## （P．92　注意　一次独立と表現の一意性は同値）

逆に表現が一意的ならば、$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{a}_i = 0$ のとき、$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{a}_i = 0 = \sum_{i=1}^{r} 0\boldsymbol{a}_i$ なので、表現の一意性から $c_i = 0$ （$1 \leqq i \leqq r$）とならなければならない。したがって、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立になる。

## （P．93　補題2　もう少し詳しく）

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\} \sim \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}, \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\} \sim \{\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t\}$ ならば

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\} \sim \{\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t\}$

なぜなら、任意の $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{a}_i = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{b}_s$ と表すことができる。また、任意の $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{b}_j = y_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + y_t\boldsymbol{c}_t$ したがって、代入すれば、$\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ の一次結合で表すことができる。逆も同様である。

また、すべての $\boldsymbol{b}_j$ が $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}$ に一次従属ならば、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}\} \sim \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ となってしまうので、一次従属とならない $\boldsymbol{b}_j$ が存在する。そのような $\boldsymbol{b}_j$ の一つを $\boldsymbol{b}_{j_r}$ とする。

$\boldsymbol{b}_{j_r}$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ に一次従属、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}\}$ には一次従属ではないから、$\boldsymbol{b}_{j_r} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{a}_{r-1} + c_r\boldsymbol{a}_r$ とかいたとき、$c_r \neq 0$ である。もし、$c_r = 0$ ならば $\boldsymbol{b}_{j_r}$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}\}$ に一次従属になってしまう。よって、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{b}_{j_r}\} \sim \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ とすることができた。
当然、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{b}_{j_r}\}$ は一次独立なベクトルの集合である。

この操作を繰り返すということは次に $\boldsymbol{a}_{r-1}$ を選んだとして
$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_{r-1}}, \boldsymbol{b}_{j_r}\}$ が一次独立なベクトルの集合で $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_{r-1}}, \boldsymbol{b}_{j_r}\} \sim \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ となる $\boldsymbol{b}_{j_{r-1}}$ が存在するということになる。

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{b}_{j_r}\} \sim \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ であるが

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_r}\} \sim \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ ではない。

もしそうならば、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{b}_{j_r}\} \sim \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_r}\}$ となり、$\boldsymbol{a}_{r-1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_r}$ に一次従属となり矛盾する。

したがって、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_r}$ に一次従属ではない $\boldsymbol{b}_{j_{r-1}}$ が存在して $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_{r-1}}, \boldsymbol{b}_{j_r}\}$ が一次独立なベクトルの集合とすることができる。

また、$\boldsymbol{b}_{j_{r-1}}$ は { $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } に一次従属で { $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } に一次従属ではないので

$\boldsymbol{b}_{j_{r-1}} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r-2}\boldsymbol{a}_{r-2} + c_{r-1}\boldsymbol{a}_{r-1} + c_{j_{r1}}\boldsymbol{b}_{j_{r1}}$ ( $c_{r-1} \neq 0$ ) となり、$\boldsymbol{a}_{r-1}$ は { $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_{r-1}}, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } に一次従属になり、{ $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r-2}, \boldsymbol{b}_{j_{r-1}}, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } ～ { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } となる。よって、これを繰り返していくと、いずれ { $\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } ～ { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } となる。

{ $\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } $\subset$ { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } は当然である。

もし、$\boldsymbol{b}_i \in$ { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } で $\boldsymbol{b}_i \notin$ { $\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } となる $\boldsymbol{b}_i$ が存在したとすれば、上記より、$\boldsymbol{b}_i = x_{j_1}\boldsymbol{b}_{j_1} + \cdots + x_{j_r}\boldsymbol{b}_{j_r}$ ( $i \neq j_k$ , $1 \leqq k \leqq r$ ) とかける。しかし、$\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_r}$ は { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } の元だったので、$\boldsymbol{b}_i$ が { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } に関して一次従属になり、矛盾する。よって { $\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_r}$ } = { $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ } したがって、$r = s$ となる。

（別証）仮定から

$$\boxed{\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \sum_{i=1}^{r} q_{i1}\boldsymbol{a}_i = q_{11}\boldsymbol{a}_1 + q_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + q_{r1}\boldsymbol{a}_r \\
\boldsymbol{b}_2 &= \sum_{i=1}^{r} q_{i2}\boldsymbol{a}_i = q_{12}\boldsymbol{a}_1 + q_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + q_{r2}\boldsymbol{a}_r \\
&\vdots \\
\boldsymbol{b}_s &= \sum_{i=1}^{r} q_{is}\boldsymbol{a}_i = q_{1s}\boldsymbol{a}_1 + q_{2s}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + q_{rs}\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}}$$

記号的には（右辺は行列の乗法（成分どうしの積）の定義に乗っ取っていない）

$$( \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s ) = ( \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r ) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ & & \cdots & \\ q_{r1} & q_{r2} & \cdots & q_{rs} \end{pmatrix} \leftarrow ( r , s ) \text{行列}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \sum_{j=1}^{s} p_{j1}\boldsymbol{b}_j = p_{11}\boldsymbol{b}_1 + p_{21}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{s1}\boldsymbol{b}_s \\
\boldsymbol{a}_2 &= \sum_{j=1}^{s} p_{j2}\boldsymbol{b}_j = p_{12}\boldsymbol{b}_1 + p_{22}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{s2}\boldsymbol{b}_s \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_r &= \sum_{j=1}^{s} p_{jr}\boldsymbol{b}_j = p_{1r}\boldsymbol{b}_1 + p_{2r}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{sr}\boldsymbol{b}_s
\end{aligned}}$$

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r) = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ & & \cdots & \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{sr} \end{pmatrix} \leftarrow (s, r)\text{行列}$$

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s) = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s)\begin{array}{cc} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ & & \cdots & \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{sr} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ & & \cdots & \\ q_{r1} & q_{r2} & \cdots & q_{rs} \end{pmatrix} \end{array}$$

表現の一意性から $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{E}^{(s)}$

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{array}{cc} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P} \\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ & & \cdots & \\ q_{r1} & q_{r2} & \cdots & q_{rs} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ & & \cdots & \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{sr} \end{pmatrix} \end{array}$$

同様にして、表現の一意性から $\boldsymbol{QP} = \boldsymbol{E}^{(r)}$

後は、II 定理9により、$r = s$ となる。

## (P．95　定理1　証明補足)

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ から一次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ を選びだし、すべての $\boldsymbol{a}_i$ が $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ の一次従属になる。そのような一次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_s}\}$ が別にあったとする。当然、すべての $\boldsymbol{a}_i$ が それぞれの集合の一次従属になるのであるから、$\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\} \sim \{\boldsymbol{a}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_s}\}$、よって、$r = s$ となる。

## (P．95　系1　証明補足)

特に $p = s$ ならば、$t = 0$ よって、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ の一次独立なベクトルの極大集合が $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ となる。ということは 各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ に一次従属になる。

また、$\{\boldsymbol{b}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{k_r}\}$ は一次独立で、$\{\boldsymbol{b}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{k_r}\} \subset \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$, $r = s$ から

$\{\boldsymbol{b}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{k_r}\} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ よって、$\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ は一次独立であることになる。

## (P．96　定理2　証明補足)

$m$ − ベクトルについて、$N = {}_n\mathrm{C}_m$ 次元ベクトルである $|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m| = 0$ ということは、すべての

$m$ 次行列式が = 0 であるとういことを言い換えているだけである。

（十分条件　$\neq 0$ ならば）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases} \rightarrow x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}=0$$

もし、すべての $m$ 次行列式が 0 だとしたら、$\neq 0$ の解が存在するはずである。$x_1 , \cdots , x_n$ の中で、1つでも $\neq 0$ でない解があれば、一次独立であることに反する。

（必要条件　一次独立ならば）

$A$ の $n$ 個の行の中から、$m$ 個の行を選び出して作った $m$ 次行列式が 0 にならないものを具体的に作ればよい。

$(\boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_m , \boldsymbol{e}_{j_1} , \cdots , \boldsymbol{e}_{j_t}) \sim (\boldsymbol{e}_1 , \cdots , \boldsymbol{e}_n)$ なので、補題2の別証から、この $n$ 次正方行列は正則である。そこで、仮に $j_1=m+1 , j_2=m+2 , \cdots , j_r=n$ の場合には、その行列は記号的な表現で次のようになり、$P$.54 の例4 より

$$(\boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_m , \boldsymbol{e}_{j_1} , \cdots , \boldsymbol{e}_{j_t})=(\boldsymbol{e}_1 , \cdots , \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\neq 0$$

ここで、一般の場合に移る前に、具体的に、もし、$j_1=2 , j_2=3 , j_3=5$ だとしたら $i_1=1 , i_2=4 , i_3=6$ とする。これは $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ から $\{2 , 3 , 5\}$ を除いたものである。

$$(\boldsymbol{a}_1 , \boldsymbol{a}_2 , \boldsymbol{a}_3 , \boldsymbol{e}_2 , \boldsymbol{e}_3 , \boldsymbol{e}_5)=(\boldsymbol{e}_1 , \boldsymbol{e}_2 , \boldsymbol{e}_3 , \boldsymbol{e}_4 , \boldsymbol{e}_5 , \boldsymbol{e}_6)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 & 1 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ を行に施すと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 & 1 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \neq 0$$

一般の場合には、$\{1, \cdots, n\}$ から $\{j_1, \cdots, j_t\}$ を取り去った残りを $\{i_1, \cdots, i_m\}$ とすれば

$$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j_t}) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m & m+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_t \end{pmatrix}$ とおくことにより

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_m 1} & \cdots & a_{i_m m} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 m} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j_t 1} & \cdots & a_{j_t m} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m 1} & \cdots & a_{i_m m} \end{vmatrix} \neq 0$$

元の $n$ 次正方行列は正則なので、その行列式は $\neq 0$ つまり、適当な $m$ 次行列を選び出せばその行列式を $\neq 0$ とすることができる。これで存在を示したことになる。

## (P. 97　系)

(32) $$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_m) \\ & & \cdots & \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m) \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m \leqq n} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 1} & a_{\alpha_1 2} & \cdots & a_{\alpha_1 m} \\ a_{\alpha_2 1} & a_{\alpha_2 2} & \cdots & a_{\alpha_2 m} \\ & & \cdots & \\ a_{\alpha_m 1} & a_{\alpha_m 2} & \cdots & a_{\alpha_m m} \end{vmatrix}^2$$

$P.\ 72$ 例3 から、$m \leqq n$ ならば上の等式が成り立つので、左辺が $\neq 0$ ならば、2 乗があるので右辺のどれかは $\neq 0$ となり、右辺のすべての項が 0 ならば 左辺は 0 となる。よって、定理2と同値になる。

## (P. 97 注意1)

定理2 を $m = n$ に置き換えると、$\boldsymbol{a}_j = (a_{ij})(1 \leqq j \leqq m)$ が一次独立であるための必要十分な条件は、$A = (a_{ij})$ とおいたとき、$|A| \neq 0$ である。つまり、一次従属ならば、$|A| = 0$ 、逆もいえる。

$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属ならば

任意の $i$ に対し $\sum_{j=1}^{m} c_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{a}_j) = 0$ つまり

$c_1(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1) + c_2(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_2) + \cdots + c_m(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_m) = 0$

となる、$(c_1, \cdots, c_m) \neq (0, \cdots, 0)$ が存在するので

$$c_1\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1)\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix} + \cdots + c_m\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m)\end{pmatrix} = 0$$ よって、$det((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)) = 0$

逆に、$det((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)) = 0$ ならば、$A = ((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j))$ としたとき、定理2から $A$ の列ベクトルは一次従属なので $(c_1, \cdots, c_m) \neq (0, \cdots, 0)$ があって

$$c_1\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1)\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix} + \cdots + c_m\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

よって、$\sum_{j=1}^{m} c_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq m)$

$(\sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{a}_i, \sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{a}_i) = (c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m, c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m)$

$= c_1\sum_{j=1}^{m} c_j(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_j) + \cdots + c_m\sum_{j=1}^{m} c_j(\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_j) = 0$

故に、内積の性質により、$\sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{a}_i = 0$ すなわち、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ は一次従属である。

## (P. 98 定理2 別証明 I)の補足)

$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が強い意味で一次独立ならば、$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r| \neq 0$ なので

$N = {}_nC_r$ 次元ベクトルのいずれかの $\nu$ 成分で $\neq 0$ となるものがある。しかし、ここでは簡単にするために、$\Delta_r$ として次の行列式を考えることにする。もし、必要があれば行の置換を行って考えることとする。(符号が変わるだけで、$= 0$ か $\neq 0$ であるかには関係しない。)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2m} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rm} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,m} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,j} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

そこで、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_r$（$r-1$ で証明できれば、それを根拠に $r-2$, $r-3$, … と順に減らしていけばよい）としたとき、$j$ 列での余因子による展開を考えると

$$\Delta_r = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{rj}\Delta_{rj} \neq 0$$

よって、いずれかの $\Delta_{kj} \neq 0$（$1 \leqq k \leqq r$）

このことは、$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_r| \neq 0$ であることを示している。

## （P. 98　定理2　別証明　Ⅱ修正）

必要があれば行の置換を行って考えることとして、上と同様に $\Delta_r \neq 0$ と仮定する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2m} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rm} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,m} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = a_{1,r+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = a_{2,r+1} \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = a_{r,r+1} \end{cases}$$

*Cramer* の定理により

$i$ ← 原文では $j$

$$x_i = c_i = \frac{\triangle_{i,r+1}}{\Delta_r}, \quad \triangle_{i,r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

余因子ではない！

この、$c_1, \cdots, c_r$ が残りの連立方程式の解になっていることを示せばよい。つまり

$$\begin{cases} a_{r+11}c_1 + a_{r+12}c_2 + \cdots + a_{r+1r}c_r = a_{r+1,r+1} \\ a_{r+21}c_1 + a_{r+22}c_2 + \cdots + a_{r+2r}c_r = a_{r+2,r+1} \\ \cdots \\ a_{n1}c_1 \ + \ a_{n2}c_2 \ + \cdots + \ a_{nr}c_r = a_{n,r+1} \end{cases}$$

$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$ は強い意味で一次独立ではないので、どの行を $r+1$ 本選んでも 0 である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,r} & a_{r,r+1} \\ a_{r+i,1} & \cdots & a_{r+i,r} & a_{r+i,r+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n-r) \leftarrow n \text{ 次元ベクトルなので}$$

この行列式を最後の行に関して展開したいが、その前に

$$\triangle_{i,r+1} = \begin{array}{c} \hspace{3em} i \\ \hspace{3em} \vee \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \end{array} \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

$$= (-1)^{r-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} \end{vmatrix} \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

$\uparrow$

$i$ が変わるたびに $a_i$ がないことに注意！

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} \end{vmatrix} = (-1)^{-r+i} \triangle_{i,r+1} \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

$\uparrow$

$i$ が変わるたびに $a_i$ がないことに注意！

最後の行に関して展開すると

$$(-1)^{r+i+1}(-1)^{-r+1}\triangle_{1,r+1}a_{r+i,1} + (-1)^{r+i+2}(-1)^{-r+2}\triangle_{2,r+1}a_{r+i,2} + \cdots$$

$$+ (-1)^{2r+i}(-1)^{0}\triangle_{r,r+1}a_{r+i,r} + (-1)^{2r+i+1}\Delta_r a_{r+i,r+1} = 0$$

$$(-1)^{i+2}\triangle_{1,r+1}a_{r+i,1} + (-1)^{i+4}\triangle_{2,r+1}a_{r+i,2} + \cdots + (-1)^{i}\triangle_{r,r+1}a_{r+i,r} + (-1)^{i+1}\Delta_r$$

$$a_{r+i,r+1} = 0$$

$$(-1)^{i}\triangle_{1,r+1}a_{r+i,1} + (-1)^{i}\triangle_{2,r+1}a_{r+i,2} + \cdots + (-1)^{i}\triangle_{r,r+1}a_{r+i,r} + (-1)^{i+1}\Delta_r a_{r+i,r+1} = 0$$

$$\triangle_{1,r+1}a_{r+i,1} + \triangle_{2,r+1}a_{r+i,2} + \cdots + \triangle_{r,r+1}a_{r+i,r} + (-1)^{1}\Delta_r a_{r+i,r+1} = 0$$

$$\frac{\triangle_{1,r+1}}{\Delta_r}a_{r+i,1} + \frac{\triangle_{2,r+1}}{\Delta_r}a_{r+i,2} + \cdots + \frac{\triangle_{r,r+1}}{\Delta_r}a_{r+i,r} = a_{r+i,r+1} \quad (1 \leqq i \leqq n-r)$$

よって、$r+1 \leqq i \leqq n$ に対しても

$$c_1\, a_{r+i,1} + c_2\, a_{r+i,2} + \cdots + c_r\, a_{r+i,r} = a_{r+i,r+1}$$

なので、$c_1\,\boldsymbol{a}_1 + c_2\,\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\,\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_{r+1}$ この表現は $Cramer$ の定理により、一意的であると言いたいところだが、他に

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 r} \\ & \cdots & \\ a_{i_r 1} & \cdots & a_{i_r r} \end{vmatrix} \neq 0$$

となる行があるかもしれない。しかし、上の証明から、そのような行に関しても $c_1, \cdots, c_r$ が解になっていることがわかる。つまり、「$a_1, \cdots, a_r, a_{r+1}$ は強い意味で一次独立ではない」の存在があるからだ。

さて、この別証明の存在理由は、一次独立ならば $\neq 0$ となる $m$ 次行列式が存在することを示すことである。つまり残されたことは、普通の意味で一次独立ならば強い意味で一次独立であることを示せばよい。

まず、$\{a_1, \cdots, a_m\}$ が一次独立ならば、$a_i \neq 0$ ($1 \leqq i \leqq m$) なので、強い意味での一次独立なベクトルの集合は $\varnothing$ でなはい。また、包含関係において順序集合であり、Ⅰ）によって、その部分集合は強い意味で一次独立であるので、包含関係において全順序集合になるように選べばツォルンの補題(数学の基礎 P. 32)によって極大な集合 $\{a_{i_1}, \cdots, a_{ir}\}$ が存在することがわかる。(極大な集合 $\{a_{i_1}, \cdots, a_{ir}\}$ の存在を認めるならばツォルンの補題は必要ない。)

もし、$r < m$ だとすれば、$a_i \notin \{a_{i_1}, \cdots, a_{ir}\}$ が存在するはずなので、Ⅱ）から $a_i$ は $a_{i_1}, \cdots, a_{ir}$ の一次結合として一意的に表すことができる。このことは、$a_1, \cdots, a_m$ が普通の意味で一次独立であることに反する。よって、$r = m$ となる。

## (P. 100　ⅰ) ⅱ) について)

$dim\ W = r$ ならば、$W$ の中に $r$ 個の一次独立なベクトルが存在し、$(r+1)$ 個以上の一次独立なベクトルは存在しないのだから、一次独立なベクトル $\{a_1, \cdots, a_r\}$ を選び出すことができる。

ⅰ) 任意のベクトル $x \in W$ に対し、$\{a_1, \cdots, a_r, x\}$ という集合を考えたとき、$\{a_1, \cdots, a_r, x\}$ は一次独立ではないので一次従属になる。よって、補題1から $x$ は $\{a_1, \cdots, a_r\}$ の一次結合として表すことができ、ⅱ) それも一意的である。

逆に、部分空間 $W$ が ⅰ)、ⅱ) が満たすならば、$r$ 個の一次独立なベクトルの集合 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ が存在する。このとき、$W$ に含まれる $p$ 個の一次独立なベクトルの集合 $\{b_1, \cdots, b_p\}$ を選んだとき、ⅰ) から、各 $b_i$ は $\{a_1, \cdots, a_r\}$ に一次従属である。したがって、定理1の系1から $p \leqq r$ となる。よって、$(r+1)$ 個以上の一次独立なベクトルは存在しないので、$dim\ W = r$

## (P. 101　$W_1 \subset W_2$, $r_1 = r_2$ ならば $W_1 = W_2$)

いくつかの定理の証明に使われる。重要な性質である。

## (P. 102　問2)

$W_1 + W_2$ は $W_1, W_2$ を含む最小の部分空間である。

(証)(ⅰ)任意の $\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{y} \in W_1 + W_2$ , $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ , $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ ( $\boldsymbol{x}_1$ , $\boldsymbol{y}_1 \in W_1$ , $\boldsymbol{x}_2$ , $\boldsymbol{y}_2 \in W_2$ ) に対し、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2)$ , $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 \in W_1$ , $\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ よって、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 + W_2$

(ⅱ)任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ , $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ ( $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$ , $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ ) に対し、任意のスカラー $c$ があって、$c\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}_1 + c\boldsymbol{x}_2$ , $c\boldsymbol{x}_1 \in W_1$ , $c\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ よって、$c\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$

よって、(ⅰ)、(ⅱ)をみたすので部分空間となる。

$0 \in W_1$ , $W_2$ なので、$W_1$ , $W_2 \subset W_1 + W_2$ である。

最後に、$W$ を $W_1$ , $W_2$ を含む部分空間とすれば、任意の $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$ , $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ に対し、$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 \in W$ よって、$W_1 + W_2 \subset W$

よって、最小であることがわかった。

## (P. 104　問3)

一般には

$dim\ W \leqq dim\ W_1 + dim\ W_2 + \cdots + dim\ W_m$

直和のときに限り

$dim\ W = dim\ W_1 + dim\ W_2 + \cdots + dim\ W_m$

(証)　$dim\ W_1 = r_i$ とし、$W_i$ の1つの基底を $\{ \boldsymbol{a}_1^{(i)} , \boldsymbol{a}_2^{(i)} , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_i}^{(i)} \}$ とする。$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ ならば、$W$ は $\{ \boldsymbol{a}_1^{(1)} , \boldsymbol{a}_2^{(1)} , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_1}^{(1)} , \boldsymbol{a}_1^{(2)} , \boldsymbol{a}_2^{(2)} , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_2}^{(2)} , \cdots , \boldsymbol{a}_1^{(m)} , \boldsymbol{a}_2^{(m)} , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_m}^{(m)} \}$ によって生成される。したがって、生成元のなかから一次独立な基底を選ぶことができるので

