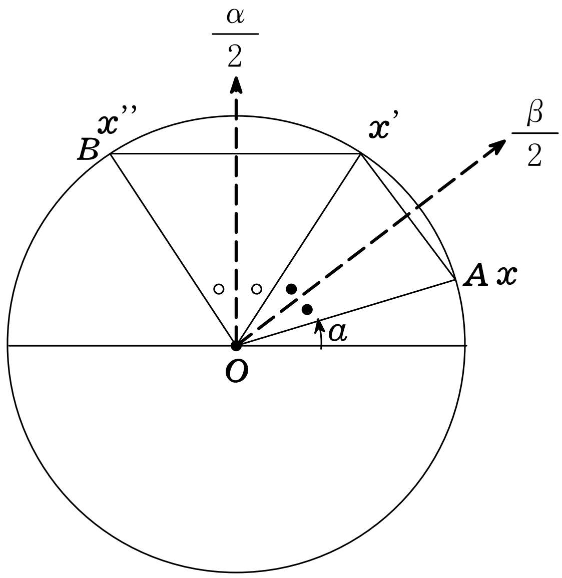
$x \rightarrow x' \rightarrow x''$（2回の鏡映）

$$\angle AOB = \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\beta}{2} + \left(\frac{\beta}{2} - a\right)\right)\right) - a$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} - a\right)\right) - a$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - (\beta - a) - a$$

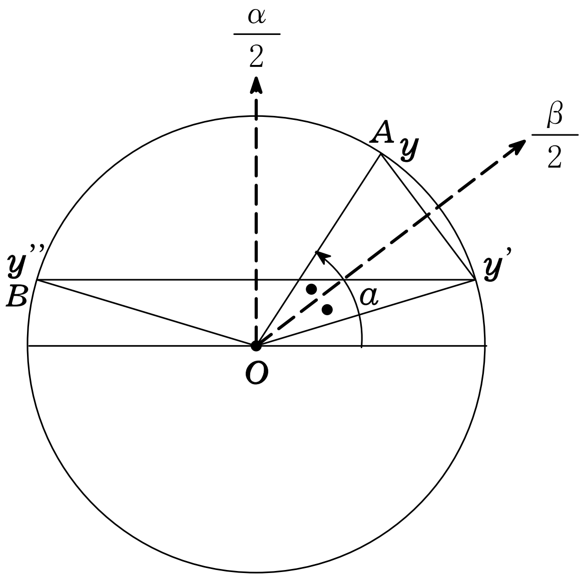
$$= \alpha - \beta = \theta$$



$y \rightarrow y' \rightarrow y''$（2回の鏡映）

$$\angle AOB = \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\beta}{2} + \left(\frac{\beta}{2} - a\right)\right)\right) - a$$

$$= \alpha - \beta = \theta$$



$\alpha - \beta = \theta$ になっていれば、(θ)1回の回転移動が、$\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{\alpha}{2}$ の順での鏡映2回に等しい。

（$n = 3$ の場合）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ 0 & \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ を標準化する。

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & x+\cos\theta \end{vmatrix} = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$$

固有値は 1 (重解) , −1

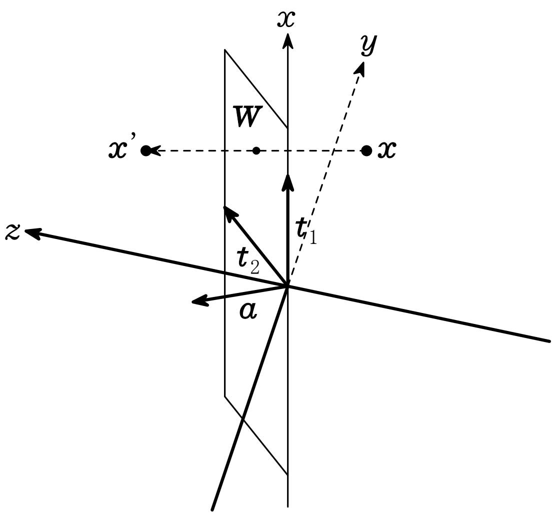
それぞれの固有ベクトルを求めると、上の計算を参考にして

$$\boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{t}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{\theta}{2} & -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ 0 & \sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

↓ ↓ ↓

$\boldsymbol{W}$ の底　 $\{\{a\}\}$ の底



よって、$\boldsymbol{W}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ によって

張られる平面となる。

一般の n 次直交行列については他書に譲る。

(P. 182　$O(n)$)

$O(n)$ は n 次正方行列全体の集合の部分集合で、$\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の方程式 : $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$ ($1 \leqq i, j \leqq n$)

によって定義される集合である。

$$\begin{array}{cc} & \hspace{6em} j\ \text{列} \\ i\ \text{行} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

(P. 128 参照)

また、方程式は ${}_n\mathrm{C}_2 + n = \dfrac{n(n-1)}{2!} + n$

$= \dfrac{n^2-n+2n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 個ある。

したがって、n^2 個の未知の変数があって、$\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の方程式があるので、解の空間は

$n^2-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の変数がある曲面と考えられる。

直交行列 $\boldsymbol{T}$ が -1 を固有値にもたなければ、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}$ は正則である。((38) から $\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}$ は正則とは限らない。) そのとき

(40) $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})^{-1}$

とおけば、$\boldsymbol{X}$ は交代行列になる。

実際、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}$ は交換可能 ($(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})$) であるから、$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})^{-1}$ と $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})$ も交換可能である。($AB=BA \rightarrow B=A^{-1}BA \rightarrow BA^{-1}=A^{-1}BAA^{-1}=A^{-1}B$ 　このとき B は正則でなくてもよい。)

よって、$({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$ なので

${}^t\boldsymbol{X}={}^t(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})^{-1}\,{}^t(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{E}+{}^t\boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{E}-{}^t\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}^{-1})$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}^{-1})$

ここで、$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}=(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}^{-1}))^{-1}=(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{E})^{-1}$

$=(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{E})=-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})=-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})^{-1}$

$=-\boldsymbol{X}$

よって、$\boldsymbol{X}$ は交代行列であるから固有値は純虚数となり、-1 を固有値としないので先程と同じように $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}$ は正則となる。

さて、(40) から $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T} \rightarrow \boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T} \rightarrow \boldsymbol{T}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}$

$\rightarrow (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})$

また同じように、$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})$ なので、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}$ が正則であることから、$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$ と $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})$ も交換可能となる。よって

$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$

逆に任意の交代行列 $\boldsymbol{X}$ に対して、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}$ は正則であるので

(41) $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$

とおけば、$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}$ は交換可能で、$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$ と $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}$ と $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})^{-1}$ も交換可能である。よって

${}^t\boldsymbol{T}={}^t(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}\,{}^t(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{E}+{}^t\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{E}-{}^t\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})$

${}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}=\boldsymbol{E}$

したがって、$\boldsymbol{T}$ は直交行列となる。

また、X は交代行列なので、$X^*X = -XX = X(-X) = XX^*$ 正規行列である。よって、適当なユニタリー行列 U をとれば

$$U^*XU = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & ia_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & ia_r \end{pmatrix}, \quad U^*(E-X)U = E-U^*XU = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1-ia_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1-ia_r \end{pmatrix}$$

$$U^*(E+X)U = E+U^*XU = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1+ia_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1+ia_r \end{pmatrix}$$ と表現できる。また

$$(U^*(E+X)U)^{-1} = U^*(E+X)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{1+ia_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \frac{1}{1+ia_r} \end{pmatrix}$$ なので

$$U^*TU = U^*(E-X)UU^*(E+X)^{-1}U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1-ia_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1-ia_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{1+ia_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \frac{1}{1+ia_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1-ia_1}{1+ia_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \frac{1-ia_r}{1+ia_r} \end{pmatrix}$$

したがって、T は -1 を固有値としない。つまり、$T+E$ は正則となる。

(41) から、$T(E+X) = T+TX = E-X \rightarrow X+TX = E-T \rightarrow (E+T)X = E-T$

$\rightarrow X = (E+T)^{-1}(E-T)$

T が -1 を固有値としないことから、$|T| = 1$ を得る。

よって、$SO(n)$ が $|E+T| = 0$ なる<u>超曲面を除いて</u>、実交代行列の集合と一対一に対応することがわかる。($SO(n)$ の中には、固有値 -1 が偶数個あるものも含まれている。)