$dim\ W \leqq dim\ W_1 + dim\ W_2 + \cdots + dim\ W_m$

となる。

ここで、証明を線型代数入門P. 111［4. 9］(齋藤正彦　著)に写し、問3、問4 をいっきに証明する。

［4. 9］　$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ であるとき、次の三条件は同値である。

1)　$W = W_1 \dotplus W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_m$　( $\dotplus$ は直和を表す)

2)　$W_i \cap ( W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_m ) = \{ 0 \}$ ( $i = 1 , 2 , \cdots , m$ )

3)　$dim\ W = dim\ W_1 + dim\ W_2 + \cdots + dim\ W_m$

(証)　$k$ に関する帰納法で証明する。$k = 2$ の場合は、前定理で証明済みである。$k > 2$ とし

て、$k-1$ のときは成り立つと仮定する。

$U_i = W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_m$ （$i = 1, 2, \cdots, m$）

とおく。1⇒3⇒2⇒1 の順で証明する。

（1⇒3） 仮定から

$W = W_1 \dotplus U_1$ （$W_1 \cap U_1 = \{0\}$）

$U_1 = W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_m$

が成り立つので、帰納法の仮定より

$dim\ W = dim\ W_1 + dim\ U_1 = dim\ W_1 + \sum_{i=2}^{m} dim\ W_i = \sum_{i=1}^{m} dim\ W_i$

（3⇒2） $W = U_i + W_i$ であるから

$dim\ U_i \geqq dim\ W - dim\ W_i = \sum_{j \neq i}^{m} dim\ W_j$

ところが一般に、$dim\ U_i \leqq \sum_{j \neq i}^{m} dim\ W_j$ であるから

$dim\ W = \sum_{j \neq i}^{m} dim\ W_j = dim\ W_i + dim\ U_i$

よって、前定理より、$W_i \cap U_i = \{0\}$ となる。

（2⇒1） $W$ の元 $x$ が二通りに

$x = \sum_{j=1}^{m} x_j$ , $x = \sum_{j=1}^{m} x'_j$ , $x_j, x'_j \in W_j$ （$j = 1, 2, \cdots, m$）

と表されるならば

$x_i - x'_i = \sum_{j \neq i}^{m} (x'_j - x_j)$

が成り立ち、左辺は $W_i$ に含まれ、右辺は $U_i$ に含まれるので、ともに $W_i \cap U_i$

に含まれる。すなわち、0 である。$i$ は任意だったので、$W$ は $W_1, W_2, \cdots, W_m$ の直和である。

## （P. 104 注意）

（ⅰ）$(W_1 + W_2) \cap W_3 \supset (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$ を証明する。

任意の $x = a + b \in (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$（$a \in W_1 \cap W_3$, $b \in W_2 \cap W_3$）ならば

$a + b \in W_1 + W_2$ かつ $a + b \in W_3$ である。

よって、$x = a + b \in (W_1 + W_2) \cap W_3$

” ≠ ”となることについて

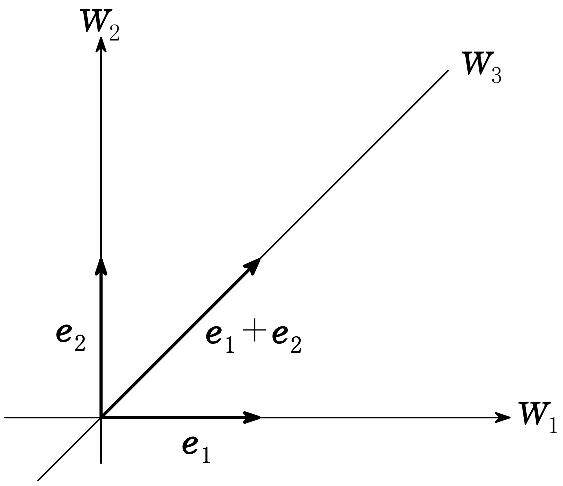
ヒントはP．96の21行目にあるが

$W_1=\{\{\boldsymbol{e}_1\}\}$, $W_2=\{\{\boldsymbol{e}_2\}\}$

$W_3=\{\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}\}$ とおく

$(W_1+W_2)\cap W_3=R^2\cap W_3=W_3$

$(W_1\cap W_3)+(W_2\cap W_3)=\{0\}$




よって、$(W_1+W_2)\cap W_3\neq(W_1\cap W_3)+(W_2\cap W_3)$ であって、”＝”にはならない。

（ⅱ）$(W_1\cap W_2)+W_3\subset(W_1+W_3)\cap(W_2+W_3)$ を証明する。

任意の $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in(W_1\cap W_2)+W_3$ ($\boldsymbol{a}\in(W_1\cap W_2)$, $\boldsymbol{b}\in W_3$)に対し、

$\boldsymbol{a}\in W_1$ かつ $\boldsymbol{a}\in W_2$ , $\boldsymbol{b}\in W_3$ なので、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W_1+W_3$ かつ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W_2+W_3$ である。よって、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in(W_1+W_3)\cap(W_2+W_3)$

” ≠ ”となることについて

上と同じように部分空間を定めると

$(W_1\cap W_2)+W_3=\{0\}$

$(W_1+W_3)\cap(W_2+W_3)=R^2\cap R^2=R^2$

よって

$(W_1\cap W_2)+W_3\neq(W_1+W_3)\cap(W_2+W_3)$

## （P．105　$a''\neq 0$）

$\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}-c_1\boldsymbol{f}_1-c_2\boldsymbol{f}_2-\cdots-c_p\boldsymbol{f}_p$ なので、もし＝0ならば、$\boldsymbol{a}$ は $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_p\}$ に一次従属になってしまう。

## （P．105　*Schmidt*の直交化法）

$W$ の一つの底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられていたとすれば、

$c_{11}=\|\boldsymbol{a}_1\|^{-1}$

$\boldsymbol{f}_1=c_{11}\boldsymbol{a}_1$

$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{f}_1)=c \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{a}_2-c\boldsymbol{f}_1 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{f}_2=\dfrac{\boldsymbol{a}_2-c\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{a}_2-c\boldsymbol{f}_1\|}$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1}{\| \boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1 \|} = \frac{-c\boldsymbol{f}_1}{\| \boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1 \|} + \frac{\boldsymbol{a}_2}{\| \boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1 \|}$$

$$= \frac{-cc_{11}}{\| \boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1 \|}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{\| \boldsymbol{a}_2 - c\boldsymbol{f}_1 \|}\boldsymbol{a}_2 = c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{f}_1) = c_1, (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{f}_2) = c_2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2 \|} = \frac{-c_1c_{11}\boldsymbol{a}_1 - c_2(c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_3}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2 \|}$$

$$= \frac{-c_1c_{11} - c_2c_{12}}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2 \|}\boldsymbol{a}_1 + \frac{-c_2c_{22}}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2 \|}\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{\| \boldsymbol{a}_3 - c_1\boldsymbol{f}_1 - c_2\boldsymbol{f}_2 \|}\boldsymbol{a}_3$$

$$= c_{13}\boldsymbol{a}_1 + c_{23}\boldsymbol{a}_1 + c_{33}\boldsymbol{a}_1 \quad , \quad (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \delta_{ij} \ (1 \leqq i, j \leqq 3)$$

さらに続けていけば

$\boldsymbol{f}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1$

$\boldsymbol{f}_2 = c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2$

$\boldsymbol{f}_3 = c_{13}\boldsymbol{a}_1 + c_{23}\boldsymbol{a}_2 + c_{33}\boldsymbol{a}_3$

$\vdots$

$\boldsymbol{f}_r = c_{1r}\boldsymbol{a}_1 + c_{2r}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{rr}\boldsymbol{a}_r$

$\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_p$ がすでに得られていたとすれば

このようにして、正規直交系 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_r\}$ を得ることができる。

（注意） $c_{ii} \neq 0 \ (1 \leqq i \leqq r)$ なぜなら

$c_{ii} = \dfrac{1}{\| \boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{f}_k)\boldsymbol{f}_k \|}$ なので $\| \boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{f}_k)\boldsymbol{f}_k \| = 0$ ならば

$$\boldsymbol{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{f}_k)\boldsymbol{f}_k = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{a}_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{f}_k)\boldsymbol{f}_k$$

$\boldsymbol{a}_i$ は一次従属になってしまうからである。

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1\\
&\boldsymbol{f}_2 = c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2\\
&\boldsymbol{f}_3 = c_{13}\boldsymbol{a}_1 + c_{23}\boldsymbol{a}_2 + c_{33}\boldsymbol{a}_3\\
&\quad\vdots\\
&\boldsymbol{f}_r = c_{1r}\boldsymbol{a}_1 + c_{2r}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{rr}\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}}$$

これを逆に $\boldsymbol{a}_i$ に関して解けば

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1 = c'_{11}\boldsymbol{f}_1\\
&\boldsymbol{a}_2 = c'_{12}\boldsymbol{f}_1 + c'_{22}\boldsymbol{f}_2\\
&\boldsymbol{a}_3 = c'_{13}\boldsymbol{f}_1 + c'_{23}\boldsymbol{f}_2 + c'_{33}\boldsymbol{f}_3\\
&\quad\vdots\\
&\boldsymbol{a}_r = c'_{1r}\boldsymbol{f}_1 + c'_{2r}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + c'_{rr}\boldsymbol{f}_r
\end{aligned}}$$

$\boldsymbol{f}_1 = \dfrac{1}{c'_{11}}\boldsymbol{a}_1$ つまり、$c_{11} = \dfrac{1}{c'_{11}}$ である。

2番目の式を $\boldsymbol{f}_2$ について解くと、$\boldsymbol{f}_2 = \dfrac{-c'_{12}}{c'_{22}}\boldsymbol{f}_1 + \dfrac{1}{c'_{22}}\boldsymbol{a}_2$ 、$\boldsymbol{f}_1$ の中には $\boldsymbol{a}_2$ は含まれないので表現の一意性から $c_{22} = \dfrac{1}{c'_{22}}$ となる。同様に $\boldsymbol{f}_i$ について解けば、$\boldsymbol{f}_1 \sim \boldsymbol{f}_{i-1}$ の中に $\boldsymbol{a}_i$ は含まれないので表現の一意性から $c_{ii} = \dfrac{1}{c'_{ii}}$ となる。また、$\neq 0$ である。

$\boldsymbol{a}_j$ , $\boldsymbol{f}_j$ ( $1 \leqq j \leqq r$ ) を第 $j$ 列ベクトルとする ( $n$ , $r$ ) 行列を $A$ , $F$ とすると

※ $$A = F\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1r}\\ & c'_{22} & \cdots & c'_{2r}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & \cdots & c'_{rr}\end{pmatrix} = F\,C$$ とおく

P. 69の例3から、${}^t\!FF = ((\boldsymbol{f}_i , \boldsymbol{f}_j)) = (\delta_{ij}) = E^{(r)}$ であるから

$A = FC \rightarrow {}^t\!A = {}^t\!C\,{}^t\!F$

${}^t\!AA = {}^t\!C\,{}^t\!F\,FC = {}^t\!CC = ((\boldsymbol{a}_i , \boldsymbol{a}_j))$

したがって、$det({}^t\!AA) = det({}^t\!CC) = det({}^t\!C)det(C) = (\prod_{i=1}^{r} c'_{ii})^2 \neq 0$

$r = n$ の場合には、${}^t\!FF = F{}^t\!F = E^{(n)}$ すなわち、$F^{-1} = {}^t\!F$ ← 直交行列

$A$ は $W$ の一次独立な底の行列だったので、$r = n$ の場合には、正則行列になる。底のとり方は任意なので、※より、<u>任意の正則行列は正則な直交行列と三角行列の積に分解できる</u>ことがわかる。

## （P. 106　直交補空間）

$\{ x\, ; (x, y) = 0 \;\; for\ all\;\; y \in W \} = W^{\perp}$　←　$W$ の直交補空間

直交補空間は部分空間である。なぜなら

任意の $x, z \in W^{\perp}$ をとったとき、$(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y) = 0 + 0 = 0$ だからである。

$V^n = W + W^{\perp}$

$x = x' + x'',\ y = y' + y'',\ x', x'' \in W,\ y', y'' \in W^{\perp}$

$(x, y) = (x' + x'', y' + y'') = (x', y' + y'') + (x'', y' + y'')$

$= (x', y') + (x', y'') + (x'', y') + (x'', y'')$

$= (x', y') + 0 + 0 + (x'', y'')$

## （P. 108　$W \subset (W^{\perp})^{\perp}$）

なぜなら、任意の $x \in W$ に対し、$x \notin (W^{\perp})^{\perp}$ だとしたら、ある $y \in W^{\perp}$ があって $(x, y) \neq 0$、ところが $y$ はすべての $x \in W$ に対して $(x, y) = 0$ のはずなので矛盾する。したがって、$x \in (W^{\perp})^{\perp}$

## （P. 108　$A \subset B \;\rightarrow\; A^{\perp} \supset B^{\perp}$）

なぜなら、任意の $x \in B^{\perp}$ に対して、どんな $B$ の元を取ってもそれらの内積は 0 なので、$B$ の部分集合である $A$ のどんな元との内積も 0 になる。つまり、$x \in A^{\perp}$ となる。

(11) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$　この左辺は直和とは限らないことに注意！

## （P. 108　像、核、逆像）

（像）$\{ y\, ; y \in V^m, y = Ax \;\; (x \in W) \} = f(W)$ は部分空間である。

ｉ）任意の $y', y'' \in f(W)$ に対し、$y' = Ax', y'' = Ax''$ となる、$x', x'' \in W$ が存在するので、$x' + x'' \in W$ であることから、$y' + y'' = Ax' + Ax'' = A(x' + x'') \in f(W)$

ii）任意の $y' \in f(W)$ に対し、$y' = Ax'$ となる $x' \in W$ が存在するので、$cx' \in W$ であることから、$cy' = cAx' = A(cx') \in f(W)$

（核） $\{ \boldsymbol{x} ; \boldsymbol{x} \in V^n , A\boldsymbol{x} = 0 \} = f^{-1}(0)$ は部分空間である。

ⅰ） 任意の $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in f^{-1}(0)$ に対し、$A(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'') = A(\boldsymbol{x}')+A(\boldsymbol{x}'') = 0$ となる。

よって、$\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'' \in f^{-1}(0)$

ⅱ）明らかである。

（逆像） $V^n$ の部分空間 $W'$ が与えられたとき、$\{ \boldsymbol{x} ; \boldsymbol{x} \in V^m , A\boldsymbol{x} \in W' \} = f^{-1}(W')$ は部分空間である。

ⅰ） 任意の $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in f^{-1}(W')$ に対し、$A(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'') = A(\boldsymbol{x}')+A(\boldsymbol{x}'') \in W'$ なので、$\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'' \in f^{-1}(W')$

ⅱ）明らかである。

（注意）この本の流れでは、まず「一次独立とは何か」からはじめ、次に「部分空間とは」、全体である $V^n$ については触れない。このことは、$V^n$ も部分空間であるとい前提から説明の重複を避けるためだと思う。次に内積が定義されている「$n$ 次元（数）ベクトル空間」において直交補空間を定義し、それを直和に結びつけた。内積が定義されていなければ考えることはできなかった。

## （P. 110 系2）

（略証） $dim\, W = k$ , $dim(f^{-1}(0) \cap W) = k-r$ とし、$f^{-1}(0) \cap W$ の底を $\{ \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_k \}$ とする。定理3から、適当に $\boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ をとり、$\{ \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \cdots, \boldsymbol{u}_k \}$ が $W$ の底になるようにする。そのとき、$f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_r)$ が $f(W)$ の底になることを示せば、$dim\, f(W) = r$ となり (14) が得られる。$f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_r)$ が一次独立であることだけを示す。

$\sum_{i=1}^{r} x_i f(\boldsymbol{u}_i) = 0$ とすれば、$f(\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(\boldsymbol{u}_i) = 0$ よって、$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{u}_i \in f^{-1}(0) \cap W$ したがって

ある $x_i$ $(r+1 \leqq i \leqq k)$ があって、$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{u}_i = \sum_{i=r+1}^{k} x_i \boldsymbol{u}_i$

$\boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ は一次独立なので $x_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq k)$ を得る。

## （P. 105 問1）

$f(W) = f(V^m) \cap W'$ ( $W = f^{-1}(W')$ ) から

$W \subset V^m$ なので、$f(W) \subset f(V^m)$ は明らか。$f(f^{-1}(W')) \subset W'$ ( 任意の $\boldsymbol{y} \in f(f^{-1}(W'))$ に対し、$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ , $\boldsymbol{x} \in f^{-1}(W')$ となる $\boldsymbol{x}$ が存在する。つまり、$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in W'$ ) よって $f(W) \subset W'$ 、したがって、$f(W) \subset f(V^m) \cap W'$

逆に、任意の $y \in f(V^m) \cap W'$ に対し、$y \in f(V^m)$ なので $y = f(x)$ , $x \in V^m$ とかける。かつ、$y \in W'$ であるから $x \in f^{-1}(W') = W$ したがって、$y \in f(W)$ となる。つまり、$y \in f(V^m) \cap f(W) = f(W)$

よって、$f(W) = f(V^m) \cap W'$ となる。

$W = f^{-1}(W') \supset f^{-1}(0)$ から (14) により

$dim\, f(W) = dim\,(W) - dim\,(f^{-1}(0) \cap W)$ なので、

$dim\,(f(V^m) \cap W') = dim\,(f^{-1}(W')) - dim\, f^{-1}(0)$

よって、$dim\,(f^{-1}(W')) = dim\,(f(V^m) \cap W') + dim\, f^{-1}(0)$

## (P. 110 $rank\, f$ は $f$ の像の次元)

$f : V^m \to V^n$ , $rank\, f = dim\, f(V^m) = dim\{\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}\}$

ⅰ) $rank\, f = m$ ならば、定理7より、$dim\, f^{-1}(0) = \{0\}$ よって、系1から $f$ は一対一の写像となる。また、逆も成り立つ。

$f(V^m) \subset V^n \to dim\, f(V^m) \leqq n \to m \leqq n$

ⅱ) $rank\, f = n$ ならば、$f(V^m) \subset V^n$ であり、$dim\ f(V^m) = n$ なので $f(V^m) = V^n$ よって、上への写像となる。

ⅲ) 系1と同じ。

## (P. 111 定理8)

$rank\, AQ \leqq rank\, A$ , $rank\, A = rank\,(AQ)Q^{-1} \leqq rank\, AQ \to rank\, A = rank\, AQ$

## (P. 111 重要)

ⅰ) $W_1 \subset W_2$ , $dim\ W_1 = dim\ W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$

ⅱ) $dim\, f(W) \leqq dim\ W$

ⅲ) 行列 $A$ に対して

1) 一つの列(行)にそれ以外の列(行)の一次結合を加えること、

2) 一つの列(行)を $\neq 0$ なるスカラー倍すること、

3) 列(行)の置換を行うこと、

つまり、基本変形を施しても $rank\, f$ は不変である。

## （P. 111　$rank\ A$ の小行列式による定義について）

$rank\ A$ とは $A$ の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ のうち一次独立なものの最大個数であった。したがって、$rank\ A = r$ ならば、その中から $r$ 個選び出し、定理2を適用すればよい。よって、$A$ に含まれる $\neq 0$ の小行列式の最大次数として定義できる。

## （P. 107　定理9）

$f:\ V^m \to V^n$　つまり、$A$ は $(n, m)$ 行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},\quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \cdots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

${}^tA$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{a}^{(n)}$ ，　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in V^m$ に対し

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(i)}) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n)$

なぜなら

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(i)}) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n)$

よって、$f: \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} \quad (V^m \to V^n)$，　${}^tf: \boldsymbol{y} \to {}^tA\boldsymbol{y} \quad (V^n \to V^m)$ とおけば

$\boldsymbol{x} \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(i)}) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(1)}) = 0, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(2)}) = 0, \cdots, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(n)}) = 0$

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, y_1\boldsymbol{a}^{(1)} + y_2\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + y_n\boldsymbol{a}^{(n)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \in ({}^tf(V^n))^{\perp}$

すなわち、 $f^{-1}(0) = ({}^tf(V^n))^{\perp}$

小行列式による階数の定義は列に対しても行に対しても平等であるから、この定理の結論は当然なのである。

## (P. 112 例 1)

一般に、$(A+B)V^m \subset AV^m+BV^m$ であるが、= とはならない。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ならば、$(A+B)V^m = \{ 0 \}$

また、$(A+B)V^m$ , $AV^m+BV^m$ は部分空間であって、$(A+B)V^m \subset AV^m+BV^m$ かつ $dim\,(A+B)V^m = dim\,(AV^m+BV^m)$ ならば、$(A+B)V^m = AV^m+BV^m$ ( P.101 (1) )

## (P. 113 例 2)

$A^{-1}\{ 0 \} \cap W \subset A^{-1}\{ 0 \}$ でともに部分空間であるので、( P.101 (1) ) から次元が等しければ $A^{-1}\{ 0 \} \cap W = A^{-1}\{ 0 \}$ となる。よって、$A^{-1}\{ 0 \} \subset W$

## (P. 114 連立方程式(一般の場合))

斉次の場合

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots a_{rm}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \quad \to \quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

定理9と同じように、解ベクトル空間 = $f^{-1}(0) = \{\{ a^{(1)} , a^{(2)} , \cdots , a^{(n)} \}\}^{\perp}$

$rank\,A = r$ とし、簡単のため

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ と仮定する。(そうでないときは、適当に行、列の置換を行えばよいと書いてあるが、列の置換の場合は、未知数の順番を変える必要がある。例えば、$x_1$ , $x_3$ , $x_2$ , $\cdots$ のように)

定理2 から $a^{(1)} , a^{(2)} , \cdots , a^{(r)}$ が $\{\{ a^{(1)} , a^{(2)} , \cdots , a^{(n)} \}\}$ の底になる。従って、

(20') $(a^{(i)} , x ) = 0$ $(1 \leqq i \leqq r)$

と同値である。

このことは、残りの ( $n-r$ ) 個の方程式は不要になることを示している。なぜなら、$a^{(j)}$ $(r+1 \leqq j \leqq n)$ は、$a^{(1)} , a^{(2)} , \cdots , a^{(r)}$ の一次結合で表すことができるので、( $a^{(j)} , x$ ) = 0 $(r+1 \leqq j \leqq n)$ だからである。

(20') を変形すれば

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-a_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-a_{1,m}x_m \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-a_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-a_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-a_{r,m}x_m \end{cases}$$

この連立方程式は解けるので

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

を代入(本当は任意でよいことが後でわかる)実数して解けば、$m-r$ 組の解を得ることができる。

例えば、${}^t(1,0,\cdots,0)$ を代入すれば

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1} \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1} \end{cases} \rightarrow \Delta_{i,r+1}=\begin{array}{c} \begin{matrix} & & \overset{i}{\vee} & & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \end{array}$$

(余因子ではない!)