(40) , (41) にしても

$f : X = (E-T)(E+T)^{-1}$, $g : T = (E-X)(E+X)^{-1}$ とすれば

$SO(n)$ から $|E+T| = 0$ なる超曲面を除いた集合 $\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}$ 実交代行列の集合

f は単射である。実際、$T \neq T'$ に対し、$f(T) = f(T')$ だとすれば

$X = (E-T)(E+T)^{-1}$, $X = (E-T')(E+T')^{-1}$ となる。T , T' について解けば

$(E+T)X = E-T \rightarrow X+TX = E-T \rightarrow (E+X)T = E-X \rightarrow T = (E-X)(E+X)^{-1}$

同様に、$T' = (E-X)(E+X)^{-1}$ なので、$T \neq T'$ に矛盾する。

同様に g も単射である。X について解けば

$T(E+X) = E-X \rightarrow T+TX = E-X \rightarrow X+TX = E-T \rightarrow (E+T)X = E-T$

$\rightarrow X = (E+T)^{-1}(E-T) = (E-T)(E+T)^{-1}$

$X \neq X'$ を代入すれば矛盾することがわかる。

したがって、前者の集合を A 、後者の集合を B とすれば

f は A から B への単射、g は B から A への単射なので、*Bernstein* の定理 (集合・位相入門 松坂和夫 著　P. 63 参照) から、A , B の間には全単射が存在する。

よって、一対一に対応することがわかる。

また、(40) , (41) からわかるように、各成分の間の対応は有理式なので<u>連続で微分可能</u>である。

つまり、$SO(n)$ から $|E+T| = 0$ なる超曲面を除いた集合の任意の元は $(E-X)(E+X)^{-1}$ と表すことができるので、交代行列はちょうど $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の変数 x_{ij} を含んでいるから $SO(n)$ の元も $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の変数を含むことになる。$SO(n) \subset O(n)$ であるが、<u>部分群であって、部分空間ではない</u>ので等しくならなくてもよい。((40), (41) を *Cayley* 変換という。)

(P. 183　例)

$(n = 2)$ $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ (交代行列) に対し

$E-X = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $E+X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $(E+X)^{-1} = \dfrac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}$

よって

$$T = \frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} -x^2+1 & -2x \\ 2x & -x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} & \dfrac{-2x}{1+x^2} \\ \dfrac{2x}{1+x^2} & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

$x = tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおけば

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-tan^2\frac{\theta}{2}}{1+tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{cos^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{sin^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{cos^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{sin^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta}{2}}}=cos^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\theta}{2}=cos\,\theta$$

$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2tan\frac{\theta}{2}}{1+tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\dfrac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{cos^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{sin^2\frac{\theta}{2}}{cos^2\frac{\theta}{2}}}=2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}=sin\,\theta$$

$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}cos\,\theta & -sin\,\theta\\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix}$ となる。

$(\ n=3\ )\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & x & y\\ -x & 0 & z\\ -y & -z & 0\end{pmatrix}$ に対して

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & -x & -y\\ x & 1 & -z\\ y & z & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ -x & 1 & z\\ -y & -z & 1\end{pmatrix}$

$|\,\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}\,|=1(1+z^2)-x(-x+yz)+y(xz+y)=1+x^2+y^2+z^2$　P. 61 II 章定理6から

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\\ -x & 1 & z\\ -y & -z & 1\end{pmatrix}$$

$$(\ \boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}\ )^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix}z^2+1 & -x-yz & xz-y\\ x-yz & y^2+1 & -xy-z\\ xz+y & -xy+z & x^2+1\end{pmatrix}$$

$(-1)^{1+2}\{-x\times1-z\times(-y)\}$
（位置が転置される）

よって

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix}1 & -x & -y\\ x & 1 & -z\\ y & z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^2+1 & -x-yz & xz-y\\ x-yz & y^2+1 & -xy-z\\ xz+y & -xy+z & x^2+1\end{pmatrix}\qquad(\ *=x^2+y^2+z^2+1\ )$$

$$=\frac{1}{*}\begin{pmatrix}z^2+1-x(x-yz)-y(xz+y) & -x-yz-x(y^2+1)-y(-xy+z) & xz-y-x(-xy-z)-y(x^2+1)\\ x(z^2+1)+x-yz-z(xz+y) & x(-x-yz)+y^2+1-z(-xy+z) & x(xz-y)-xy-z-z(x^2+1)\\ y(z^2+1)+z(x-yz)+xz+y & y(-x-yz)+z(y^2+1)-xy+z & y(xz-y)+z(-xy-z)+x^2+1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{*}\begin{pmatrix}z^2+1-x^2+xyz-xyz-y^2 & -x-yz-xy^2-x+xy^2-yz) & xz-y+x^2y+xz-x^2y-y\\ xz^2+x+x-yz-xz^2-yz & -x^2-xyz+y^2+1+xyz-z^2) & x^2z-xy-xy-z-x^2z-z\\ yz^2+y+xz-yz^2+xz+y & -xy-y^2z+y^2z+z-xy+z & xyz-y^2-xyz-z^2+x^2+1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix}-x^2-y^2+z^2+1 & -2x-2yz & 2xz-2y\\ 2x-2yz & -x^2+y^2-z^2+1 & -2xy-2z\\ 2xz+2y & -2xy+2z & x^2-y^2-z^2+1\end{pmatrix}$$

ここで、P. 130問5

直交行列 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とすれば、P. 61 II章定理 6 から

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2}\\ & & \ddots & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}|=1 \ \rightarrow\ a_{ij}=\Delta_{ij}$, $|\boldsymbol{A}|=-1 \ \rightarrow\ a_{ij}=-\Delta_{ij}$

正規直交系で $|\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3|=1$ (右手系)とすれば

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$ としたとき、$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23}\\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$ に対し、$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\a_1 & b_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$ なので

$$\boldsymbol{f}_1\times\boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{31} & a_{32}\\a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_{13}\\ \Delta_{23}\\ \Delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\boldsymbol{f}_3$$

$$\boldsymbol{f}_2\times\boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{32} & a_{33}\\a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{21}\\ \Delta_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}=\boldsymbol{f}_1$$

$$\boldsymbol{f}_3\times\boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{23} & a_{21}\\a_{33} & a_{31}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{33} & a_{31}\\a_{13} & a_{11}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}\\a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_{12}\\ \Delta_{22}\\ \Delta_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}=\boldsymbol{f}_2$$

（P. 184　問2）

$$T=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix}-x^2-y^2+z^2+1 & -2x-2yz & 2xz-2y\\ 2x-2yz & -x^2+y^2-z^2+1 & -2xy-2z\\ 2xz+2y & -2xy+2z & x^2-y^2-z^2+1\end{pmatrix}$$

$P^{-1}TP=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$（$0\leqq\theta<\pi$），$|P|=1$，直交行列 $P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}$ とすれば

$$T=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{21} & p_{31}\\ p_{12} & p_{22} & p_{32}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}\cos\theta-p_{12}\sin\theta & p_{21}\cos\theta-p_{22}\sin\theta & p_{31}\cos\theta-p_{32}\sin\theta\\ p_{11}\sin\theta+p_{12}\cos\theta & p_{21}\sin\theta+p_{22}\cos\theta & p_{31}\sin\theta+p_{32}\cos\theta\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}c-p_{12}s & p_{21}c-p_{22}s & p_{31}c-p_{32}s\\ p_{11}s+p_{12}c & p_{21}s+p_{22}c & p_{31}s+p_{32}c\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{pmatrix}\leftarrow\begin{pmatrix}c=\cos\theta\\ s=\sin\theta\end{pmatrix}$$