$Cramer$ の公式 (P.66) から解を表せば、$m-r$ 個のベクトルを作ることができる。これらのベクトルを左から順に $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{m-r}$ とおけば、解ベクトル空間の一つの底になる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta_{1,r+1}}{\Delta_r} \\ -\dfrac{\Delta_{2,r+1}}{\Delta_r} \\ \vdots \\ -\dfrac{\Delta_{r,r+1}}{\Delta_r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta_{1,r+2}}{\Delta_r} \\ -\dfrac{\Delta_{2,r+2}}{\Delta_r} \\ \vdots \\ -\dfrac{\Delta_{r,r+2}}{\Delta_r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{m-r}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta_{1,m}}{\Delta_r} \\ -\dfrac{\Delta_{2,m}}{\Delta_r} \\ \vdots \\ -\dfrac{\Delta_{r,m}}{\Delta_r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

実際、これらのベクトルが一次独立であることは明らかであり、解空間の次元は定理7 の (13) から $dim(f^{-1}(0))=m-r$ 次元なので底となる。

具体的に、$c\boldsymbol{x}_i\ (1\leqq i\leqq(m-r))$ は解である。

例えば、$c\boldsymbol{x}_1$ ならば、

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta_{1,r+1}}{\Delta_r} \\ -\dfrac{\Delta_{2,r+1}}{\Delta_r} \\ \vdots \\ -\dfrac{\Delta_{r,r+1}}{\Delta_r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は } \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}\boldsymbol{c} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}\boldsymbol{c} \end{cases} \text{ の解になっている。}$$

つまり、解ベクトルは一般に $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_{m-r}\boldsymbol{x}_{m-r}$ で得ることができる。つまり、$x_{r+1}$ , $x_{r+2}$ , $\cdots$ , $x_{m-r}$ は任意の実数であれば問題なかったことになり、言いかえれば、変数として $x_{r+1}\boldsymbol{x}_1+x_{r+2}\boldsymbol{x}_2+\cdots+x_{m-r}\boldsymbol{x}_{m-r}$ で一般解を表すことができたことになる。

ここで、他の行について、例えば

$(\boldsymbol{a}^{(r+1)}, \boldsymbol{x}_i) = a_{r+1,1}x_1+a_{r+1,2}x_2+\cdots+a_{r+1,r}x_r+a_{r+1,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{r+1,m}x_m$

であるが、$\boldsymbol{a}^{(r+1)}$ は $\boldsymbol{a}^{(1)}$ , $\boldsymbol{a}^{(2)}$ , $\cdots$ , $\boldsymbol{a}^{(r)}$ の一次結合で表すことができるので $\boldsymbol{a}^{(r+1)}= k_1\boldsymbol{a}^{(1)}+k_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+k_r\boldsymbol{a}^{(r)}$ とおけば、上の式を内積で表現して

$(\boldsymbol{a}^{(r+1)}, \boldsymbol{x}_i) = (k_1\boldsymbol{a}^{(1)}+k_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+k_r\boldsymbol{a}^{(r)}, \boldsymbol{x}_i) = 0 \quad (1 \leqq \boldsymbol{i} \leqq (\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r}))$

なので、解になっていることがわかる。

## （P. 117　問1（ⅱ））

（ⅱ） $\begin{pmatrix} 2x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ -x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ -x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。まず、$\boldsymbol{A}$ の階数を求める。基本変形を施しても階数は変わらないので

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & \frac{6}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、$rank\ A = 2$ 定理10とその系から、解空間の次元は 2 で、2 < 4 なので自明ではない解が存在することがわかる。

$\boldsymbol{a}^{(1)} = (2\ \ -1\ \ -1\ \ 2)$ , $\boldsymbol{a}^{(2)} = (-1\ \ 2\ \ -1\ \ -1)$ の $(2\ \ -1)$ と $(-1\ \ 2)$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \to \ ① \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \ と\ ② \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

これら2つの連立方程式を解けばよいことになる。

①の解は $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ 、②の解は $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ よって、基本解は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。確認のため

$-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ に代入してみると、成り立つことがわかる。

解空間は $x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

## 一般の場合

$$\boldsymbol{Bx} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

としておいて、仮に $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ とすれば、斉次の場合と同様にして解くことができる。仮と書いたのは行の置換に関しては問題ないが、列の置換に関しては未知数 $x_i$ , $-1$ の順番を変える必要はある。

「$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}$ は (18) の解ベクトル全体を動く。」とあるが、仮に他の (18) の解 $\boldsymbol{x}_1$ で $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}$ と表現できる (18*) の解 $\boldsymbol{x}$ が存在しなかったする。しかし、$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1$ は (18*) の解なので、そのようなことはありえない。

（P. 118　問2（ⅱ））

（ⅱ）$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ として、それぞれの階数を求める。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{rank\ A} = 2$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{rank\ B} = 2$$

$\boldsymbol{rank\ A} = 2 = \boldsymbol{rank\ B}$ なので、解が存在する。

次に特殊解を求める。$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ なので

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ として、本書（佐武）では解いている。

基本解を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、一般解は $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

## （P. 118　注意 1）

「係数を含む体のとり方に関係しない」と書いてあるが、それは、実係数の連立方程式の場合である。でなければ、$\boldsymbol{x}_0$ , $\boldsymbol{x}_1$ , $\cdots$ , $\boldsymbol{x}_{m-r}$ を実ベクトルとすることができない。「…を含む…」が気になる。

## （P. 124　例5）

$f$ , $g$ は連続関数なので $[\,a\,,\,b\,]$ 上で可積分である。

$(\,f\,,\,g\,) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ が内積の定義をみたしているか調べる。

(3.1) $(\,f_1+f_2\,,\,g\,) = \int_a^b (\,f_1+f_2)gdx = \int_a^b f_1 gdx + \int_a^b f_2 gdx$

$= (\,f_1\,,\,g\,)+(\,f_2\,,\,g\,)$

(3.2) $(\,cf\,,\,g\,) = \int_a^b cfgdx = c\int_a^b fgdx = c\,(\,f\,,\,g\,)$

(3.3) $(\,f\,,\,g\,) = \int_a^b fgdx = \int_a^b gfdx = (\,g\,,\,f\,)$

(3.4) $(\,f\,,\,f\,) = \int_a^b f^2 dx$ 、$f^2 \geqq 0$ なので、解析入門ＩのP. 209定理2. 2(積分の単調性)

により $(\,f\,,\,f\,) = \int_a^b f^2 dx \geqq 0$

また、$(\,f\,,\,f\,) = \int_a^b f^2 dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $(\Leftarrow)$ は明らかなので省略する。

もし、ある $\lambda \in (\,a\,,\,b\,)$ で $f(\lambda) = p \neq 0$ であるとする。$f$ は連続関数なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、$|\,x-\lambda\,| < \delta$ ならば $|\,f(x)-f(\lambda)\,| < \varepsilon$ とすることができる。ここで、仮に $f(\lambda) = p > 0$ とすれば ( $f(\lambda) = p < 0$ の場合も同様に証明可能)

$f(\lambda)-\varepsilon < f(x) < f(\lambda)+\varepsilon$

$\varepsilon$ は任意なのでいくらでも小さくできる。よって $0 < f(\lambda)-\varepsilon < f(x)$ とすることができる。したがって、$\delta$ を十分に小さくとれば、$\lambda$ を含む十分に小さな区間において $f(x) > 0$ つまり $f^2(x) > 0$ となる。このことは

$(\,f\,,\,f\,) = \int_a^b f^2 dx = 0$ に反する。(積分の強単調性)

$\lambda = a$ , $b$ の場合は、例えば、$\lambda = a$ の場合は $|\,x-a\,| = x-a < \delta$ とすれば同様に矛盾を示

すことができる。

次に、「$\sum a_i^2$ , $\sum b_i^2$ が収束すれば $\sum a_i b_i$ も収束する。」であるが、それにはコーシー列であることを示せばよい。（解析入門　P. 44定理5. 1）

仮定から、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $n_0 \in N$ が存在し、$n$ , $m > n_0$ ならば

$| a_m^2 + a_{m+1}^2 + \cdots + a_n^2 | < \sqrt{\varepsilon}$

$| b_m^2 + b_{m+1}^2 + \cdots + b_n^2 | < \sqrt{\varepsilon}$

よって

$$| a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_n b_n |^2 \leqq | a_m^2 + a_{m+1}^2 + \cdots + a_n^2 | \times | b_m^2 + b_{m+1}^2 + \cdots + b_n^2 | < \varepsilon$$

$$\therefore | a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_n b_n | < \varepsilon$$

$f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$ , $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ （$n = 1, 2, \cdots$）が $[0, 2\pi]$ で上の内積により正規直交系であることを証明する。

$$( f_0 , f_0 ) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx = \left[ \frac{1}{2\pi} x \right]_0^{2\pi} = 1$$

$$( a_n , a_n ) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx$$

$$\boxed{\text{（注）} \cos 2nx = \cos^2 nx - \sin^2 nx = 2\cos^2 nx - 1 = 1 - 2\sin^2 nx}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{ ( 2\pi + 0 ) - ( 0 + 0 ) \} = 1$$

$$( b_n , b_n ) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 nx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \{ ( 2\pi - 0 ) - ( 0 - 0 ) \} = 1$$

$$( f_0 , a_n ) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(f_0, b_n) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(a_n, a_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx$$

| |
|---|
| （注） $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$ |

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \cos(n+m)x + \cos(n-m)x \} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x + \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(b_n, b_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \cos(n-m)x - \cos(n+m)x \} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(a_n, b_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx$$

| |
|---|
| （注） $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ |

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \sin(m+n)x + \sin(m-n)x \} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{m+n} \cos(m+n)x - \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} - \left( -\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} \right) \right\} = 0$$

## （P. 124　注意）

$det\left(\int_a^b f_i(x)f_j(x)dx\right)$

$$
= \begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)f_1(x)dx & \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx & \cdots & \int_a^b f_1(x)f_{\mathrm{n}}(x)dx \\ \int_a^b f_2(x)f_1(x)dx & \int_a^b f_2(x)f_2(x)dx & \cdots & \int_a^b f_2(x)f_{\mathrm{n}}(x)dx \\ & & \cdots & \\ \int_a^b f_n(x)f_1(x)dx & \int_a^b f_n(x)f_2(x)dx & \cdots & \int_a^b f_n(x)f_{\mathrm{n}}(x)dx \end{vmatrix}
$$

$n=2$ の場合だけだが

$$
A = \begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)^2dx & \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \\ \int_a^b f_2(x)f_1(x)dx & \int_a^b f_2(x)^2dx \end{vmatrix}
$$

$$
\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{vmatrix}^2 dx_1dx_2
$$

$$
= \int_a^b\int_a^b \{ ( f_1(x_1)f_2(x_2) - f_1(x_2)f_2(x_1) )^2 \} dx_1dx_2
$$

$$
= \int_a^b\int_a^b \{ f_1(x_1)^2f_2(x_2)^2 - 2f_1(x_1)f_2(x_2)f_1(x_2)f_2(x_1) + f_1(x_2)^2f_2(x_1)^2 \} dx_1dx_2
$$

$$
= \int_a^b\int_a^b f_1(x_1)^2f_2(x_2)^2dx_1dx_2 - 2\int_a^b\int_a^b f_1(x_1)f_2(x_2)f_1(x_2)f_2(x_1)dx_1dx_2 + \int_a^b\int_a^b f_1(x_2)^2f_2(x_1)^2 dx_1dx_2
$$

$$
= \int_a^b \{f_2(x_2)^2dx_2\int_a^b f_1(x_1)^2dx_1 - 2\int_a^b f_2(x_2)f_1(x_2)dx_2\int_a^b f_1(x_1)f_2(x_1)dx_1 + \int_a^b f_1(x_2)^2dx_2\int_a^b f_2(x_1)^2dx_1
$$

$$
= \int_a^b f_1(x_1)^2dx_1\int_a^b f_2(x_2)^2dx_2 - 2\int_a^b f_1(x_1)f_2(x_1)dx_1\int_a^b f_2(x_2)f_1(x_2)dx_2 + \int_a^b f_2(x_1)^2dx_1\int_a^b f_1(x_2)^2dx_2
$$

$$
= \int_a^b f_1(x)^2dx\int_a^b f_2(x)^2dx - 2\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\int_a^b f_2(x)f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)^2dx\int_a^b f_1(x)^2dx
$$

$$
= 2\int_a^b f_1(x)^2dx\int_a^b f_2(x)^2dx - 2\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\int_a^b f_2(x)f_1(x)dx
$$

$= 2!A$

## （P. 124　底の変換）

$V$ を任意の $n$ 次元ベクトル空間(≠数ベクトル空間)、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を底とする。そのとき、

任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \quad \text{または記号的に} \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

なぜ記号的かといえば、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ はいつも列ベクトルとは限らないからで、

行列空間の $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots$ の底や関数空間の $1, \cos nx, \sin nx, \cdots$ などのように一般のベクトル空間では底を数ベクトルに表すことができないことの方が多いからである。

そして、$V$ がさらに計量ベクトル空間である場合、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ として正規直交系をとるならば、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ となる。

なぜなら

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n$$

とした場合

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n,\ y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n)$$

$$= (x_1\boldsymbol{a}_1,\ y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n) + (x_2\boldsymbol{a}_2,\ y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n) + \cdots + (x_n\boldsymbol{a}_n,\ y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n)$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さて、$V$ の一次変換 $f$ を考えてみる。$V$ の底が与えられていれば、$f$ には $n$ 次の行列が対応する。すなわち、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}_1) &= a_{11}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{a}_n \\ f(\boldsymbol{a}_2) &= a_{12}\boldsymbol{a}_1 + a_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{a}_n \qquad \leftarrow f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{a}_i \quad (1 \leqq j \leqq n) \\ &\cdots \ \downarrow \\ f(\boldsymbol{a}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{a}_1 + a_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

向きを間違えないように！

(24) $$(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ と記号的に書いてしまうと、$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ のとき

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}\left((\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n) = x_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_1) + x_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + x_n\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_n)$$

$$= (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_1), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_2), \cdots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

つまり、底を定めることにより、$\boldsymbol{f}$ に行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ を対応させることができる。

$V$ に別の底 $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n$ をとったとき、$V$ のベクトルや一次変換に対応する数ベクトルや $\boldsymbol{f}$ の表現行列はどのようになるだろうか

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}'_1 &= \boxed{p_{11}}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}'_2 &= \boxed{p_{12}}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{a}_n \\ \cdots & \quad\ \downarrow \\ \boldsymbol{a}'_n &= \boxed{p_{1n}}\boldsymbol{a}_1 + p_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n \end{aligned} \qquad \leftarrow \boldsymbol{a}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{a}_i \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

記号的に

$$(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad \cdots \text{※}$$

とすれば

$\boldsymbol{x}$ を $(\boldsymbol{a}'_i)$ を底にしたとき　$\boldsymbol{x} \ \rightarrow\ \boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{a}'_1 + x'_2\boldsymbol{a}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{a}'_n$ とするとき

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$= ( \boldsymbol{a}_1 , \boldsymbol{a}_2 , \cdots , \boldsymbol{a}_n ) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

つまり

(27) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

この $P$ を底の変換行列という。(※ から ( $\boldsymbol{a}_i$ ) → ( $\boldsymbol{a}'_i$ ) への底の変換行列というのであろう。)
さらに底を変換し、( $\boldsymbol{a}'_i$ ) → ( $\boldsymbol{a}''_i$ ) の行列を $Q$ とすれば

( $\boldsymbol{a}'_1 , \boldsymbol{a}'_2 , \cdots , \boldsymbol{a}'_n$ ) = ( $\boldsymbol{a}''_1 , \boldsymbol{a}''_2 , \cdots , \boldsymbol{a}''_n$ ) $Q$ = ( $\boldsymbol{a}_1 , \boldsymbol{a}_2 , \cdots , \boldsymbol{a}_n$ ) $PQ$

よって、( $\boldsymbol{a}_i$ ) → ( $\boldsymbol{a}''_i$ ) の底の変換行列は $PQ$ となる。

特に、$\boldsymbol{a}''_i = \boldsymbol{a}_i$ ならば、$PQ = E$ となり、$P$ は正則であって、$Q = P^{-1}$ よって、(27) は

(27') $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(例) 3次元の回転行列 $R_x(\theta)$ ( $x$ 座標をそのままに、$y$ 軸を $z$ 軸方向に回転させる。)

$V^3$ の底として ( $\boldsymbol{e}_1 , \boldsymbol{e}_2 , \boldsymbol{e}_3$ )、( $\boldsymbol{e}'_1 , \boldsymbol{e}'_2 , \boldsymbol{e}'_3$ ) = ( $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ) とする。

$\boldsymbol{e}'_1 = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{e}'_2 = 0\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{e}'_3 = 0\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_3$

$( \boldsymbol{e}'_1 , \boldsymbol{e}'_2 , \boldsymbol{e}'_3 ) = ( \boldsymbol{e}_1 , \boldsymbol{e}_2 , \boldsymbol{e}_3 ) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \underset{(\boldsymbol{e}'_i)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ とするとき

$\boldsymbol{x} = ( \boldsymbol{e}_1 , \boldsymbol{e}_2 , \boldsymbol{e}_3 ) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ( \boldsymbol{e}'_1 , \boldsymbol{e}'_2 , \boldsymbol{e}'_3 ) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

$$= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ 0 & \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次に $V$ の一次変換 $f$ に対し、 $f \underset{(\boldsymbol{a}'_i)}{\longrightarrow} A' = (a'_{ij})$ とすれば

$$f(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)A' = f((\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)P)$$

(24)　(書き直しただけ)

$$= f((p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{a}_n), (p_{12}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{a}_n), \cdots, (p_{1n}\boldsymbol{a}_1 + p_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n))$$

$$= \left(f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}\right) = f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)AP = (\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)P^{-1}AP$$

よって

$A' = P^{-1}AP$　,　$y' = f(x')$ のとき $\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ となる。

## （P. 127　問1）

$P^{-1}AP = A'$ , $P^{-1}BP = B'$ のとき

ｉ）$P^{-1}(A+B)P = P^{-1}AP+P^{-1}BP = A'+B'$

ⅱ）$P^{-1}(AB)P = P^{-1}APP^{-1}BP = A'B'$

ⅲ）$A$ が正則ならば

ⅱ）より、$P^{-1}(AA^{-1})P = A'(A^{-1})' = E$ → $(A')^{-1} = (A^{-1})'$　よって

$P^{-1}A^{-1}P = (A^{-1})' = (A')^{-1}$

## （P. 127　問2）

$m$ 次元ベクトル空間 $V$ から $n$ 次元ベクトル空間 $V'$ への一次写像 $f$ が与えられたとする。$V$ , $V'$ の底 $(a_i)$ , $(b_i)$ に関して、$f \to A$ , また、$V$ , $V'$ の底をそれぞれ

$(a'_i) = (a_i)P$ , $(b'_i) = (b_i)Q$ に変換したとき、$f \to A'$ であるとすれば $A' = Q^{-1}AP$ となる。また、$rank\, A = r$ のとき、$P$ , $Q$ を適当にとれば

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A\,;(n\,,m)\text{行列}$$

とすることができる。（$P$ , $Q$ は $m$ , $n$ 次正則な行列）

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underset{}{\overset{(a_i)}{R^n}} \arrow[r, "g'\circ f\circ g^{-1}", "A"'] & \overset{(b_i)}{R^n} \\
V \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V' \arrow[u, "g'"'] \arrow[d, "h'"] \\
\underset{(a'_i)}{R^n} \arrow[r, "h'\circ f\circ h^{-1}", "A'"'] & \underset{(b'_i)}{R^m}
\end{tikzcd}$$

$g$ , $h$ , $g'$ , $h'$ は底を決めるとによる写像

（前半の別証）

$V$ の基底の取り替え行列 $P$ 、$V'$ の基底の取り替え行列 $Q$ を写像と解釈すれば、

$T_P = g\circ h^{-1}$ ， $T_Q = g'\circ h'^{-1}$

となる。

$T_{A'} = h'\circ f\circ h^{-1} = h'\circ g'^{-1}\circ g'\circ f\circ g^{-1}\circ g\circ h^{-1}$