横に入らないので分割する。

$$\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}c-p_{12}s\\ p_{11}s+p_{12}c\\ p_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cp_{11}^2+cp_{12}^2+p_{13}^2\\ cp_{11}p_{21}+cp_{12}p_{22}+p_{11}p_{22}s-p_{12}p_{21}s+p_{13}p_{23}\\ cp_{11}p_{31}+cp_{12}p_{32}+p_{11}p_{32}s-p_{12}p_{31}s+p_{13}p_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c(p_{11}^2+p_{12}^2)+p_{13}^2\\ c(p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22})+s(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})+p_{13}p_{23}\\ c(p_{11}p_{31}+p_{12}p_{32})+s(p_{11}p_{32}-p_{12}p_{31})+p_{13}p_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c(1-p_{13}^2)+p_{13}^2\\ c(p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22}+p_{13}p_{23})+sp_{33}+p_{13}p_{23}-cp_{13}p_{23}\\ c(p_{11}p_{31}+p_{12}p_{32})-sp_{23}+p_{13}p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{(1-c)p_{13}^2+c}\\ \boldsymbol{(1-c)p_{13}p_{23}+sp_{33}}\\ \boldsymbol{(1-c)p_{13}p_{33}-sp_{23}}\end{pmatrix}$$

（注 $\boldsymbol{p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22}+p_{13}p_{23}}=0$ ←（異なる行、列の内積は 0 で、この処理が何回かある。）

$$\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{21}c-p_{22}s\\ p_{21}s+p_{22}c\\ p_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cp_{11}p_{21}+cp_{12}p_{22}-p_{11}p_{22}s+p_{12}p_{21}s+p_{13}p_{23}\\ cp_{21}^2+cp_{22}^2+p_{23}^2\\ cp_{21}p_{31}+cp_{22}p_{32}+p_{21}p_{32}s-p_{22}p_{31}s+p_{23}p_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c(p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22})+s(p_{12}p_{21}-p_{11}p_{22})+p_{13}p_{23}\\ c(p_{21}^2+p_{22}^2)+p_{23}^2\\ c(p_{21}p_{31}+p_{22}p_{32})+s(p_{21}p_{32}-p_{22}p_{31})+p_{23}p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{(1-c)p_{13}p_{23}-sp_{33}}\\ \boldsymbol{(1-c)p_{23}^2+c}\\ \boldsymbol{(1-c)p_{23}p_{33}+sp_{13}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{31}c-p_{32}s\\ p_{31}s+p_{32}c\\ p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cp_{11}p_{31}+cp_{12}p_{32}-p_{11}p_{32}s+p_{12}p_{31}s+p_{13}p_{33}\\ cp_{21}p_{31}+cp_{22}p_{32}-p_{21}p_{32}s+p_{22}p_{31}s+p_{23}p_{33}\\ cp_{31}^2+cp_{32}^2+p_{33}^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c(p_{11}p_{31}+p_{12}p_{32})+s(p_{12}p_{31}-p_{11}p_{32})+p_{13}p_{33} \\ c(p_{21}p_{31}+p_{22}p_{32})+s(p_{22}p_{31}-p_{21}p_{32})+p_{23}p_{33} \\ cp_{31}^2+cp_{32}^2+p_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-c)p_{13}p_{33}+sp_{23} \\ (1-c)p_{23}p_{33}-sp_{13} \\ (1-c)p_{33}^2+c \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ の $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = p_{33}$, $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = -p_{23}$, $\begin{vmatrix} p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = p_{13}$ を使った。

まとめると

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix} -x^2-y^2+z^2+1 & -2x-2yz & 2xz-2y \\ 2x-2yz & -x^2+y^2-z^2+1 & -2xy-2z \\ 2xz+2y & -2xy+2z & x^2-y^2-z^2+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-c)p_{13}^2+c & (1-c)p_{13}p_{23}-sp_{33} & (1-c)p_{13}p_{33}+sp_{23} \\ (1-c)p_{13}p_{23}+sp_{33} & (1-c)p_{23}^2+c & (1-c)p_{23}p_{33}-sp_{13} \\ (1-c)p_{13}p_{33}-sp_{23} & (1-c)p_{23}p_{33}+sp_{13} & (1-c)p_{33}^2+c \end{pmatrix}$$

成分を比較して

$$\frac{-2x-2yz}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{13}p_{23}-sp_{33} , \quad \frac{2x-2yz}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{13}p_{23}+sp_{33}$$

（後－前）$\dfrac{4x}{x^2+y^2+z^2+1} = 2sp_{33} \rightarrow$ ④ $\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} = sp_{33}$

$$\frac{2xz-2y}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{13}p_{33}+sp_{23} , \quad \frac{2xz+2y}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{13}p_{33}-sp_{23}$$

（後－前）$\dfrac{4y}{x^2+y^2+z^2+1} = -2sp_{23} \rightarrow$ ⑤ $\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} = -sp_{23}$

$$\frac{-2xy-2z}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{23}p_{33}-sp_{13} , \quad \frac{-2xy+2z}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{23}p_{33}+sp_{13}$$

（後－前）$\dfrac{4z}{x^2+y^2+z^2+1} = 2sp_{13} \rightarrow$ ⑥ $\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} = sp_{13}$

まとめると

①$\dfrac{-x^2-y^2+z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{13}^2+c$, ②$\dfrac{-x^2+y^2-z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{23}^2+c$, ③$\dfrac{x^2-y^2-z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)p_{33}^2+c$

④$\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} = sp_{33}$, ⑤$\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} = -sp_{23}$, ⑥$\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} = sp_{13}$

①＋②＋③

$$\frac{-x^2-y^2+z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1}+\frac{-x^2+y^2-z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1}+\frac{x^2-y^2-z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1} = (1-c)+3c \quad \rightarrow \quad 1+2c = \frac{3-x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$2c = \frac{3-x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2+1}-\frac{x^2+y^2+z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1} = \frac{2-2x^2-2y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2+1} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1-x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2+1}$$

④^2＋⑤^2＋⑥^2

$$s^2 = \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \ \rightarrow\ sin\,\theta = \pm\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (\,0 \leqq \theta < \pi\,)\,,\ |\,P\,| = 1 \ \rightarrow\ tan\frac{\theta}{2} \geqq 0$$

$tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqq 0$ なので

$$cos\,\theta = \frac{1-x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2+1} \geqq 0 \ ,\ sin\,\theta = \frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2+1} \geqq 0$$

$$\left(\, cos\,\theta = \frac{1-tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+tan^2\dfrac{\theta}{2}} \ ,\ sin\,\theta = \frac{2tan\dfrac{\theta}{2}}{1+tan^2\dfrac{\theta}{2}} \,\right)$$

また、④，⑤，⑥ から

$$s\begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \ \rightarrow\ \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \frac{x^2+y^2+z^2+1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{2}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

ここで、$P = (\,\boldsymbol{p}_1\,,\boldsymbol{p}_2\,,\boldsymbol{p}_3\,)$ と考えれば、底の変換行列 P をほどこすことによって

$$T(\,\boldsymbol{p}_1\,,\boldsymbol{p}_2\,,\boldsymbol{p}_3\,) = (\,\boldsymbol{p}_1\,,\boldsymbol{p}_2\,,\boldsymbol{p}_3\,)\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ T\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_3 \quad \leftarrow \boldsymbol{p}_3 \text{ が回転の軸になる。}$$

$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$ は $\theta \neq 0$ のとき、回転軸の正の方向を向く単位ベクトルとなることがわかる。（ $\theta = 0$ の場合は $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$ となってしまう。）

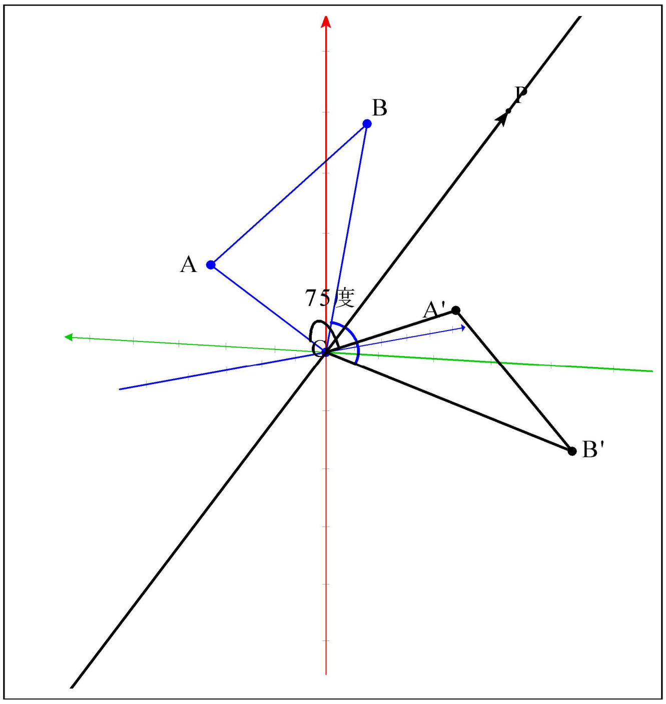
$\theta = \pi$ の場合、$tan\dfrac{\theta}{2} = +\infty$ ，$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり、除かれた部分の集合に含まれる -1 を固有値とする T になる。