$= (h'\circ g'^{-1})\circ(g'\circ f\circ g^{-1})\circ(g\circ h^{-1})$

$= T_{Q^{-1}}\circ T_A\circ T_p = T_{Q^{-1}AP}$　（線型代数入門　齋藤正彦 著　P.115）

（証明）

$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (f(a_1), \cdots, f(a_m)) = (b_1, \cdots, b_n)A$　であり

$f(a'_1, \cdots, a'_m) = (b'_1, \cdots, b'_n)A'$

また一方では

$f(a'_1, \cdots, a'_m) = f((a_1, \cdots, a_m)P) = (f(a_1), \cdots, f(a_m))P$

$= (b_1, \cdots, b_n)AP = (b'_1, \cdots, b'_n)\,Q^{-1}AP$

よって、$(\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_n)A' = (\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_n)Q^{-1}AP \ \rightarrow\ A' = Q^{-1}AP$

$rank\,A = r$ なので、定理7より、$dim\,f^{-1}(0) = m-r$ であるから定理3から $V$ の底として

$\{\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_r, \boldsymbol{a}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}'_m\}$ の $\{\boldsymbol{a}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}'_m\}$ が $f^{-1}(0)$ の底になるようにとることができる。定理7を参考にして、

$f(V) = \{\{f(\boldsymbol{a}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}'_r)\}\}$, $dim\,f(V) = r$ なので、$f(\boldsymbol{a}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}'_r)$ が一次独立であることを示せばよい。今、

$$\sum_{i=1}^{r} x_i f(\boldsymbol{a}'_i) = 0$$

とすれば、$f(\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{a}'_i) = 0$ よって、$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{a}'_i \in f^{-1}(0)$、したがって、ある $x_i$ $(r+1 \leqq i \leqq m)$

があって

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{a}'_i = \sum_{i=r+1}^{m} x_i \boldsymbol{a}'_i \ \rightarrow\ \sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{a}'_i - \sum_{i=r+1}^{m} x_i \boldsymbol{a}'_i = 0$$

$\boldsymbol{a}'_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ は一次独立であるから、$x_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ を得る。

つまり、$f(\boldsymbol{a}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}'_r)$ は一次独立である。

よって、$V'$ の底 $\{\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_r\}$ を $\boldsymbol{b}'_i = f(\boldsymbol{a}'_i)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ となるようにとることができる。そのとき

$$(f(\boldsymbol{a}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}'_m)) = (f(\boldsymbol{a}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}'_r), 0, \cdots, 0)$$

$$= (\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_n)\begin{pmatrix} 1 & \overset{r}{\ddots} & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_n)A'$$

よって、$A' = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}AP$

$n$ 次元計量ベクトル空間 $V$ において、内積を変えない一次変換 $f$ について考える。
(任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して、$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$)

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を $V$ の正規直交底とする。

$$f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= ( f ( e_1 ) , f ( e_2 ) , \cdots , f ( e_n ))$

仮定より、$( f (e_i) , f (e_j) ) = ( e_i , e_j ) = \delta_{ij}$ なので、$f ( e_1 ) , f ( e_2 ) , \cdots , f ( e_n )$ も正規直交底である。また

$( f (e_i) , f (e_j) ) = ( \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_i , \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_i )$

$= ( a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n , a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n )$

$= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij}$

$A = ( a_{ij} )$ の列ベクトルは数ベクトルとして正規直交系をなす。

## （P. 129 問4）

$A_1 , A_2$ が直交行列ならば、${}^tA_1A_1 = E , {}^tA_2A_2 = E$ なので

ｉ）${}^t(A_1A_2)A_1A_2 = {}^tA_2{}^tA_1A_1A_2 = {}^tA_2EA_2 = E$

ⅱ）${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = E$

## （P. 129 注意）

また、直交行列ならば、$( Ax , Ay ) = {}^t(Ax)Ay = {}^tx{}^tAAy = {}^txy = ( x , y )$

また、$f$ がベクトルの長さを変えなければ

$\| f (x) + f (y) \|^2 = ( f (x) + f (y) , f (x) + f (y) )$

$= \| f (x) \|^2 + 2( f (x) , f (y) ) + \| f (y) \|^2$

$( f (x) , f (y) ) = \frac{1}{2}( \| f (x) + f (y) \|^2 - \| f (x) \|^2 - \| f (y) \|^2 )$

$= \frac{1}{2}( \| f ( x + y ) \| - \| f (x) \|^2 - \| f (y) \|^2 )$

$= \frac{1}{2}( \| x + y \| - \| x \|^2 - \| y \|^2 ) = ( x , y )$

したがって、内積も変えない。

## （P. 129 底の変換行列について）

$$( e'_1 , e'_2 , \cdots , e'_n ) = ( e_1 , e_2 , \cdots , e_n ) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

よって、$( e'_i , e'_j ) = ( e_i , e_j ) = \delta_{ij}$ あとは P.128 の下の証明と同じで、$P$ は直交行列になる。

## （P. 130　例2）

置換の行列 $A_\sigma = (\sigma_{i,\sigma(j)})$ は直交行列

$A_\sigma$ の任意の2つの列ベクトルを選べば、それらの内積は

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,\sigma(k)} \\ \sigma_{2,\sigma(k)} \\ \vdots \\ \sigma_{n,\sigma(k)} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \sigma_{1,\sigma(\ell)} \\ \sigma_{2,\sigma(\ell)} \\ \vdots \\ \sigma_{n,\sigma(\ell)} \end{pmatrix}$$

$\sigma$ は全単射なので、$k \neq \ell$ ならば $\sigma(k) \neq \sigma(\ell)$ なので

$$\sigma_{1,\sigma(k)}\sigma_{1,\sigma(\ell)} + \sigma_{2,\sigma(k)}\sigma_{2,\sigma(\ell)} + \cdots + \sigma_{n,\sigma(k)}\sigma_{n,\sigma(\ell)} = \delta_{k\ell}$$

## （P. 130　複素数を係数とする計量ベクトル空間）

内積とは、$V \times V$ から $K$ への写像であって、次の4つの法則が成立する。($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in K$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積という。)

(3.1) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$

(3.2) $(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(3.3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

(3.4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ かつ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$

(3.3) から、$(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = \overline{(c\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \overline{c}\,\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \overline{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

( $V$ が $R^n$ の場合 )

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ は上の4つの法則を満たす。(3.3) については実数なので $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

( $V$ が $C^n$ の場合 )

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_u = (\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}$　上の2つは明らかに満たす。(3.3) については

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_u = (\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{b}}) = (\overline{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a})$

$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})_u = (\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a}}) \rightarrow \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})_u} = \overline{(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a}})} = (\overline{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a})$

よって、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_u = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})_u}$ となる。

例えば正規直交系については

$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ ,　$(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \delta_{ij}$

$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{f}_m$ ,　$\boldsymbol{y} = d_1\boldsymbol{f}_1 + d_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + d_m\boldsymbol{f}_m$　　　$(c_i, d_i \in C)$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{f}_m, d_1\boldsymbol{f}_1 + d_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + d_m\boldsymbol{f}_m)$

$= (c_1 f_1, d_1 f_1) + (c_2 f_2, d_2 f_2) + \cdots + (c_m f_m, d_m f_m)$

$= c_1 (f_1, d_1 f_1) + c_2 (f_2, d_2 f_2) + \cdots + c_m (f_m, d_m f_m)$

$= c_1 \overline{d_1} (f_1, f_1) + c_2 \overline{d_2} (f_2, f_2) + \cdots + c_m \overline{d_m} (f_m, f_m)$

$= c_1 \overline{d_1} + c_2 \overline{d_2} + \cdots + c_m \overline{d_m}$

ここで、P. 124 例5の内積 $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ を再び考えてみる。

そのような連続関数の空間において、底は $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 無限にあると思われるが、そのようなベクトル空間において、任意の $f, g$ を

$f = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots$ , $g = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots$ とすれば

$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = \int_a^b (x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots)(\overline{y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots}) dx$

$= \int_a^b (x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots)(\overline{y_1 a_1} + \overline{y_2 a_2} + \cdots) dx$

$= \int_a^b (x_1 a_1 \overline{y_1 a_1} + x_1 a_1 \overline{y_2 a_2} + \cdots + x_2 a_2 \overline{y_1 a_1} + x_2 a_2 \overline{y_2 a_2} + \cdots + x_3 a_3 \overline{y_1 a_1} + x_3 a_3 \overline{y_2 a_2} + \cdots$

$+ x_4 a_4 \overline{y_1 a_1} + x_4 a_4 \overline{y_2 a_2} + \cdots) dx$

底が正規直交基底ならば

$= \int_a^b x_1 a_1 \overline{y_1 a_1} dx + \int_a^b x_2 a_2 \overline{y_2 a_2} dx + \int_a^b x_3 a_3 \overline{y_3 a_3} dx + \cdots$

$= x_1 \overline{y_1} \int_a^b a_1 \overline{a_1} dx + x_2 \overline{y_2} \int_a^b a_2 \overline{a_2} dx + x_3 \overline{y_3} \int_a^b a_3 \overline{a_3} dx + \cdots$

$= x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3} + \cdots$

（参考）

$K$ 上の線型空間 $M_{2,2}(K) \leftarrow K$ 上の（2，2）型行列の集合

任意の元を $A$ とすれば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は一次独立であり、$M_{2,2}(K)$ の底となる。ゆえに、$dim\, M_{2,2}(K) = 4$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} ; x , y \in K \right\}$ は $M_{2,2}(K)$ の部分空間になっている。なぜなら

$W$ の元 $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ , $A_1 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ （$x_i , y_i \in K$） に対して

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in W \qquad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \in K \\ y_1 + y_2 \in K \end{pmatrix}$$

$$\lambda A_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1 \\ -(\lambda y_1) & \lambda x_1 \end{pmatrix} \in W \qquad \begin{pmatrix} \lambda x_1 \in K \\ \lambda y_1 \in k \end{pmatrix}$$

ゆえに、$W$ は $M_{2,2}(K)$ の部分空間である。

次に、$W$ の任意の元 $A$ は

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と表され、$A = 0$ は $x = y = 0$ のときに限るので

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ は底となる。$dim\ W = 2$

$M_{n,n}(K)$ に内積を定義する。

$M_{n,n}(K)$ の2つの元 $A , B$ に対し（$A , B$）$= tr(A\,{}^t\overline{B})$ と定める。

i）（$A , B_1 + B_2$）$= tr(A\,{}^t(\overline{B_1 + B_2})) = tr(A({}^t\overline{B_1} + {}^t\overline{B_2})) = tr(A\,{}^t\overline{B_1} + A\,{}^t\overline{B_2})$

$= tr(A\,{}^t\overline{B_1}) + tr(A\,{}^t\overline{B_2})$ =（$A , B_1$）+（$A , B_2$）

ii）（$\lambda A , B$）$= tr(\lambda A\,{}^t\overline{B}) = \lambda\, tr(A\,{}^t\overline{B}) = \lambda$（$A , B$）

（$A , \lambda B$）$= tr(A\,{}^t\overline{\lambda B}) = tr(A\,\overline{\lambda}\,{}^t\overline{B}) = \overline{\lambda}\, tr(A\,{}^t\overline{B}) = \overline{\lambda}$（$A , B$）

iii）$\overline{(B , A)} = \overline{tr(B\,{}^t\overline{A})} = tr(\overline{B\,{}^t\overline{A}}) = tr(\overline{B}\,{}^tA) = tr\,{}^t(A\,{}^t\overline{B}) = tr(A\,{}^t\overline{B}) = (A , B)$

iv） $A$ の第 $i$ 行を（$a_{i1} , \cdots , a_{in}$）とすると ${}^t\overline{A}$ の第 $i$ 列は（$\overline{a_{i1}} , \cdots , \overline{a_{in}}$）となる。

$A\,{}^t\overline{A}$ の（$i , i$）成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$ したがって、（$A , A$）$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geqq 0$

また、（$A , A$）$= 0$ はすべての $|a_{ij}|^2 = 0$ なので、$A = 0$ 。逆は明らかである。

$M_{2,2}(R)$ の行列 の正規直交底

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が一次独立であることは容易にわかる。ここで、内積が定義できたので、これらの底が正規直交底になっているか調べる。

（$E_{11} , E_{11}$）$= tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$

$(\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{12}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = 1$

$(\boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{21}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = 1$

$(\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{22}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = 1$

したがって、長さは 1 となった。

$(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = 0$

$(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = 0$

$(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = 0$

$(\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = 0$

$(\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = 0$

$(\boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = 0$

これですべて直交することがわかった。つまり、正規直交底である。

対称行列全体のつくる空間

$\boldsymbol{W} = \left\{\begin{pmatrix}x & z\\z & y\end{pmatrix} ; x, y, z \in \boldsymbol{R}\right\}$

$\boldsymbol{W}$ の元 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix}x_1 & z_1\\z_1 & y_1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix}x_2 & z_2\\z_2 & y_2\end{pmatrix}$ （$x_i, y_i, z_i \in \boldsymbol{K}$） に対して

$\lambda \boldsymbol{A}_1 + \mu \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix}\lambda x_1 & \lambda z_1\\ \lambda z_1 & \lambda y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu x_2 & \mu z_2\\ \mu z_2 & \mu y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1 + \mu x_2 & \lambda z_1 + \mu z_2\\ \lambda z_1 + \mu z_2 & \lambda y_1 + \mu y_2\end{pmatrix} \in \boldsymbol{W}$

したがって、$\boldsymbol{W}$ は部分空間である。

$\begin{pmatrix}x & z\\z & y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ なので、$\boldsymbol{W} = \{\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\}\}$

となりそうである。

$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ から、$\alpha = \beta = \gamma = 0$ となることから一次独立である。

$(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}) = tr(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) = 2$

$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ だけ長さは 1 ではない。直交かについては次の2組についてだけ調べればよい。

$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

よって、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{11}$ , $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{22}$ , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21}$ は直交底である。

$\boldsymbol{W}^{\perp}$（$\boldsymbol{W}$ の直交補空間）

$\boldsymbol{W}^{\perp}$ の元を $\boldsymbol{X} = x_1\boldsymbol{E}_{11} + x_2\boldsymbol{E}_{12} + x_3\boldsymbol{E}_{21} + x_4\boldsymbol{E}_{22}$ ( $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ ) とすると、$\boldsymbol{W}$ の底と直交するはずなので、$\boldsymbol{E}_{11}$ , $\boldsymbol{E}_{22}$ , $\boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21}$ との内積を調べる。

$( \boldsymbol{X} , \boldsymbol{E}_{11} ) = x_1 \ \to \ 0$ にするためには $x_1 = 0$ となる必要がある。

$( \boldsymbol{X} , \boldsymbol{E}_{22} ) = x_4 \ \to \ 0$ にするためには $x_4 = 0$ となる必要がある。

$( \boldsymbol{X} , \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21} ) = ( \boldsymbol{X} , \boldsymbol{E}_{12} ) + ( \boldsymbol{X} , \boldsymbol{E}_{21} ) = x_2 + x_3 = 0 \ \to x_2 = -x_3$ とする必要がある。すなわち、$\boldsymbol{X} = x_2\boldsymbol{E}_{12} - x_2\boldsymbol{E}_{21} = x_2(\boldsymbol{E}_{12} - \boldsymbol{E}_{21})$ したがって、$\boldsymbol{W}^{\perp}$ の底は $\boldsymbol{E}_{12} - \boldsymbol{E}_{21}$ とすればよい。

（P. 130 ユニタリー行列）

複素数を係数とする計量ベクトル空間において、内積を変えない一次変換 $f$ の正規直交系に関する行列表示を $A$ とすれば、${}^t\overline{A}A = E$ ( $A^* = {}^t\overline{A}$ とし、$A^*A = E$ でもよい )となる。このような複素正方行列をユニタリー行列という。

$n$ 次正方行列 $A$ に関する次の四条件は同値である。（線型代数入門 齋藤）

イ） $A$ はユニタリー行列である。

ロ） 任意の $n$ 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$\| A\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$

ハ） 任意の $n$ 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{y}$ に対して、$( A\boldsymbol{x} , A\boldsymbol{y} ) = ( \boldsymbol{x} , \boldsymbol{y} )$

ニ） $A$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$ , $\boldsymbol{a}_2$ , $\cdots$ , $\boldsymbol{a}_n$ とするとき、$( \boldsymbol{a}_i , \boldsymbol{a}_j ) = \delta_{ij}$

（証明）イ）⇒ロ）、ロ）⇒ハ）、ハ）⇒イ）、イ）⇔ニ） の順で証明する。

イ）⇒ロ）

$\| A\boldsymbol{x} \|^2 = ( A\boldsymbol{x} , A\boldsymbol{x} ) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^t\overline{A}A\,\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = ( \boldsymbol{x} , \boldsymbol{x} ) = \| \boldsymbol{x} \|^2$

$\| A\boldsymbol{x} \| , \| \boldsymbol{x} \| \geqq 0$ なので $\| A\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$

ロ）⇒ハ）

$\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \|^2 = ( \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} , \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} ) = \| \boldsymbol{x} \|^2 + ( \boldsymbol{x} , \boldsymbol{y} ) + \overline{( \boldsymbol{x} , \boldsymbol{y} )} + \| \boldsymbol{y} \|^2$

$\| A( \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} ) \|^2 = ( A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} , A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} ) = \| A\boldsymbol{x} \|^2 + ( A\boldsymbol{x} , A\boldsymbol{y} ) + \overline{( A\boldsymbol{x} , A\boldsymbol{y} )} + \| A\boldsymbol{y} \|^2$

ロ)の仮定から

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})+\overline{(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})}$

両辺は実部の2倍になっているので、実部が等しいことがわかる。

また、$\boldsymbol{x}$ に $i\boldsymbol{x}$ を代入すると

$(i\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(i\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=(Ai\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})+\overline{(Ai\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})}$

$i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\bar{i}\,\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=i(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})+\bar{i}\,\overline{(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})}$

$i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-i\,\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=i(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})-i\,\overline{(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})}$

$i\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\}=i\{(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})-\overline{(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})}\}$

こんどは、両辺が虚部の2倍になっているので、虚部が等しいことがわかった。

よって、$(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

ハ)⇒イ)

任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し

$(\boldsymbol{x},(({}^t\overline{A}A-E)\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{}^t\overline{A}A\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

ここで、$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{}^t\overline{A}\boldsymbol{y})$ なので $(\boldsymbol{x},{}^t\overline{A}A\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})$

$=(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ したがって、${}^t\overline{A}A-\boldsymbol{E}=0$ を得る。

イ)⇔ニ)

$${}^tA\overline{A}=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{a}_1\\{}^t\boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\{}^t\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{a}_1}&\overline{\boldsymbol{a}_2}&\cdots&\overline{\boldsymbol{a}_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)&\cdots&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_n)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)&\cdots&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_n)\\&&\cdots&\\(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_2)&\cdots&(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_n)\end{pmatrix}$$

片方が $=\boldsymbol{E}$ になるときもう片方も同時に $=\boldsymbol{E}$ になる。したがって、同値

ユニタリー行列 $A$ は ${}^tA\overline{A}=\boldsymbol{E}$ なので $|{}^tA\overline{A}|=|{}^tA||\overline{A}|=|A||\overline{A}|=1$

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=1$ したがって、行列式は絶対値 1 の複素数である。

## (P. 124 問6)

$A,B$ を $n$ 次実正方行列とするとき

$A+Bi$ : ユニタリー行列 ⇔ $\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}$ : 直交行列

⇒)

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}$ とする。仮定から、$A+Bi$ はユニタリー行列なので、

$$A+Bi=\begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \cdots & a_{2n}+ib_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{12}+ib_{n2} & \cdots & a_{nn}+ib_{nn} \end{pmatrix}$$

$${}^t\overline{(A+Bi)}=\begin{pmatrix} a_{11}-ib_{11} & a_{21}-ib_{21} & \cdots & a_{n1}-ib_{n1} \\ a_{12}-ib_{12} & a_{22}-ib_{22} & \cdots & a_{12}-ib_{n2} \\ & & \cdots & \\ a_{1n}-ib_{1n} & a_{2n}-ib_{2n} & \cdots & a_{nn}-ib_{nn} \end{pmatrix}={}^tA-i{}^tB$$

$({}^tA-i{}^tB)(A+Bi)={}^tAA+{}^tBB+i({}^tAB-{}^tBA)=E$

${}^tAA+{}^tBB=E$ , ${}^tAB-{}^tBA=0$ … ①

${}^tC=\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix}$ なので①より

$${}^tCC=\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AA^t+{}^tBB & -{}^tAB+{}^tBA \\ -{}^tBA+{}^tAB & {}^tBB+{}^tAA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}=E$$

よって、$C$ は直交行列となる。

⇐)

$AA^t+{}^tBB=E$ , $-{}^tBA+{}^tAB=0$ を仮定とすれば明らかである。

## (P. 130 $a_1$ , $a_2$ , … , $a_n$ が複素数体 $C$ の上の底のとき)

実数体 $R$ の上の $2n$ 次元ベクトル空間と考えるとき、底は

$a_1$ , $a_2$ , … , $a_n$ , $ia_1$ , $ia_2$ , … , $ia_n$ となる。

なぜなら、$C$ 上 のベクトル空間 $V$ の任意の $x$ は

$x=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$ と一意的に表現できる。$x_i$ は複素数なので

$x_i=b_i+ic_i$ ( $b_i$ , $c_i\in R$ )

$x=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n+c_1ia_1+c_2ia_2+\cdots c_nia_n$

つまり、$R$ の上の $2n$ 次元ベクトル空間として一意的に表現できることになる。

逆もまたいえる。

$a_1$ , $a_2$ , $b_1$ , $b_2$ は $n$ 次の実ベクトルとして

$(a_1+ia_2, b_1+ib_2)_u=(a_1+ia_2, \overline{b_1+ib_2})=(a_1+ia_2, b_1-ib_2)$

$=(a_1, b_1)+(a_2, b_2)+i(a_2, b_1)-i(a_1, b_2)$

したがって、

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_1+i\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1+i\boldsymbol{b}_2)_u = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) \rightarrow \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix} \right)$$

とすればよい。

次に、任意の $i, j$ に対し $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)_u = \delta_{ij}$ のとき

$(i\boldsymbol{a}_i, i\boldsymbol{a}_j)_u = i\,{}^t\boldsymbol{a}_i\overline{i\boldsymbol{a}_j} = i\times(-i)\,{}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j}\,\delta_{ij} = \delta_{ij}$

$(i\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = i\,\delta_{ij}$

$(\boldsymbol{a}_i, i\boldsymbol{a}_j) = -i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = -i\,\delta_{ij}$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系ならば $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, i\boldsymbol{a}_1, \cdots, i\boldsymbol{a}_n$ も正規直交系になる。

## （P. 131　研究課題　Ⅰ）

冪等行列

$A^2 = A$

$(E-A)^2 = E^2-EA-AE+A^2 = E-A-A+A = E-A$

よって、$E-A$ も冪等行列となる。

## （P. 131　問1）

$A$ は $V$ の $W_1$ 成分を抜き取る一次変換なので、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ ($\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$) とおくと $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ である。$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2$ から $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2$ とならなければならない。よって $A\boldsymbol{x}_2 = 0$ である。

$\boldsymbol{x} \in W_1$ ならば上の説明から明らかである。逆に、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ ならば $A: V \rightarrow W_1$ への一次変換なので $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \in W_1$

$\boldsymbol{x} \in W_2$ ならば $A\boldsymbol{x} \in W_1$ である。また、$\boldsymbol{x} = 0+\boldsymbol{x}$ ($0 \in W_1$) とおくと $A\boldsymbol{x} = A0+A\boldsymbol{x} = 0+0 = 0$ 逆に、$A\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0 \in W_2$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \neq 0$ ($\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$) ならば $A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1+0 = 0$ よって、$\boldsymbol{x}_1 = 0$ となり $\boldsymbol{x} = 0+\boldsymbol{x}_2 \in W_2$

任意の冪等行列 $A^2 = A$ が与えられたとき

$W_1 = \{\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{x}\in V, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$

$W_2 = \{\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{x}\in V, A\boldsymbol{x} = 0\}$

としたとき、$W_1 = AV$ , $W_2 = (E-A)V$ , $V = W_1 \dot{+} W_2$（直和）となる。

（証明）任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し、$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{x}_2 = (E-A)\boldsymbol{x}$ とおく。

$A\boldsymbol{x}_1 = A(A\boldsymbol{x}) = A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ であるから $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \in W_1$ よって、$AV \subset W_1$ , $W_1 \subset AV$ は明らかなので、$W_1 = AV$ となる。

次に、$A\boldsymbol{x}_2 = A(E-A)\boldsymbol{x} = (A-A^2)\boldsymbol{x} = 0$ なので $\boldsymbol{x}_2 = (E-A)\boldsymbol{x} \in W_2$ よって、$(E-A)V \subset W_2$ 、逆に任意の $\boldsymbol{x} \in W_2$ に対し、$\boldsymbol{x}_1 = 0$ , $\boldsymbol{x} = 0 + \boldsymbol{x}_2$ であり、$(E-A)\boldsymbol{x} = (E-A)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x} \in (E-A)V$ よって、$(E-A)V = W_2$ となる。

最後に直和であることを示す。$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ ならば、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 0$ したがって、$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ となる。

## （P. 131　問2）

$V$ の底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ とし、$f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)A$ とする。

$V = W_1 \dot{+} W_2$ ， $\dim W_1 + \dim W_2 = n$ 　ここで、$\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r\}$ を $W_1$ の底 $\{\boldsymbol{p}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $W_2$ の底とすれば、$\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ は $V$ の底となる。この底への底の変換行列を $P$ とする。

$(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P$

$f(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n)A'$

$= f((\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P)) = f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)AP$

$= (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n)P^{-1}AP = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, 0, \cdots, 0)$

$$= (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$したがって、A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$V$ が $n$ 次元数ベクトル空間だったとしたならば、$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を単位ベクトルにしておけば $P$ は $p_i$ を列ベクトルとした行列になる。P.34 問1 とⅢ章定理8 から $tr\, A = rank\, A$ となる。

## （P. 132　問3）

$A^2 = A \ \Leftrightarrow \ rank\,A + rank\,(E-A) = n$

⇒)

$A^2 = A$ ならば　$AV = W_1$ , $(E-A)V = W_2$　, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ なので、P. 112例1から

$rank\,A + rank\,(E-A) = dim\,W_1 + dim\,W_2 = n$

⇐)

$rank\,A + rank\,(E-A) = n$ とする。$AV + (E-A)V = V$ であるが、$rank\,A + rank\,(E-A) = dim\,AV + dim\,(E-A)V = n$　なので、定理4より、$dim\,(AV \cap (E-A)V) = 0$ 。$AV$ , $(E-A)V$ は部分空間であり $AV \cap (E-A)V$ も部分空間である。したがって、その次元が 0 ということは $\{0\}$ 意外にありえない。 直和であり、$AV \cap (E-A)V = \{0\}$

$A - A^2 = A(E-A) = (E-A)A$ であるから

$(A-A^2)V \subset AV$　かつ $(A-A^2)V \subset (E-A)V$

よって、$(A-A^2)V \subset AV \cap (E-A)V = \{0\}$　つまり、$A - A^2 = 0 \rightarrow A = A^2$

## （P. 132　問4）

$V$ が $m$ 個の部分空間 $W_1$ , $W_2$ , $\cdots$ , $W_m$ の直和に分解されたとする。任意の $x \in V$ は、$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$　$(x_i \in W_i)$　と一意的に表されるが、このとき、$x$ に $x_i$ を対応させる写像は $V$ の一次変換となる。

ある底に関する行列をそれぞれ $A_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ とすれば

(2)　$A_1 + A_2 + \cdots + A_m = E$　, $A_i A_j = \delta_{ij} A_i$　$(1 \leqq i , j \leqq m)$

が成り立つ。また

(3)　$W_i = A_i V = \{x \,;\, x \in V , A_i x = x\}$　$(rank\,A_i = dim\,W_i)$

逆に

(2) を満たす $m$ 個の行列 $A_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ が与えられたとき、(3) によって $W_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ を定義すれば、$V$ は、$W_1$ , $W_2$ , $\cdots$ , $W_m$ に直和分解される。また、$A_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ は上記の方法で定義される $m$ 個の行列と一致する。

（証明）

⇒)

ｉ）　$V = W_1 + W_1 + \cdots + W_1 \rightarrow$ (2) , (3) をみたす一次変換 $A_1$ , $\cdots$ , $A_m$ が存在する。

任意の $x \in V$ に対して、$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$　$(x_i \in W_i)$ と一意的に表される。

したがって、$x$ に対して、それぞれ $x_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ は一意的にきまるので、その写像（当然一次変換）を行列で $A_i$ とすれば、$A_i x = x_i$ となる。また、任意の $x \in V$ に対して $Ex = A_1 x + A_2$

$x+\cdots+A_m x$ なので $A_1+A_2+\cdots+A_m=E$ となる。

$V$ のどんな元 $x$ に対しても $x=x_1+x_2+\cdots+x_m$ （$x_i\in W_i$）と分解されるが、$x_i$ をさらに分解しようとしても

$x_i=0+\cdots+0+x_i+0+\cdots+0$ （$x_i\in W_i$, $0\in W_{j\neq i}$）

したがって、分解の一意性から $A_i x=x_i$ , $A_i x_i=x_i\rightarrow A_i^2=A_i$

次に、$A_j A_i x=A_j x_i=0$ （$i\neq j$）

まとめると、$A_j A_i=\delta_{ij}A_i$ となる。

$A_i x=x_i$ とすれば、$A_i x_i=A_i^2 x=A_i x=x_i$ であるから $x_i=A_i x\in W_i$ である。よって、$A_i V\subset W_i$ 、逆に $A_i V\supset W_i$ は明らかなので $A_i V=W_i$ となる。

⇐)

$A_i V=W_i$ （$1\leqq i\leqq m$）とする。$W_1+W_2+\cdots+W_m$ が直和であって、$V$ になることを示す。

(2) により、任意の $x\in V$ に対し

$x=Ex=A_1x+A_2x+\cdots+A_m x\in W_1+W_2+\cdots+W_m\rightarrow V\subset W_1+W_2+\cdots+W_m$

$V\supset W_1+W_2+\cdots+W_m$ は明らかなので、$V=W_1+W_2+\cdots+W_m$

次に直和であることを示す。

その前に一つ定理を証明する。

（定義）線型部分空間が

$F_i\cap(F_1+F_2+\cdots+F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_m)=\{0\}$, ($i=1,\cdots,m$) … ①

のとき、$F_1+F_2+\cdots+F_m$ を $F_1\dotplus F_2\dotplus\cdots\dotplus F_m$ とかき、直和という。

（定理）$F_1+F_2+\cdots+F_m$ が直和であるための必要十分条件は、$F_1+F_2+\cdots+F_m$ の任意の元 $x$ についても

$x=a_1+a_2+\cdots+a_m$ （$a_i\in F_i$, $i=1,\cdots,m$）

という分解が一意的であることである。

（証明）

⇒）直和であることを仮定する。$x\in F_1+F_2+\cdots+F_m$ が

$x=a_1+a_2+\cdots+a_m=a'_1+a'_2+\cdots+a'_m$ （$a_i, a'_i\in F_i$, $i=1,\cdots,m$）

のように2通りに分解できたとする。

$a_i-a'_i=a'_1-a_1+\cdots+a'_{i-1}-a_{i-1}+a'_{i+1}-a_{i+1}+\cdots+a'_m-a_m$

左辺は $F_i$ に含まれ、右辺は $F_1+\cdots+F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_m$ に含まれているので

$a_i-a'_i\in F_i\cap(F_1+F_2+\cdots+F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_m)=\{0\}$

ということになる。したがって、$\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}'_i=0 \rightarrow \boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}'_i$

$i$ は任意だったので、分解が一意的であることがわかる。

⇐) 分解が一意的であると仮定する。

$\boldsymbol{F}_i \cap (\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_{i-1}+\boldsymbol{F}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{F}_m)$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ は

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_{i-1}+\boldsymbol{a}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{a}_m$ これを

$\boldsymbol{x}+0=0+(\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_{i-1}+\boldsymbol{a}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{a}_m)$

と書いてみる。

左辺の $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{F}_i$ の元、右辺の 0 は $\boldsymbol{F}_i$ の元なので、一意性から分解は一通りしかないので $\boldsymbol{x}=0$ を得る。したがって、$\boldsymbol{F}_i \cap (\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_{i-1}+\boldsymbol{F}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{F}_m)=\{0\}$ となる。

*END*

戻ると、あとは直和であることを示せばよい。

$\boldsymbol{x}$ を $A_iV \cap (A_1V+\cdots+A_{i-1}V+A_{i+1}V+\cdots+A_mV)$ の任意の元とする。

$\boldsymbol{x}=A_i\boldsymbol{a}=A_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+A_{i-1}\boldsymbol{b}_{i-1}+A_{i+1}\boldsymbol{b}_{i+1}+\cdots+A_m\boldsymbol{b}_m$ （$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{j\neq i} \in V$）

この両辺に $A_i$ を施すと (2) から

$A_iA_i\boldsymbol{a}=A_i\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}$ ， $A_i(A_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+A_{i-1}\boldsymbol{b}_{i-1}+A_{i+1}\boldsymbol{b}_{i+1}+\cdots+A_m\boldsymbol{b}_m)=0$

よって、$\boldsymbol{x}=0$

したがって、$A_iV \cap (A_1V+\cdots+A_{i-1}V+A_{i+1}V+\cdots+A_mV)=\{0\}$

$i$ は任意だったので、①を満たす。

## （P．132　問5）

$A^2=(A_1+A_2+\cdots+A_{m-1})(A_1+A_2+\cdots+A_{m-1})$

$=A_1(A_1+\cdots+A_{m-1})+A_2(A_1+\cdots+A_{m-1})+\cdots+A_m(A_1+\cdots+A_{m-1})$

$=A_1+A_2+\cdots+A_{m-1}$

$AA_i=A_iA=A_i$ も同様にして明らかである。

次に、$A_m=E-A$ とした場合、$A_1+A_2+\cdots+A_{m-1}+A_m=E$ は明らかである。

$A_mA_m=(E-A)(E-A)=E-A-A+A^2=E-A=A_m$

$A_mA_i=(E-A)A_i=A_i-A_i=0$ ， $A_iA_m=A_i(E-A)=A_i-A_i=0$ （$m\neq i$）

よって、$A_iA_j=\delta_{ij}A_i$ （$1\leqq i, j\leqq m$）となる。

## （P. 132 応用）

$n$ 次行列の行列単位 $E_{ij}=(\delta_{ip}\delta_{jq})\leftarrow E_{ij}$ の $(p,q)$ 成分

$$\text{（例）4次行列の}E_{23}=\begin{pmatrix}\delta_{21}\delta_{31} & \delta_{21}\delta_{32} & \delta_{21}\delta_{33} & \delta_{21}\delta_{34}\\ \delta_{22}\delta_{31} & \delta_{22}\delta_{32} & \delta_{22}\delta_{33} & \delta_{22}\delta_{34}\\ \delta_{23}\delta_{31} & \delta_{23}\delta_{32} & \delta_{23}\delta_{33} & \delta_{23}\delta_{34}\\ \delta_{24}\delta_{31} & \delta_{24}\delta_{32} & \delta_{24}\delta_{33} & \delta_{24}\delta_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\underset{(2,3)}{1}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$E_{ij}E_{k\ell}=\delta_{jk}E_{i\ell}$ （P. 12） → $E_{ji}E_{ii}E_{ij}=\delta_{ii}E_{ji}E_{ij}=\delta_{ii}E_{jj}=E_{jj}$

（例）2次行列

$$E_{21}E_{12}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\delta_{11}E_{22}$$

$$E_{11}E_{12}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\delta_{11}E_{12}$$

◎ $n$ 次正方行列を $n$ 次正方行列に写す写像が次の条件を満たすとき

ｉ） $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$ , $f(cX)=cf(X)$

ⅱ） $f(XY)=f(X)f(Y)$

適当な正則行列があって、$f(X)=P^{-1}XP$ と表現できる。

（証明） $f(E_{ii})=A_i\ (1\leqq i\leqq n)$ とおく。

$$A_iA_j=f(E_{ii})f(E_{jj})=f(E_{ii}E_{jj})=f(\delta_{ij}E_{ij})=\delta_{ij}f(E_{ij})\underset{\substack{\uparrow\\ \delta_{ij}\text{があるので機能として同じ}}}{=}\delta_{ij}f(E_{ii})=\delta_{ij}A_i$$

よって、$A_1,A_2,\cdots,A_n$ は直交冪等行列系である。$f(E)=\sum_{i=1}^{n}f(E_{ii})=\sum_{i=1}^{n}A_i$ なので上記のことから、$f(E)\,V=A_1V\dotplus A_2V\dotplus\cdots\dotplus A_nV$ （直和、$V$ は $n$ 次元ベクトル空間）

よって、$rank\,f(E)=rank\,A_1+rank\,A_2+\cdots+rank\,A_n$

ここで、$rank\,A_i=1\ (1\leqq i\leqq n)$ であることを証明する。今、ある $i$ に対し $A_i=0$ とすれば、任意の $j$ に対して、$E_{ji}E_{ii}E_{ij}=\delta_{ii}E_{ji}E_{ij}=\delta_{ii}E_{jj}=E_{jj}$ から

$A_j=f(E_{ji}E_{ii}E_{ij})=f(E_{ji})A_if(E_{ij})=0$ よって、すべての $A_i=0$ 、したがって、$f(E)=0$ となり任意の $n$ 次行列 $X$ に対し、$f(X)=f(XE)=f(X)f(E)=0$ なので、恒等的に 0 ではないという仮定に反する。よって、$rank\,A_i\geqq 1\ (1\leqq i\leqq n)$

一方、$\sum_{i=1}^{n}rank\,A_i=rank\,f(E)\leqq n$ なのであるから、$rank\,A_i=1\ (1\leqq i\leqq n)$ でなければならない。したがって、$rank\,f(E)=n$ また、$f(E)f(E)=f(E)$ なので、$f(E)$ は冪等である。

また、問3から、$rank\, f(E)+rank(E-f(E))=n \rightarrow f(E)=E$

$dim\, A_iV=1$ であるから、$A_1V=\{\{\boldsymbol{q}_1\}\}$ （当然 $\boldsymbol{q}_1\neq 0$ ）とし、$\boldsymbol{q}_i=f(\boldsymbol{E}_{i1})\boldsymbol{q}_1$ （$2\leqq i\leqq n$）とおく。$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{k\ell}=\delta_{jk}\boldsymbol{E}_{i\ell}$ だったので

$$f(\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{q}_k=f(\boldsymbol{E}_{ij})f(\boldsymbol{E}_{k1})\boldsymbol{q}_1=f(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{k1})\boldsymbol{q}_1=f(\delta_{jk}\boldsymbol{E}_{i1})\boldsymbol{q}_1=\delta_{jk}f(\boldsymbol{E}_{i1})\boldsymbol{q}_1=\delta_{jk}\boldsymbol{q}_i$$

$$\boxed{f(\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{q}_k=\delta_{jk}\boldsymbol{q}_i}$$

特に、$f(\boldsymbol{E}_{1i})\boldsymbol{q}_i=\delta_{ii}\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{q}_1$ ， $A_i\boldsymbol{q}_i=f(\boldsymbol{E}_{ii})\boldsymbol{q}_i=\delta_{ii}\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{q}_i$ よって、$\boldsymbol{q}_i\neq 0$ , $\boldsymbol{q}_i\in A_iV$

（なぜなら、$\boldsymbol{q}_i=0$ ならば、$f(\boldsymbol{E}_{1i})\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{q}_1=0$ となってしまう）

$dim\, A_iV=1$ なので $A_iV=\{\{\boldsymbol{q}_i\}\}$ となる。ゆえに $\{\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n\}$ は $V$ の底になる。

この底に関して

$$f(\boldsymbol{E}_{ij})(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n)=(0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{ 番目}}}{\boldsymbol{q}_i},\cdots,0)=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n)\boldsymbol{E}_{ij}$$

$$f(\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{q}_k=\underset{\substack{\uparrow\\ j=k\text{ のとき }1}}{\delta_{jk}}\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{q}_i$$

よって、$\boldsymbol{q}_i$（$1\leqq i\leqq n$）を列ベクトルとする $n$ 次行列を $\boldsymbol{Q}$ とおけば、底だったので正則で

$$f(\boldsymbol{E}_{ij})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

を得る。任意の $n$ 次行列 $\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{E}_{ij}$ の一次結合として表せるから、

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} \rightarrow f(\boldsymbol{X})=f(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}f(\boldsymbol{E}_{ij})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{Q}^{-1}=\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{Q}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

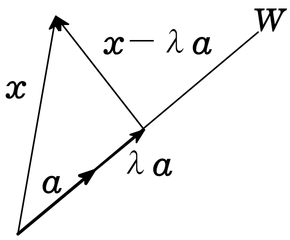
$$=\boldsymbol{Q}(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

最後に、$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$ とすればよい。

（例） $W=\{\{\boldsymbol{a}\}\}$ のとき、$W$への射影子を $\boldsymbol{x}\rightarrow\lambda\boldsymbol{a}$ とすれば

$$(\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})-\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0 \rightarrow \lambda=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$$




$\{\{\boldsymbol{a}\}\}$ への射影子は $\boldsymbol{x}\rightarrow\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$

で与えられる。その行列は

$$\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\begin{pmatrix}a_1(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\\ \vdots\\ a_n(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \begin{pmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1 a_n \\ & \vdots & \\ a_n a_1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1, a_1, \cdots, a_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{a} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

一般の部分空間 $W$ への射影子は、$W$ の一つの正規直交底を $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_r$ とするとき $W = \{\{\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_r\}\}$ なので、$\boldsymbol{x}$ の各 $\boldsymbol{t}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ 方向の射影は上の例から $\dfrac{(\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_i)} \boldsymbol{t}_i$ $= (\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_i$ となる。よって、$W$ への射影子は $\boldsymbol{x} \rightarrow \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_i$ で与えられる。その行列は

$\sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_i = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_1 + (\boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_2 + \cdots + (\boldsymbol{t}_r, \boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_r = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{t}_i\,{}^t\boldsymbol{t}_i \boldsymbol{x}$ となる。

このことは、P.107 の定理6 の $\boldsymbol{x}'$ の作り方と同じである。

# (P. 135 2 連立線型微分方程式)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{21n}(x)y_n + b_2(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

$a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ はある区間において定義された $x$ の連続関数とする。これらを行列表現すると

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$$

(2) $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ （ $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b}(x)$ はベクトルと関数 ）

ここで、$\boldsymbol{b}(x) = 0$ とおいて得られる方程式 (2*) を (2) に属する斉次方程式という。

(2*) $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A(x)\boldsymbol{y}$

(2) を (2*) を満足するベクトル値関数 $\boldsymbol{y}(x)$ はコーシーの存在定理から、任意の初期条件 ( $x_0$ , $y_1(x_0)$ , $y_2(x_0)$ , $\cdots$ , $y_n(x_0)$ ) に対し、一意的に存在することがわかっている。また、(2*) の解はベクトル空間になっている。その次元は ( $y_1(x_0)$ , $y_2(x_0)$ , $\cdots$ , $y_n(x_0)$ ) の選び方に依存するので、$n$ 次元になる。したがって、$n$ 個の一次独立な解 $\boldsymbol{g}_1(x)$ , $\boldsymbol{g}_2(x)$ , $\cdots$ , $\boldsymbol{g}_n(x)$ が存在し、任意の解 $\boldsymbol{y}$ はその一次結合として表わされることになる。