(具体的に)

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}\fallingdotseq\begin{pmatrix}0.333 & -0.933 & 0.133\\ -0.667 & -0.333 & -0.667\\ 0.667 & 0.133 & -0.733\end{pmatrix}$$

$$\theta\fallingdotseq 75\text{ 度},\ \boldsymbol{p}_3\fallingdotseq\begin{pmatrix}0.267\\ -0.535\\ 0.802\end{pmatrix}$$



(P. 184　問3)

A を任意の複素行列とする。$\boldsymbol{T}^*A\boldsymbol{T}=A$ で、-1 を固有値にもたない n 次複素行列 $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{X}^*A+A\boldsymbol{X}=0$ で固有値 -1 をもたない n 次複素行列 $\boldsymbol{X}$ とは Cayley 変換 (40) , (41) により一対一に対応することを示せ。

まず、A が正則ならば $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ に注意して

$\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}^*A+A\boldsymbol{X}=0$ で固有値 -1 をもたない n 次複素行列とする。$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}$ は正則である。

$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$, $\boldsymbol{T}^*=((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1})^*(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}^*)=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}^*)$

また、$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})$ よって、$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})$ と $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$ は交換可能

$\boldsymbol{T}^*A\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}^*)A(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(A-\boldsymbol{X}^*A)(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(A+A\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}A(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}A(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(A-A\boldsymbol{X})$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(A+\boldsymbol{X}^*A)=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X}^*)A=A$

$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$

$=2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}=2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})^{-1}$ であるから $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}$ も正則である。よって、$\boldsymbol{T}$ は-1 を固有値にもたない n 次複素行列である。

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{X})=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}\ \rightarrow\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}\ \rightarrow\ \boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T})^{-1}$ を得る。

逆に、T を-1 を固有値にもたない n 次複素行列とする。$E+T$ は正則である。

$X=(E-T)(E+T)^{-1}$ とすれば、T, $(E-T)$, $(E+T)$, $(E+T)^{-1}$ は交換可能で

T^*, $(E-T^*)$, $(E+T^*)$, $(E+T^*)^{-1}$ も交換可能で $X^*=(E+T^*)^{-1}(E-T^*)$ なので

T^* と X^* も交換可能である。$T^*AT=A$ から

$X^*AT=(E+T^*)^{-1}(E-T^*)AT=(E+T^*)^{-1}(AT-A)=(E+T^*)^{-1}A(T-E)$

$X^*AT=(E+T^*)^{-1}A(T-E)$

$(E+T^*)X^*AT=A(T-E)$

$X^*AT+T^*X^*AT=A(T-E)$

$X^*AT+X^*A=AT-A$

$X^*(AT+A)=AT-A$ … ①

$AXT=A(E-T)(E+T)^{-1}T=AT(E-T)(E+T)^{-1}=(AT-ATT)(E+T)^{-1}$

$=(A-AT)T(E+T)^{-1}$

$=-X^*(AT+A)T(E+T)^{-1}$ ← ① を代入する。

$=-X^*A(T+E)T(E+T)^{-1}$

$=-X^*AT$

よって、$(AX+X^*A)T=0$ を得る。T は正則でもかまわないので、$X^*A+AX=0$ となる。

$E+X=(E+T)(E+T)^{-1}+(E-T)(E+T)^{-1}=2(E+T)^{-1}$　よって、$E+X$ は正則

したがって、$T=(E-X)(E+X)^{-1}$

一対一に対応することに関しては、P．183と同様である。