ここで、対応 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(x_0)$ は (2*) の解ベクトル空間から $n$ 次元数ベクトル空間への（上への）一対一線型写像 を与える。$\boldsymbol{g}_j(x) = \begin{pmatrix} g_{1j}(x) \\ \vdots \\ g_{nj}(x) \end{pmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{y} = (\ \boldsymbol{g}_1(x) , \boldsymbol{g}_2(x) , \cdots , \boldsymbol{g}_n(x)\ ) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$a_1\boldsymbol{g}_1(x)+a_2\boldsymbol{g}_2(x)+\cdots+a_n\boldsymbol{g}_n(x) = a_1 \begin{pmatrix} g_{11}(x) \\ \vdots \\ g_{n1}(x) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} g_{12}(x) \\ \vdots \\ g_{n2}(x) \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} g_{1n}(x) \\ \vdots \\ g_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

したがって、$\boldsymbol{g}_1(x)$ , $\cdots$ , $\boldsymbol{g}_n(x)$ が基本解となるためには、$x = x_0$ で一次独立になることが必要十分である。よって定理2により

$$W(x) = \begin{vmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

が $x = x_0$ で $\neq 0$ となることが必要十分である。$x_0$ は任意でよいから、コーシーの存在定理により、$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ となる解が一意的に存在するはずなので、$W(x_0) \neq 0$ ならば、他の任意の点においても $\neq 0$ となるはずである。

あとは連立方程式と同じで、(2) の一つの特殊解 $g_0(x)$ がわかれば、(2) の一般解は

(3) $\boldsymbol{y} = g_0(x)+a_1\boldsymbol{g}_1(x)+a_2\boldsymbol{g}_2(x)+\cdots+a_n\boldsymbol{g}_n(x)$ , $a_1$ , $\cdots$ , $a_n$ は任意定数

と表される。

（例）$n$ 階線型微分方程式

(4) $\dfrac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=b(x)$

について、(2) の形にするために少し工夫する。それは

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y^{(1)}\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}(x)=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\b(x)\end{pmatrix}$$ として、

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\begin{pmatrix}y^{(1)}\\y^{(2)}\\\vdots\\y^{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&&&0\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\0&&&0&1\\-a_n(x)&-a_{n-1}(x)&&\cdots&-a_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y^{(1)}\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\b(x)\end{pmatrix}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(x)$$

となる。

$b(x)=0$ 斉次の場合、(4) の解は $n$ 次元ベクトル空間になるので、$n$ 個の基本解 $\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_n$ を与えるための必要十分条件は任意の一点 $x=x_0$ において

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}g_1&g_2&\cdots&g_n\\g_1^{(1)}&g_2^{(1)}&\cdots&g_n^{(1)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\g_1^{(n-1)}&g_2^{(n-1)}&\cdots&g_{n1}^{(n-1)}\end{vmatrix}\neq 0 \quad\leftarrow\quad Wronski \text{ の行列式}$$

となることである。（詳しくは微分方程式の本に任せる。）

## （P. 138　問1）

$y^{(n)}=ay$（$a$ は定数）の一般解を求めよ。

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y^{(1)}\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}(x)=0\ \rightarrow\ \frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\begin{pmatrix}y^{(1)}\\y^{(2)}\\\vdots\\y^{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&&&0\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\a&0&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y^{(1)}\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{pmatrix}=A\boldsymbol{y}$$

P.36 の (6) の形になる。

$$A(x)=A=\begin{pmatrix}0&1&&&0\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\a&0&&&0\end{pmatrix}$$ となる。よって、$exp\ xA$ がわかればよい。

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\\0&a&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\\0&a&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\\0&a&0&0&0\\0&0&a&0&0\end{pmatrix}\ \cdots\ \boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}a&0&0&0&0\\0&a&0&0&0\\0&0&a&0&0\\0&0&0&a&0\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^6=\begin{pmatrix}a&0&0&0&0\\0&a&0&0&0\\0&0&a&0&0\\0&0&0&a&0\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&a&0&0&0\\0&0&a&0&0\\0&0&0&a&0\\0&0&0&0&a\\a^2&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^6=\begin{pmatrix}0&a&0&0&0\\0&0&a&0&0\\0&0&0&a&0\\0&0&0&0&a\\a^2&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a&0&0\\0&0&0&a&0\\0&0&0&0&a\\a^2&0&0&0&0\\0&a^2&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\cdots\ \boldsymbol{A}^{10}=\begin{pmatrix}a^2&0&0&0&0\\0&a^2&0&0&0\\0&0&a^2&0&0\\0&0&0&a^2&0\\0&0&0&0&a^2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{11}=\begin{pmatrix}0&a^2&0&0&0\\0&0&a^2&0&0\\0&0&0&a^2&0\\0&0&0&0&a^2\\a^3&0&0&0&0\end{pmatrix},\ \cdots$$

なので、

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}0&1&&&0\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\a&0&&&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a&&&0\\&a&&\\&&a&\\&&&\ddots\\0&&&a\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{n+1}=\begin{pmatrix}0&a&&&0\\&0&a&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&a\\a^2&0&&&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2n}=\begin{pmatrix}a^2&&&0\\&a^2&&\\&&a^2&\\&&&\ddots\\0&&&a^2\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}^{3n}=\begin{pmatrix}a^3&&&0\\&a^3&&\\&&a^3&\\&&&\ddots\\0&&&a^3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{3n+1}=\begin{pmatrix}0&a^3&&&0\\&0&a^3&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&a^3\\a^4&0&&&0\end{pmatrix}$$

証明はないが、となることが予想できる。$(x\boldsymbol{A})^k$ の第一行だけを上から並べていけば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}&=(\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,0\ ,0\ ,\cdots,0\ )\\
\boldsymbol{A}x&=(\ 0\ ,\ x\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,0\ ,0\ ,\cdots,0\ )\\
\boldsymbol{A}^2x^2&=(\ 0\ ,\ 0\ ,\ x^2\ ,\ 0\ ,0\ ,0\ ,\cdots,0\ )\\
&\qquad\vdots\\
\boldsymbol{A}^nx^n&=(\ ax^n\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,0\ ,0\ ,\cdots,0\ )
\end{aligned}$$

$$A^{n+1}x^{n+1} = (\,0\,,\quad ax^{n+1}\,,\quad 0\,,\quad 0\,,0\,,0\,,\cdots,0\,)$$
$$\vdots$$
$$A^{2n}x^{2n} = (\,a^2x^{2n}\,,0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,0\,,0\,,\cdots,0\,)$$
$$A^{2n+1}x^{2n+1} = (\,0\,,\quad a^2x^{2n+1}\,,\quad 0\,,\quad 0\,,0\,,0\,,\cdots,0\,)$$
$$\vdots$$
$$A^{3n}x^{3n} = (\,a^3x^{3n}\,,0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,0\,,0\,,\cdots,0\,)$$
$$\vdots$$

$exp\ xA$ の第1行を $(\,y_1\,,y_2\,,\cdots,y_n\,)$ とすれば

$$y_1 = 1+\frac{ax^n}{n!}+\frac{a^2x^{2n}}{(2n)!}+\frac{a^3x^{3n}}{(3n)!}+\frac{a^4x^{4n}}{(4n)!}+\cdots$$
$$y_2 = x+\frac{ax^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{a^2x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$
$$\vdots$$
$$y_n = x^{n-1}+\frac{ax^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{a^2x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

これらが $y^{(n)} = ay$ の基本解となる。

## （Ⅳ章　P. 140　問1）

$a_1 = -(\,a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\,) = tr\ A$ ，$a_n = (-1)^n|\,A\,|$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & B & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad f_A(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n$ についての帰納法で証明する。

$f_A(x) = (\,x-a_{11}\,)\,|\,Ex-B\,|+Q(x)$ （ $Q(x)$ は $x$ の $n-2$ 次式 ）

$x$ を含む成分が2つ減るので $n-2$ 次式

帰納法の仮定から

$= (\,x-a_{11}\,)(\,x^{n-1}-(\,a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}\,)x^{n-2}+P(x)\,)+Q(x)$

$n-3$ 次式

$= x^n-(\,a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\,)x^{n-1}+R(x)$ （ $R(x)$ は $n-2$ 次式 ）

よって、$x^n$ , $x^{n-1}$ の係数は、1 , $-trA$

また、$f_A(x)$ の定数項は $f_A(0)$ に等しいので

$$f_A(0)=\begin{vmatrix}-a_{11} & & -a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & & -a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^n|\,A\,|$$

（練習）次の行列の固有値と固有ベクトルを求める。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$|\,Ex-A\,|=\begin{vmatrix}x-1 & 0 & 1\\ -1 & x-2 & -1\\ -2 & -2 & x-3\end{vmatrix}=(x-1)\{(x-2)(x-3)-2\}+2+2(x-2)$$

$=(x-1)(x^2-5x+4)+2(x-1)=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

固有値 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$

（$\lambda_1=1$）の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{cases}x_1-x_3=x_1\\ x_1+2x_2+x_3=x_2\\ 2x_1+2x_2+3x_3=x_3\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

固有ベクトルとして（1　−1　0）を選ぶ。

（$\lambda_2=2$）の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=2x_1\\ x_1+2x_2+x_3=2x_2\\ 2x_1+2x_2+3x_3=2x_3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_1+x_3=0\\ 2x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$$

固有ベクトルとして（−2　1　2）を選ぶ。

（$\lambda_3=3$）の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\ \rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=3x_1\\ x_1+2x_2+x_3=3x_2\\ 2x_1+2x_2+3x_3=3x_3\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}2x_1+x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+x_2=0\end{cases}$$

固有ベクトルとして（−1　1　2）を選ぶ。

したがって、変換行列を $P$ とすれば

$$P=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & -1 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

## (P. 141　例1)

$\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立である。

一次従属であったとすれば、$\boldsymbol{a}_1$ , $\boldsymbol{a}_2$ , ⋯ , $\boldsymbol{a}_i$ は一次独立 $\boldsymbol{a}_1$ , ⋯ , $\boldsymbol{a}_i$ , $\boldsymbol{a}_{i+1}$ は一次従属となるはずである。$i$ はもしかしたら 1 かもしれない。

それを’最初’の一次関係といっている。

## (P. 136　例2)

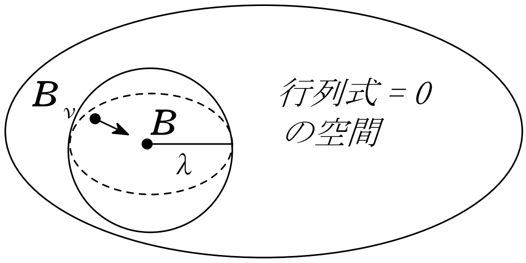
任意の $n$ 次行列 $\boldsymbol{B}$ に対し、$\lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{B}_\nu=\boldsymbol{B}$ となるような $n$ 次正則行列の’列’が存在する。

$\boldsymbol{B}$ を $n$ 次正方行列全体の集合( $n^2$ 次元Euclid 空間 )の1点とする。その空間上で、行列式が 0 になる $n$ 次正方行列全体の集合の次元は $n^2-1$ 次元になる。つまり、$\boldsymbol{B}$ の近傍にはいくらでも正則行列が存在するということである。

$\boldsymbol{B}$ の固有値を $\beta_i$ ( $1\leqq i\leqq n$ )と

すれば、$\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{E}$ の固有値は

$\beta_i+\lambda$ となる。




なぜなら

$f_{B+\lambda E}(x)=|\,x\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{E})\,|=|\,(x-\lambda)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\,|=0$

$x-\lambda$ が $\boldsymbol{B}$ の固有値になるはずなので、$x-\lambda=\beta_i\rightarrow x=\beta_i+\lambda$ となる。

よって、0 でない絶対値が最小のものを $\beta_{i_0}$ とすれば、$0<|\lambda|<|\beta_{i_0}|$

のとき、$\beta_i+\lambda\neq 0$ ( $0<|\beta_{i_0}|-|\lambda|<|\beta_i+\lambda|$ )よって、$|\,\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{E}\,|\neq 0$

( $\lambda\neq-\beta_i$ ( $1\leqq i\leqq n$ )なので、$\boldsymbol{B}$ の固有値にはならない )

よって、$0<|\lambda_\nu|<|\beta_{i_0}|$ , $\lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=0$ となるような数列をとれば $\boldsymbol{B}_\nu=\boldsymbol{B}+\lambda_\nu$ は正則行列であり、$\lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{B}_\nu=\boldsymbol{B}$ となる。

また、$f_A(x)=|\,x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\,|$ の係数は $\boldsymbol{A}$ *の連続関数*であり、$\lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{AB}_\nu=\boldsymbol{AB}$

$f_{AB_\nu}$ の係数は $f_{AB}$ の係数に収束する。ゆえに、$\lim_{\nu\to\infty}f_{AB_\nu}=f_{AB}$ 同様にして、$\lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{B}_\nu\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$ 、$\lim_{\nu\to\infty}f_{B_\nu A}=f_{BA}$

したがって、正則の場合の結果から、$f_{AB_\nu} = f_{B_\nu A}$ から $f_{AB} = f_{BA}$ となる。

（代数的に！（本多先生より））

$F(x, X) = F(x, x_{ij}) = |xE - AX| - |xE - XA|$ とする。

$G(x, X) = F(x, x_{ij})|X|$ とおく

$X$ に $B$ を代入する。

$|B| \neq 0$ のとき $F(x, B) = 0$ より $G(x, B) = 0$

$|B| = 0$ のとき　　$|B| = 0$ より $G(x, B) = 0$

故に、任意の $n$ 次行列 $B$ に対して $G(x, B) = 0$ となる。

このことは恒等的に多項式 $G(x, X) = 0$ となることを示す。

$F(x, X)$ は $n^2+1$ 次以下の多項式

$|X| = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$ は $n$ 次の多項式なので $\neq 0$

よって、$F(x, X) = 0$ となり 任意の $B$ に対して $F(x, B) = 0$ から $f_{AB} = f_{BA}$ となる。

（$END$）

また、P. 127 の問2 から適当な正則行列 $P$, $Q$ を選べば

$$B' = Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & \overset{r}{\ddots} & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とすることができる。

（線型代数入門　松坂和夫　著　P. 235参照）

$P^{-1}AQ = A'$ とおけば

$A'B' = P^{-1}AQQ^{-1}BP = P^{-1}(AB)P$

$B'A' = Q^{-1}BPP^{-1}AQ = Q^{-1}(BA)Q$

したがって、$f_{A'B'}(x) = f_{AB}(x)$　，　$f_{B'A'}(x) = f_{BA}(x)$

よって、$f_{A'B'}(x) = f_{B'A'}(x)$ を証明すればよい。

そのためには、$A'$ を次の様に区画分けする。

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ D & A_2 \end{pmatrix}$$　（$A_1$; $r$ 次正方行列 , $A_2$; $(n-r)$ 次正方行列）

$$A'B' = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ D & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}$$　　（$DE_r = D$）

$B'A' = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & C \\ D & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ （$E_rC = C$）

よって、$f_{A'B'}(x) = f_{A_1}(x) \cdot x^{n-r} = f_{B'A'}(x)$

## （P. 143　定理1）

$xE - A = \begin{pmatrix} x-a_{11} & & \cdots & -a_{1n} \\ & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{pmatrix}$ の余因子 $\Delta_{ij}$ を（$i$ , $j$）成分とする行列 $B$ を

P. 63 にならって次の様にする。

$$B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

(24'') から ${}^tB(xE - A) = (xE - A){}^tB = |xE - A|E$

また、$\Delta_{ij}$ は $x$ の（$n-1$）次式なので

$\Delta_{ij} = b_{ij,0}x^{n-1} + b_{ij,1}x^{n-2} + \cdots + b_{ij,n-1}$

ここで、しばらく線型代数入門（齋藤正彦　著）P. 224 附録 I 多項式に移る。定理の内容と詳しい証明については省いてある。証明の主な点だけ記した。記号等はそちらの本を参考にしてもらいたい。

## （P. 226［定理1. 2］）

$f(x)$ , $g(x)$ が多項式のとき、$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ 　（$r(x) = 0$ $or$ $deg\, r(x) < deg\, g(x)$）
となる多項式 $q(x)$ , $r(x)$ がちょうど一組存在する。
（略証）

$deg\, f(x) \geqq deg\, g(x)$ の場合

$f_1(x) = f(x) - \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)$ とおけば、$n-1$ 次以下の多項式になる。

$f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x)$ （$deg\, r(x) < deg\, g(x)$）← 帰納法の仮定

$q(x) = \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m} + q_1(x)$ とすれば

$f(x) = f_1(x) + \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x) = g(x)q_1(x) + r(x) + \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)$

$= g(x)(\dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}+q_1(x))+r(x)$

証明終

（注意）$f(x) = g(x)q(x)$　ならば　$\overline{f(x)} = \overline{g(x)q(x)} = f(x) = g(x)\overline{q(x)}$

よって、$q(x) = \overline{q(x)}$ となり、実係数多項式となる。

## （P．227［系1．3］剰余定理）　←　よく忘れる！

$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったあまりは $f(\alpha)$ に等しい。

## （P．227［定理1．4］）

$d(x)$ が $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ の最大公約数ならば、

$f_1(x)u_1(x)+f_2(x)u_2(x)+\cdots+f_m(x)u_m(x) = d(x)$ となるような $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_m(x)$ が存在する。

（略証）

$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x)$

$f_i(x) = \phi(x)q_i(x)+r_i(x)$　（ $deg\ r_i(x) < deg\ \phi(x)$　or　$r_i(x) = 0$ ）

とする。

$r_i(x) = f_i(x)-\phi(x)q_i(x) = f_i(x)-q_i(x)\sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x)$

$= f_i(x)(1-u_i(x)q_i(x))-q_i(x)\sum_{i\neq j} f_j(x)u_j(x)$

よって、$r_i(x) \in A$　したがって、$deg\ r_i(x) \geqq deg\ \phi(x)$ でなければならない。

これは $deg\ r_i(x) < deg\ \phi(x)$ に矛盾する。つまり、$r_i(x) = 0$ となる。

すなわち、$\phi(x)$ は 各 $f_i(x)$ の約数となり、$deg\ \phi(x) \leqq deg\ d(x)$ .

一方、$d(x)$ は各 $f_i(x)$ の約数の約数であるから $\phi(x)$ は $d(x)$ で割り切れる。

以上から、$\phi(x) = cd(x)$ ( $c\in K$ , $c\neq 0$ ) となる。

証明終

## （P．228［系1．5］）

$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ の最大公約数は任意の公約数で割り切れる。

定理1．4 より、$d(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x)$ と表すことができるので任意の公約数で割り切ることができ

る。他に最大公約数 $d'(x)$ があったとしたら、$d'(x)$ で $d(x)$ を割り切ることができる。このことは

$deg\ d'(x) \leqq deg\ d(x)$ 逆も言えるので $deg\ d'(x) \geqq deg\ d(x)$ よって $deg\ d(x) = deg\ d'(x)$

つまり、$d(x) = cd'(x)$ ( $c \in K$ ) しかありえない。

## （P. 228 ユークリッドの互除法）

$deg\ f(x) \geqq deg\ g(x) \neq 0$ として

$f(x) = g(x)q(x) + r_1(x)$　　$deg\ g(x) \geqq deg\ r_1(x)$

$g(x) = r_1(x)q_1(x) + r_2(x)$　　$deg\ r_1(x) \geqq deg\ r_2(x)$

$r_1(x) = r_2(x)q_2(x) + r_3(x)$　　$deg\ r_2(x) \geqq deg\ r_3(x)$

$\vdots$

$r_{k-4}(x) = r_{k-3}(x)q_{k-3}(x) + r_{k-2}(x)$　　$deg\ r_{k-3}(x) \geqq deg\ r_{k-2}(x)$

$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-2}(x) + r_{k-1}(x)$　　$deg\ r_{k-2}(x) \geqq deg\ r_{k-1}(x)$

$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) + r_k(x)$　　$deg\ r_{k-1}(x) \geqq deg\ r_k(x)$

$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_k(x)$

$r_k(x)$ は下から見ていくと、$r_{k-1}(x)$ の約数である。また、$r_{k-2}(x)$ の約数になっている。そして、次々とさかのぼり $g(x)$ と $f(x)$ の公約数になっていることがわかる。

また、$h(x)$ を $g(x)$ と $f(x)$ の任意の公約数とする。

$f(x) = f\,'(x)h(x)$ , $g(x) = g\,'(x)h(x)$

$f\,'(x)h(x) = g\,'(x)h(x)q(x) + r_1(x)$

$deg\ g\,'(x)h(x) \geqq deg\ r_1(x)$ 上の等式の左辺は $h(x)$ の倍数なので、$r_1(x)$ も $h(x)$ の倍数になる。そして、上から順に下っていくと、$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) + r_k(x)$ なので、$r_k(x)$ も $h(x)$ の倍数になり、つまり、$h(x)$ は $r_k(x)$ の約数になる。

$deg\ f(x) \geqq deg\ g(x) > deg\ r_1(x) > \cdots > deg\ r_k(x) \geqq deg\ h(x)$

したがって、$r_k(x)$ は次数最大の公約数なので最大公約数となる。

数だが、( 15 , 36 ) の最大公約数を求めてみる。

$36 = 15 \times 2 + 6$　　$15 > 6$

$15 = 6 \times 2 + 3$　　$6 > 3$　　→ 最大公約数は 3

$6 = 3 \times 2 + 0$　　$3 > 0$

## (P．228　系［1．6］)

$f_1(x)$ , $f_2(x)$ , $\cdots$ , $f_m(x)$ が互いに素ならば、最大公約数が定数なので、それを $d$ とおくと、定理［1．4］から $\sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x) = d$ となるような $u_i(x)$ が存在する。したがって、$\frac{u_i(x)}{d}$ とすれば、1 とすることができる。逆に、$\sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x) = 1$ となるような $u_i(x)$ が存在したとすれば、定理［1．4］の証明から、$\phi(x)$ は $f_1(x)$ , $f_2(x)$ , $\cdots$ , $f_m(x)$ の公約数であり、$deg\ \phi(x) = 0$ である。つまり、$\phi(x)$ は定数 $a$ である。また、最大公約数 $d(x)$ で割り切れるので、$a = \phi(x) = cd(x)$ ($c \in K$)

したがって $d(x)$ は定数となる。

（注意）$\sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x) = 1$ でなくても、定数であるなら何でもよい。

## (P．229　定理［1．7］)

イ) $f(x)u(x)+g(x)v(x) = 1$ となる $u(x)$ , $v(x)$ が存在する。両辺に $h(x)$ をかければ

$f(x)h(x)u(x)+g(x)h(x)v(x) = h(x)$

ここで、$\phi(x)$ が $f(x)$ , $g(x)h(x)$ の公約数ならば、$\phi(x)$ は $h(x)$ の約数となる。$f(x)$ と $h(x)$は互いに素だったので $\phi(x)$ は定数となる。

定理［1．8］の準備

$f(x)$ , $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ が既約である $p(x)$ で割り切れるならば、$f(x)$ ,$g(x)$のいずれか少なくとも1つは $p(x)$ で割り切ることができる。

（証明）$f(x)$ は $p(x)$ で割り切れないものとする。$p(x)$ は既約なので $f(x)$ と $p(x)$ は互いに素である。したがって $f(x)u(x)+p(x)v(x) = 1$ となる $u(x)$ , $v(x)$ が存在する。そこで、両辺に $g(x)$ をかけると

$f(x)g(x)u(x)+p(x)v(x)g(x) = g(x)$

仮定により、$f(x)g(x)$ は $p(x)$ で割り切れるので、左辺は $p(x)$ で割り切れることになる。よって、$g(x)$ は $p(x)$ で割り切れる。

## (P．229　定理［1．8］)

イ) $f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$ が既約な多項式 $p(x)$ で割り切れるならば、少なくとも1つの $f_i(x)$ は $p(x)$ で割り切れる。

ロ) 0 でない任意の $K$−係数多項式 $f(x)$ は、何個かの $K$−既約多項式の積に分解される。この分解は、定数倍と順序を除けば一意的である。

（証明）上の準備から、$f_1(x)(f_2(x)\cdots f_m(x))$ 、$(f_2(x)\cdots f_m(x))$ を $g(x)$ と考えれば、$f_1(x)$ が $p(x)$ で割り切れないなら、$(f_2(x)\cdots f_m(x))$ は $g(x)$ で割り切れるはずである。これを繰り返していけば、いつかは割り切れる $f_i(x)$ が見つかるはずである。イ）証明終

ロ） イ）から各因数が既約になるまで分解できるので $f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$ ， $f(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x)$ 二通りのかたちに既約因数に分解できたとする。

$p_1(x)$ は既約因数なので、イ）より、$q_1(x)$ , $q_2(x)$ , $\cdots$ , $q_n(x)$ の中に少なくても1つは $p_1(x)$ で割り切れるものがある。

そこで、それが $q_1(x)$ だとしたら、$q_1(x)$ も既約なので、$p_1(x)$ で割った商は 0 でない定数のはずである。( $q_1(x)=c(x)p_1(x)$ であったとしたら、$q_1(x)$ が既約

であることに反する。)

したがって、$q_1(x)=c_1p_1(x)$ （ $c_1$ は 0 でない定数 ）とおくと

$p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)=c_1p_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x)$

$p_2(x)\cdots p_m(x)=c_1q_2(x)\cdots q_n(x)$

を得る。

同じように、$p_2(x)$ で割り切れる因数がある。それを $q_2(x)$ とすれば、同様に $q_2(x)=c_2p_2(x)$ （ $c_2$ は 0 でない定数 ）とおくことができる。よって

$p_3(x)\cdots p_m(x)=c_1c_2q_3(x)\cdots q_n(x)$

この論法を繰り返していくと

$m<n$ のときは　$1=c_1c_2\cdots c_mq_{m+1}(x)\cdots q_n(x)$

$m>n$ のときは　$p_{n+1}(x)\cdots p_m(x)=c_1c_2\cdots c_n$

となって不合理が生ずる。　ゆえに $m=n$ である。したがって

$q_1(x)=c_1p_1(x)$ ， $q_2(x)=c_2p_2(x)$ , $\cdots$ , $q_m(x)=c_mp_m(x)$

となり、定数倍と順序を除いて一意的になる。

## （P．230　定理［2．1］代数学の基本定理）

（ｉ）$f(x)=x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}\right)$ （ $x\neq 0$ ）

十分大きい $R$ をとれば、$|x|>R$ ならば

$\dfrac{|a_0|}{2} > \left|\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}\right|$ とすることができる。つまり

$|f(x)| = \left|x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}\right)\right|$

$= |x^n|\left|a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}\right|$

$\geqq |x^n|\left(|a_0|-\left|\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}\right|\right) > |x^n|\left(|a_0|-\dfrac{|a_0|}{2}\right) = |x^n|\dfrac{|a_0|}{2}$ とすることができる。よって、任意の実数、たとえば $|f(0)|$ に対し、十分大きい $R'$ を取れば、$|x| > R' > R$ なるかぎり $|f(x)| > |f(0)|$

が成り立つ。複素変数の関数 $|f(x)|$ は連続関数なので、有界閉区間

$\{x \mid x \in C, |x| \leqq R'\}$ において最小値をもつ。つまり、複素平面全体で最小値をもつことになる。

（ⅱ）1点 $\alpha$ において $f(\alpha) \neq 0$ ならば、$|f(\beta)| < |f(\alpha)|$ となるような $\beta$ が存在する。

$g(x) = 1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$ , $b_n \neq 0$

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ のうち 0 でない最初のものを $b_m = re^{i\theta}$（$r > 0$ , $0 \leqq \theta < 2\pi$）

とし、$K = max(|b_{m+1}, \cdots, b_n|)$ とおく。

正の実数 $\rho$ を十分小さくとれば

$1-r\rho^m > 0$

$0 < r\rho^m - \dfrac{K\rho^{m+1}}{1-\rho} = \rho^m\left(r-\dfrac{K\rho}{1-\rho}\right) < \rho^m(r-K\rho) < r\rho^m < 1$

が成り立つ。$r = \rho e^{\frac{\pi-\theta}{m}i}$ と置けば

$b_m r^m = re^{i\theta}\cdot\left(\rho e^{\frac{\pi-\theta}{m}i}\right)^m = re^{i\theta}\cdot\rho^m e^{(\pi-\theta)i} = r\rho^m\cdot(-1) = -r\rho^m$

$|g(r)| = |1+b_1r+b_2r^2+\cdots+b_mr^m+\cdots+b_nr^n|$

$\leqq |1-r\rho^m|+|b_{m+1}r^{m+1}+\cdots+b_nr^n|$

$\leqq |1-r\rho^m|+K|r^{m+1}+\cdots+r^n|$

$\leqq |1-r\rho^m|+K(\rho^{m+1}+\cdots+\rho^n)$ ← $\left(|r| = \left|\rho e^{\frac{\pi-\theta}{m}i}\right| = \rho\right)$

$\leqq 1-r\rho^m+K\dfrac{\rho^{m+1}-\rho^{n+1}}{1-\rho} < 1-r\rho^m+K\dfrac{\rho^{m+1}}{1-\rho} < 1$

$$
\begin{array}{l}
s = \rho^{m+1} + \rho^{m+2} + \cdots + \rho^{n} \\
\rho s = \rho^{m+2} + \rho^{m+3} + \cdots + \rho^{n+1}
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{l}
s(1-\rho) = \rho^{m+1} - \rho^{n+1} \\
s = \dfrac{\rho^{m+1} - \rho^{n+1}}{1-\rho}
\end{array}
$$

が成り立つ。$\beta = r + \alpha$ とすれば

$$|g(r)| = \frac{|f(r+\alpha)|}{|f(\alpha)|} < 1 \quad \rightarrow \quad |f(\beta)| < |f(\alpha)|$$ となる。

(iii)(i)により、複素平面全体で $|f(x)|$ の最小値があるので、それを $|f(\alpha)|$ とすれば、$|f(\alpha)| \neq 0$ ならば、(ii)から、$|f(\beta)| < |f(\alpha)|$ となる $\beta$ が存在する。よって、$|f(\alpha)| = 0$ でなければならない。

## (P. 232 系[2. 4] これは使える定理だ!)

2つの $n$ 次以下の多項式関数 $f(x)$, $g(x)$ が $n+1$ 個の相異なる複素数 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\cdots$, $\alpha_{n+1}$に対して等しい値をもてば、$f(x) = g(x)$ である。

## (P. 233 定理[2. 5])

多項式のノルムを次の様に定義する。

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

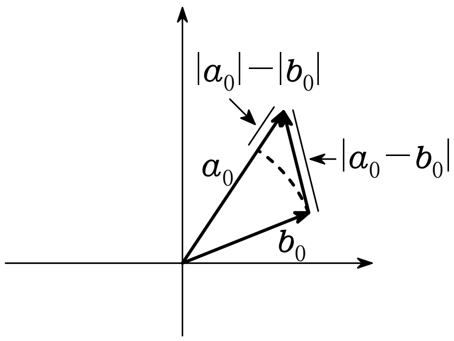
$\| f(x) \| = \| f(x) \|_{\infty} = max(|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|)$

$\alpha$ が $n$ 次方程式 $f_0(x) = 0$ の根であるとき、任意の正数 $\varepsilon$ に対し、十分小さい整数 $\delta$ をとると、$\| f - f_0 \| < \delta$ なる任意の $n$ 次多項式は、$|\beta - \alpha| < \varepsilon$ となるような零点 $\beta$ をもつ。

(証明) $f_0(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ , $f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$\| f - f_0 \| = max(|a_0 - b_0|, |a_1 - b_1|, \cdots, |a_n - b_n|) < \delta$ ならば

$|a_0| - |b_0| \leqq |a_0 - b_0| < \delta \rightarrow |a_0| - \delta < |b_0|$




したがって、十分小さい $\delta$ をとれば、正確には

$\delta < \dfrac{|a_0|}{2}$ ならば $\dfrac{|a_0|}{2} < |b_0|$

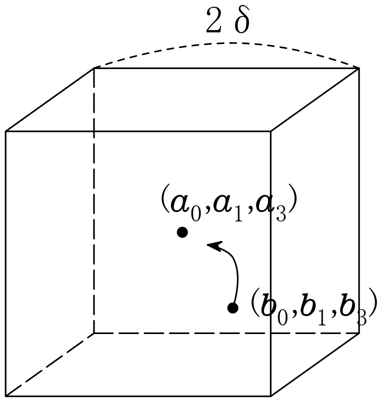
とすることができる。また

$|f(\alpha)| = |f(\alpha) - f_0(\alpha)|$ は $b_0$, $b_1$, $\cdots$, $b_n$

の連続関数なので、より十分小さいδをとれば

$$|f(\alpha)| = |f(\alpha)-f_0(\alpha)| < \frac{|a_0|}{2}\varepsilon^n$$

とすることができる。




すると、$\beta_1, \cdots, \beta_n$ を $f(x)$ の零点として

$|f(\alpha)|$

$= |b_0||\alpha-\beta_1||\alpha-\beta_2|\cdots|\alpha-\beta_n|$

$< \dfrac{|a_0|}{2}\varepsilon^n$

$$|\alpha-\beta_1||\alpha-\beta_2|\cdots|\alpha-\beta_n| < \frac{|a_0|}{2|b_0|}\varepsilon^n < \varepsilon^n$$

よって、少なくとも1つの $j$ に対して $|\alpha-\beta_j| < \varepsilon$ とならなければならない。

## (P. 234　定理[2. 8])

$\overline{\alpha\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}\alpha = \alpha\overline{\alpha}$ なので $\alpha\overline{\alpha}$ は実数である。

# 佐武一郎　線型代数学に戻る。

## (P. 143　定理1　*Hamilton-Cayley* の定理)

$$xE-A = \begin{pmatrix} x-a_{11} & & \cdots & -a_{1n} \\ & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{pmatrix}$$

の余因子 $\Delta_{ij}$ を $(i, j)$ 成分とする行列 $B$ を

P. 61にならって次の様にする。

$$B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

(24’’) から ${}^tB(xE-A) = (xE-A){}^tB = |xE-A|E$

また、$\Delta_{ij}$ は $x$ の $(n-1)$ 次式なので

$$\Delta_{ij} = b_{ij,0}x^{n-1} + b_{ij,1}x^{n-2} + \cdots + b_{ij,n-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11,0}x^{n-1}+\cdots+b_{11,n-1} & b_{12,0}x^{n-1}+\cdots+b_{12,n-1} & \cdots & b_{1n,0}x^{n-1}+\cdots+b_{1n,n-1} \\ b_{21,0}x^{n-1}+\cdots+b_{21,n-1} & b_{22,0}x^{n-1}+\cdots+b_{22,n-1} & \cdots & b_{2n,0}x^{n-1}+\cdots+b_{2n,n-1} \\ & & \cdots & \\ b_{n1,0}x^{n-1}+\cdots+b_{n1,n-1} & b_{n2,0}x^{n-1}+\cdots+b_{n2,n-1} & \cdots & b_{nn,0}x^{n-1}+\cdots+b_{nn,n-1} \end{pmatrix}$$

転置すると

$${}^tB = \begin{pmatrix} b_{11,0}x^{n-1}+\cdots+b_{11,n-1} & b_{21,0}x^{n-1}+\cdots+b_{21,n-1} & \cdots & b_{n1,0}x^{n-1}+\cdots+b_{n1,n-1} \\ b_{12,0}x^{n-1}+\cdots+b_{12,n-1} & b_{22,0}x^{n-1}+\cdots+b_{22,n-1} & \cdots & b_{n2,0}x^{n-1}+\cdots+b_{n2,n-1} \\ & & \cdots & \\ b_{1n,0}x^{n-1}+\cdots+b_{1n,n-1} & b_{2n,0}x^{n-1}+\cdots+b_{2n,n-1} & \cdots & b_{nn,0}x^{n-1}+\cdots+b_{nn,n-1} \end{pmatrix}$$

$B_k = {}^t(b_{ij,k})$ とおけば

$$(b_{ij,k}) = \begin{pmatrix} b_{11,k} & b_{12,k} & \cdots & b_{1n,k} \\ b_{21,k} & b_{22,k} & \cdots & b_{2n,k} \\ & & \cdots & \\ b_{n1,k} & b_{n2,k} & \cdots & b_{nn,k} \end{pmatrix} \rightarrow B_k = {}^t(b_{ij,k}) = \begin{pmatrix} b_{11,k} & b_{21,k} & \cdots & b_{n1,k} \\ b_{12,k} & b_{22,k} & \cdots & b_{n2,k} \\ & & \cdots & \\ b_{1n,k} & b_{2n,k} & \cdots & b_{nn,k} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow {}^tBB = B\,{}^tB = |B|E} \quad \leftarrow \text{Ⅱ章（24''）}$$

Ⅱ章（24''）から

$$|xE-A|\cdot E = (xE-A)(x^{n-1}B_0+x^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})$$
$$= (x^{n-1}B_0+x^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})(xE-A)$$

後半の等式の両辺を展開すると、任意の $x$ について等号が成り立つので

$Ax^{n-k}B_{k-1} = x^{n-k}B_{k-1}A$　つまり　$AB_{k-1} = B_{k-1}A$　となる。

よって、$B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$ は $A$ と交換可能である。ここで、変数 $x$ に行列 $A$ を代入すれば

$$f_A(A)\cdot E = f_A(A) = (A-A)(A^{n-1}B_0+A^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}) = 0$$

を得る。

（注意）

$$|xE-A|\cdot E = (xE-A)(x^{n-1}B_0+x^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})$$
$$= (x^{n-1}B_0+x^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})(xE-A)$$

は確かに成り立つ。しかし、$x$ はスカラーであって、行列ではない。しかし、行列係数と交換可能な $A$ だから代入できるのであって、何でもよいというわけではない。$xA = Ax$ だが、$x$ に代入できる行列は $A$ と交換可能なものだけである。$ax = xa$ のようにスカラー係数の等式ならば $x$ に行列 $A$ を代入しても問題ない。

## （P. 144　問3 …左側剰余定理）

$f(x) = x^n A_0 + x^{n-1} A_1 + \cdots + A_n$ が $xE - C$ で左側から割り切れるとすれば

$f(x) = (xE - C)\,g(x)$ となるような行列係数の多項式が存在する。

$g(x) = \sum_{j=0}^{m} x^j B_j$（$m$ は $n$ より十分大）とおけば

$x^n A_0 + x^{n-1} A_1 + \cdots + x^i A_{n-i} + \cdots + A_n$

$= (xE - C)(x^m B_m + x^{m-1} B_{m-1} + \cdots + x^{n+1} B_{n+1} + x^n B_n + x^{n-1} B_{n-1} + \cdots + x^{i+1} B_{i+1} + x^i$

$B_i + x^{i-1} B_{i-1} + \cdots + x B_1 + B_0)$

$= x^{m+1} B_m + x^m B_{m-1} + \cdots + x^{n+2} B_{n+1} + x^{n+1} B_n + x^n B_{n-1} + \cdots + x^{i+2} B_{i+1} + x^{i+1} B_i + x^i$

$B_{i-1} + \cdots + x^2 B_1 + x B_0 - x^m C B_m - x^{m-1} C B_{m-1} - \cdots - x^{n+1} C B_{n+1} - x^n C B_n - x^{n-1} C B_{n-1}$

$- \cdots - x^{i+1} C B_{i+1} - x^i C B_i - x^{i-1} C B_{i-1} - \cdots - x C B_1 - C B_0$

$= x^{m+1} B_m + x^m B_{m-1} - x^m C B_m + \cdots + x^{n+1} B_n - x^{n+1} C B_{n+1} + x^n B_{n-1} - x^n C B_n + \cdots + x^{i+1}$

$B_i - x^{i+1} C B_{i+1} + x^i B_{i-1} - x^i C B_i + \cdots + x B_0 - x C B_1 - C B_0$

$$\boxed{\begin{aligned} &= x^{m+1} B_m + x^m (B_{m-1} - C B_m) + \cdots + x^{n+1} (B_n - C B_{n+1}) + x^n (B_{n-1} - C B_n) + \cdots \\ &+ x^{i+1} (B_i - C B_{i+1}) + x^i (B_{i-1} - C B_i) + \cdots + x (B_0 - C B_1) - C B_0 \\ &= x^n A_0 + x^{n-1} A_1 + \cdots + x^i A_{n-i} + \cdots + A_n \end{aligned}}$$

$x^i$ の行列係数を比べてみれば

$A_n = -C B_0$ … ①

$A_{n-i} = B_{i-1} - C B_i$（$1 \leqq i \leqq n$）… ②

$0 = B_{i-1} - C B_i$（$n+1 \leqq i \leqq m$）… ③

$0 = B_m$ … ④

したがって、④を③に代入して、$B_{m-1} = 0$ , $B_{m-2} = 0$ , … , $B_n = 0$　次から②に代入し

$A_0 = B_{n-1} - 0 = B_{n-1}$ , $A_1 = (B_{n-2} - C B_{n-1})$ , … , $A_{n-1} = (B_0 - C B_1)$ , $A_n = (-C B_0)$

これを $C^nA_0+C^{n-1}A_1+\cdots+CA_{n-1}+A_n$ に代入すると

$C^nA_0+C^{n-1}A_1+\cdots+CA_{n-1}+A_n$

$=C^nB_{n-1}+C^{n-1}(B_{n-2}-CB_{n-1})+\cdots+C(B_0-CB_1)+(-CB_0)=0$

となる。

## (P.144　例3)

冪零行列の固有値は 0 である。なぜなら

$A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\to A^2\boldsymbol{x}=\alpha A\boldsymbol{x}=\alpha^2\boldsymbol{x}\to\cdots\to A^\nu\boldsymbol{x}=\alpha^\nu\boldsymbol{x}=0$

$\boldsymbol{x}\neq 0$ なので $\alpha=0$ となる。

$c_0\boldsymbol{x}+c_1A\boldsymbol{x}+c_2A^2\boldsymbol{x}+\cdots+c_{i_0}A^{i_0}\boldsymbol{x}+\cdots+c_{\nu-1}A^{\nu-1}\boldsymbol{x}=0$

$c_{i_0}\neq 0$ とする。両辺に $A^{\nu-1-i_0}$ をかけると、$c_{i_0}$ は $\neq 0$ なる最初のものだったので

$A^{\nu-1-i_0}(c_0\boldsymbol{x}+c_1A\boldsymbol{x}+c_2A^2\boldsymbol{x}+\cdots+c_{i_0}A^{i_0}\boldsymbol{x}+\cdots+c_{\nu-1}A^{\nu-1}\boldsymbol{x})=0$

$0+0+0+\cdots+A^{\nu-1-i_0}c_{i_0}A^{i_0}\boldsymbol{x}+\cdots+0=0$

$c_{i_0}A^{\nu-1}\boldsymbol{x}=0$ となり、$c_{i_0}\neq 0$ だったので、$A^{\nu-1}=0$ となり矛盾する。また

$c_0+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_{i_0}A^{i_0}+\cdots+c_{\nu-1}A^{\nu-1}\neq 0$ から $A$ が $\nu-1$ 次以下のスカラー係数の方程式を満足しないことがわかる。

簡単な事実だが、対角成分がすべて 0 の三角行列は冪零行列である。また、$P$ が正則行列で $P^{-1}AP$ が冪零行列ならば $A$ は冪零行列である。( $(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP=0\leftrightarrow A^k=0$ )

## (P.144　最小多項式)

※) $n$ 次行列全体の作るベクトル空間の中で十分多くの $A$ の冪 $E, A, A^2, A^3, \cdots, A^m$ を考えれば、それらは必ず自明ではない一次関係を満足するはずである。なぜなら、$n^2$ 次元のベクトル空間なのでそれ以上の一次独立であることはありえないからである。

◎ $n$ 次行列 $A$ に対して、$f(A)=0$ となるようなスカラー係数の多項式 $f(x)$ の中、次数が最小(かつ最高次の係数が 1 )なるものを行列 $A$ の最小多項式 $\phi_A(x)$ という。

(補題1) $f(A)=0$ となるようなスカラー係数の多項式 $f(x)$ はすべて $\phi_A(x)$ で割り切れる。

(証明) $f(x)=g(x)\phi_A(x)+h(x)$　( $h(x)$ の次数 < $\phi_A(x)$ の次数 ) とする。

$x$ に $A$ を代入すれば、$f(A)=g(A)\phi_A(A)+h(A)$ だから $h(A)=0$

よって、最小多項式の定義から $h(x)=0$ でなければならない。

したがって、**固有多項式は最小多項式で割り切れる。**

（補題2） $\alpha$ が $A$ の固有値ならば、$\phi_A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる。

（証明） $\alpha$ に対する1つの固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \neq 0$ とすれば、$A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ から

$\phi_A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ とおけば

$\phi_A(A)\boldsymbol{x}=(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m)\boldsymbol{x}$

$=a_0\boldsymbol{xE}+a_1\boldsymbol{Ax}+a_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}$

$=a_0\boldsymbol{x}+a_1\alpha\boldsymbol{x}+a_2\alpha^2\boldsymbol{x}+\cdots+a_m\alpha^m\boldsymbol{x}$

$=(a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_m\alpha^m)\boldsymbol{x}$

$=\phi_A(\alpha)\boldsymbol{x}$

$\phi_A(A)\boldsymbol{x}=\phi_A(\alpha)\boldsymbol{x}=0$ よって、$\phi_A(\alpha)=0$

別証について、代数学講義（高木貞治　著）P．42　3 に移動！

$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ とおくとき、$f(z)$ を $(z-\alpha)$ で割るとき、

商 $f_1(z)=q_0z^{n-1}+q_1z^{n-2}+\cdots+q_{n-1}$ の係数と剰余 $A=f(\alpha)$ は

$(z-\alpha)(q_0z^{n-1}+q_1z^{n-2}+q_2z^{n-3}+q_3z^{n-4}+\cdots+q_{n-2}z+q_{n-1})$

$=q_0z^n+(q_1-\alpha q_0)z^{n-1}+(q_2-\alpha q_1)z^{n-2}+\cdots+(q_{n-1}-\alpha q_{n-2})z-\alpha q_{n-1}$

$q_0=a_0$ , $q_1=\alpha q_0+a_1$ , $q_2=\alpha q_1+a_2$ , $\cdots$ , $q_{n-1}=\alpha q_{n-2}+a_{n-1}$ となり、$q_0$ から $q_{n-1}$ まで求めることができる。そして、

$f(z)-(z-\alpha)f_1(z)=a_n-(-\alpha q_{n-1})=a_n+\alpha q_{n-1}$

$a_n+\alpha q_{n-1}$ が剰余なので、$A=f(\alpha)=a_n+\alpha q_{n-1}$ となる。

また、$q_0=a_0 \to q_1=\alpha a_0+a_1 \to q_2=\alpha(\alpha a_0+a_1)+a_2=\alpha^2a_0+\alpha a_1+a_2$

$\to q_3=\alpha(\alpha^2a_0+\alpha a_1+a_2)+a_3=\alpha^3a_0+\alpha^2a_1+\alpha a_2+a_3$

$\to\cdots\to q_{n-1}=\alpha^{n-1}a_0+\alpha^{n-2}a_1+\cdots+a_{n-1}\to A=\alpha^na_0+\alpha^{n-1}a_1+\cdots+a_n=f(\alpha)$

まとめると、$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ , $f_i(z)=a_0z^i+a_1z^{i-1}+\cdots+a_i$ とおけば

$f(z)-f(\alpha)=(z-\alpha)(f_0(\alpha)z^{n-1}+\cdots+f_i(\alpha)z^{n-i-1}+\cdots+f_{n-1}(\alpha))$

代数学講義（高木貞治　著）P．334（注意）

上の結果を固有多項式に適用すれば、$f_i^{(A)}(x)=a_0x^i+a_1x^{i-1}+\cdots+a_i$ とおいて

$f_A(x)-f_A(\beta)=(x-\beta)(f_0^{(A)}(\beta)x^{n-1}+\cdots+f_i^{(A)}(\beta)x^{n-i-1}+\cdots+f_{n-1}^{(A)}(\beta))$

この等式はスカラー係数の等式なので、$\beta$ に行列 $A$ を代入してもよい。また、$f_A(A)=0$ から

$f_A(x)E=(xE-A)(f_0^{(A)}(A)x^{n-1}+\cdots+f_i^{(A)}(A)x^{n-i-1}+\cdots+f_{n-1}^{(A)}(A))$

（別証）同様に、最小多項式に応用すれば

$\phi_A(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$ とすれば、

$\phi_A(x)-\phi_A(\beta)=(x-\beta)(\phi_0^{(A)}(\beta)x^{m-1}+\cdots+\phi_i^{(A)}(\beta)x^{m-i-1}+\cdots+\phi_{m-1}^{(A)}(\beta))$

スカラー係数の等式なので、$\beta$ に行列 $A$ を代入してもよい。$\phi_A(A)=0$ だったので、

$\phi_A(x)E=(xE-A)(\phi_0^{(A)}(A)x^{m-1}+\cdots+\phi_i^{(A)}(A)x^{m-i-1}+\cdots+\phi_{m-1}^{(A)}(A))$

したがって、$\phi_A(x)E=(xE-A)D(x)$ とおいて、両辺の行列式をとれば

$\phi_A(x)^n=|xE-A||D(x)|=f_A(x)|D(x)|$

ゆえに、$\phi_A(x)^n$ は $f_A(x)$ で割り切れる。つまり、固有値 $\alpha$ に対し、$x-\alpha$ で割り切れる。

線型代数縫う門（齋藤正彦P．229　定理［1．8］イ）から $\phi_A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる。

## 佐武一郎　線型代数学に戻る。

## （P．145　注意）

$B(x)=\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-i-1}B_i$

$B(x)$

$$=\begin{pmatrix} b_{11,0}x^{n-1}+\cdots+b_{11,n-1} & b_{21,0}x^{n-1}+\cdots+b_{21,n-1} & \cdots & b_{n1,0}x^{n-1}+\cdots+b_{n1,n-1} \\ b_{12,0}x^{n-1}+\cdots+b_{12,n-1} & b_{22,0}x^{n-1}+\cdots+b_{22,n-1} & \cdots & b_{n2,0}x^{n-1}+\cdots+b_{n2,n-1} \\ & & \cdots & \\ b_{1n,0}x^{n-1}+\cdots+b_{1n,n-1} & b_{2n,0}x^{n-1}+\cdots+b_{2n,n-1} & \cdots & b_{nn,0}x^{n-1}+\cdots+b_{nn,n-1} \end{pmatrix}$$

の $n^2$ 個の成分の最大公約数を $\phi(x)$ , $B^*(x)=\dfrac{1}{\phi(x)}B(x)$ とすれば、右辺は割り切れる。

定理1では、$|xE-A|E=(xE-A)B(x)$ だったので、$|xE-A|E=\phi(x)(xE-A)B^*(x)$

左辺は $f_A(x)$ を対角成分にもつ対角行列なので右辺の $(xE-A)B^*(x)$ も同じ多項式が並ぶ対角行列になっているはずである。よって、その $\phi(x)$ 倍が $f_A(x)$ なので、$\phi(x)$ は $f_A(x)$ を割り切る。$\dfrac{f_A(x)}{\phi(x)}=g(x)$ とすれば、

$$(\,xE-A\,)^{-1} = \frac{1}{f_A(x)}B(x) = \frac{1}{\phi(x)g(x)}\phi(x)B^*(x) = \frac{1}{g(x)}B^*(x)$$

この $g(x)$ は $g(A) = 0$ となる。なぜなら、

$|\,xE-A\,|\cdot E = (\,xE-A\,)B(x) = B(x)(\,xE-A\,)$

$$g(x)E = \frac{|\,xE-A\,|}{\phi(x)}E = \frac{1}{\phi(x)}(\,xE-A\,)B(x) = \frac{1}{\phi(x)}B(x)(\,xE-A\,) = (\,xE-A\,)B^*(x)$$

$= B^*(x)(\,xE-A\,)$

$(\,xE-A\,)$ と $B^*(x)$ は交換可能であるから、$x$ に $A$ を代入してもよい。

よって、$g(A) = 0$ を得る。

$g(x)$ の次数が $f_A(x)$ の次数以下であることは間違いない。実は $g(x)$ は $A$ の最小多項式 $\phi_A(x)$ の定数倍に等しい。

代数学講義（高木貞治　著）P．335 の証明を丸写しすると、

任意の多項式 $f(x)$ に関する恒等式

$f(y)-f(x) = (\,x-y\,)h(x\,,y)$

と書ける。なぜなら、$x$ に $y$ を代入すると 0 のなるので $(\,x-y\,)$ で割り切れるからである。

この等式はスカラー係数の恒等式なので、$y$ に行列 $A$ を代入することができる。

$f(A)-f(x)E = (\,xE-A\,)h(x\,,A)$ を得る。ゆえにもし $f(A) = 0$ ならば

$-f(x)E = (\,xE-A\,)h(x\,,A)$

$f(x)(xE-A)^{-1} = -h(x\,,A)$

この等式からわかることは、$(xE-A)^{-1} = \dfrac{1}{g(x)}B^*(x)$ なので、それに $f(x)$ を乗じたときに分母が払われる必要がある。つまり、$f(x)$ は $g(x)$ で割り切らねばならない。（もし、割り切れなかったら $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{n(x)}{m(x)}$ とおいたとき、$B^*(x)$ のすべての成分は $m(x)$ で割り切れなければならない。しかし、それでは最大公約数 $\phi(x)$ で割られたことに矛盾する。）

$\phi_A(A) = 0$ である。よって、$\phi_A(x)$ は $g(x)$ で割り切ることができる。しかし、定義から $\phi_A(x)$ は $\phi_A(A) = 0$ となる最低次の多項式なので $g(x) = k\phi_A(x)$ となる。

上の別証に出てきた　$\phi_A(x)E = (\,xE-A\,)D(x)$ の $D(x)$ は $B^*(x)$ の定数倍に等しいことになる。

（P. 145　問4）

$f(x) = \phi_A(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$ とすれば

$\phi_A(P^{-1}AP)$

$= a_0(P^{-1}AP)^k + a_1(P^{-1}AP)^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(P^{-1}AP) + a_kE$

ここで、$(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$ なので

$= a_0P^{-1}A^kP + a_1P^{-1}A^{k-1}P + \cdots + a_{k-1}P^{-1}AP + a_kE$

$= P^{-1}(\ a_0A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A + a_kE\ )P$

$= P^{-1}\phi_A(A)P = 0$

$f(P^{-1}AP) = 0$　なので、$\phi_{P^{-1}AP}(x)$ で $\phi_A(x)$ を割り切ることができる。

$g(x) = \phi_{P^{-1}AP}(x) = b_0x^\ell + b_1x^{\ell-1} + \cdots + b_{\ell-1}x + b_\ell$ とすれば

$\phi_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP)$

$= b_0(P^{-1}AP)^\ell + b_1(P^{-1}AP)^{\ell-1} + \cdots + b_{\ell-1}(P^{-1}AP) + b_\ell E$

$= P^{-1}(\ b_0A^\ell + b_1A^{\ell-1} + \cdots + b_{\ell-1}A + b_\ell E\ )P$

$= 0$

よって、$g(A) = b_0A^\ell + b_1A^{\ell-1} + \cdots + b_{\ell-1}A + b_\ell E = 0$ なので $\phi_A(x)$ で $\phi_{P^{-1}AP}(x)$ を割り切ることができる。

したがって、最小多項式の最高次の係数が 1 ということから、等しいことがわかる。また後半は、

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$$ なので

$\phi_A(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$ とすれば

$\phi_A(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A + a_kE = 0$　なので

$$\phi_A(A) = \begin{pmatrix} a_0A_1^k & 0 \\ 0 & a_0A_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1A_1^{k-1} & 0 \\ 0 & a_1A_2^{k-1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ 0 & a_k \end{pmatrix}$$

$$\phi_A(A) = \begin{pmatrix} \phi_A(A_1) & 0 \\ 0 & \phi_A(A_2) \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow\ \phi_A(A_1) = 0\ ,\ \phi_A(A_2) = 0$$

よって、$\phi_{A_1}(x)$，$\phi_{A_2}(x)$ で $\phi_A(x)$ を割り切ることができる。←（添字の位置に注意！）

逆に $\phi(x)$ が $\phi_{A_1}(x)$，$\phi_{A_2}(x)$ で割り切ることができるならば

$\phi(A)=\begin{pmatrix}\phi(A_1) & 0\\ 0 & \phi(A_2)\end{pmatrix}=0$ よって、$\phi(x)$ は $\phi_A(x)$ で割り切れる。

まとめると $\phi(x)$ が $\phi_{A_1}(x)$，$\phi_{A_2}(x)$ の公倍数ならば、$\phi_A(x)$ で割り切れることができるので、$deg\ \phi(x) \geqq deg\ \phi_A(x)$ つまり、$\phi_A(x)$ の次数は最小であることがわかる。故に、最小多項式

は最小公倍数となる。

## （P．146　例4）

$n$ 次行列 $A$ に関する次の3つの条件は同値である。

1）$A$ は対角行列に相似である。

2）$A$ の最小多項式 $\phi_A(x)$ は重根を持たない。

3）$V$ は固有空間の直和に分解される。

（証明）

1）→2）$\phi_{P^{-1}AP}(x)=\phi_A(x)$ であるから、最初から $A$ が対角行列であるとしてよい。$A$ の対角成分のうち相異なるものを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ とすれば、対角行列の積は対角行列であるから

$(A-\alpha_1 E)(A-\alpha_2 E)\cdots(A-\alpha_s E)$

$$=\begin{pmatrix}0 &&&&&&&&&& 0\\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 0 &&&&&&&& \\ &&& \alpha_2-\alpha_1 &&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&& \alpha_2-\alpha_1 &&&&& \\ &&&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&&& \alpha_s-\alpha_1 &&& \\ &&&&&&&& \ddots && \\ 0 &&&&&&&&& & \alpha_s-\alpha_1\end{pmatrix}\cdots$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_s &&&&&&&&& 0\\ & \ddots &&&&&&&& \\ && \alpha_1-\alpha_s &&&&&&& \\ &&& \alpha_2-\alpha_s &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& \alpha_2-\alpha_s &&&& \\ &&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&& 0 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ 0 &&&&&&&&& 0\end{pmatrix}=0$$

よって、$\phi(x)=\prod_{i=0}^{s}(x-\alpha_i)$ とおけば、$\phi(A)=0$ である。したがって、$\phi_A(x)$ は $\phi(x)$ の約数である。よって、$\phi_A(x)$ は重根を持たない。

2)→3) $f_A(x)$ の因数分解は、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ が相異なる固有値のとき

$f_A(x)=(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_s)^{n_s}$ とする。そのとき、$\phi_A(x)$ は

$\phi_A(x)=(x-\alpha_1)^{\nu_1}(x-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(x-\alpha_s)^{\nu_s}$

ただし、$1\leqq\nu_i\leqq n_i\ (1\leqq i\leqq s)$ の形になる。

なぜなら、$\phi_A(x)$ は $f_A(x)$ の約数であり、$f_A(x)$ の任意の解は $\phi_A(x)$ の解である。したがって上のような形でなければならない。

よって、$\phi_A(x)$ が重根を持たなければ、$\phi_A(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)$ となる。$x$ に $A$ を代入すれば、

$(A-\alpha_1E)(A-\alpha_2E)\cdots(A-\alpha_sE)=0$ となる。

P. 113例2から、$n$ 次正方行列 $A, B$ に対し、$rank\,A+rank\,B-n\leqq rank\,AB$ なので、$n$ 次正方行列 $C$ があった場合

$rank\,ABC\geqq rank\,AB+rank\,C-n\geqq rank\,A+rank\,B+rank\,C-2n$

よって

$rank(A-\alpha_1E)(A-\alpha_2E)\cdots(A-\alpha_sE)=0\geqq\sum_{i=1}^{s}(A-\alpha_iE)-(s-1)n$

$0\geqq\sum_{i=1}^{s}rank(A-\alpha_iE)-(s-1)n=\sum_{i=1}^{s}rank(A-\alpha_iE)-sn+n$

$sn-\sum_{i=1}^{s}rank(A-\alpha_iE)\geqq n$

$\sum_{i=1}^{s}(n-rank(A-\alpha_iE))\geqq n$

固有空間の定義から $W_{\alpha_i}=\{x\,;(A-\alpha_iE)x=0\}$ であるから、P. 109定理7より

$dim\,f(V^n)=n-dim\,f^{-1}(0)$、$rank\,f$ は $f$ の像の次元なので、$f^{-1}(0)=W_{\alpha_i}$ と考え

$rank(A-\alpha_iE)=n-dim\,W_{\alpha_i}\ \rightarrow\ dim\,W_{\alpha_i}=n-rank(A-\alpha_iE)$

よって

$dim\,W_{\alpha_1}+dim\,W_{\alpha_2}+\cdots+dim\,W_{\alpha_s}\geqq n$

また、P. 141例1から、相異なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立なので、$W_{\alpha_1}+W_{\alpha_2}+\cdots+W_{\alpha_s}$ は直和である。

なぜなら、任意の元 $x\in W_{\alpha_1}+W_{\alpha_2}+\cdots+W_{\alpha_s}$ に対し、

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\alpha_1} + \boldsymbol{x}_{\alpha_2} + \cdots + \boldsymbol{x}_{\alpha_k} = \boldsymbol{x}'_{\alpha_1} + \boldsymbol{x}'_{\alpha_2} + \cdots + \boldsymbol{x}'_{\alpha_k}$ （$\boldsymbol{x}_{\alpha_i}, \boldsymbol{x}'_{\alpha_i} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_i}$）とすれる。

$\boldsymbol{x}_{\alpha_i} - \boldsymbol{x}'_{\alpha_i} = \boldsymbol{x}''_{\alpha_i}$ とおけば、$\boldsymbol{x}''_{\alpha_1} + \boldsymbol{x}''_{\alpha_2} + \cdots + \boldsymbol{x}''_{\alpha_k} = 0$ （$\boldsymbol{x}''_{\alpha_i} \in \boldsymbol{W}_{\alpha_i}$）

ここで、一つでも $\boldsymbol{x}''_{\alpha_i} \neq 0$ となるものが存在したとすれば、一次独立であることと右辺が 0 であることに矛盾するから $\boldsymbol{x}$ は一意的に表現されることになる。よって、直和となる。

よって、$W_{\alpha_1} + W_{\alpha_2} + \cdots + W_{\alpha_s} \subset V$ なので

$dim\ W_{\alpha_1} + dim\ W_{\alpha_2} + \cdots + dim\ W_{\alpha_s} = dim(W_{\alpha_1} + W_{\alpha_2} + \cdots + W_{\alpha_s}) \leqq n$

したがって、$V = W_{\alpha_1} \dot{+} W_{\alpha_2} \dot{+} \cdots \dot{+} W_{\alpha_s}$ となる。

3）→1） $V$ が固有空間 $W_{\alpha_i}$ の直和になれば、$V$ の底として固有ベクトルばかりからなるものをとることができる。$dim\ W_{\alpha_i} = n_i$ として、その底を $\boldsymbol{a}_{\alpha_i 1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_i n_i}$ とすれば　$\boldsymbol{a}_{\alpha_1 1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_1 n_1}, \boldsymbol{a}_{\alpha_2 1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_2 n_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_s 1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_s n_s}$ を $V$ の底とすることができる。

そのとき $A\boldsymbol{a}_{\alpha_i k} = \alpha_i \boldsymbol{a}_{\alpha_i k}$ （$1 \leqq k \leqq n_i$）

$A(\boldsymbol{a}_{\alpha_1 1}, \boldsymbol{a}_{\alpha_2 2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_s n_s})$

$$= (\boldsymbol{a}_{\alpha_1 1}, \boldsymbol{a}_{\alpha_2 2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_s n_s}) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & & & \\ & & & \alpha_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \alpha_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \alpha_s & \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \alpha_s \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{a}_{\alpha_1 1}, \boldsymbol{a}_{\alpha_2 2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\alpha_s n_s}) = P$（固有ベクトルを列ベクトルとする）とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & & & \\ & & & \alpha_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \alpha_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \alpha_s & \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \alpha_s \end{pmatrix}$$

となる。

対角化可能 $A$ , $B$ に対して $A \sim B \Rightarrow f_A = f_B$ は明らかであるが、$f_A = f_B \Rightarrow A \sim B$ である。

なぜなら、ある正則行列 $P$ , $Q$ があって、$P^{-1}AP$ , $Q^{-1}BQ$ が対角行列になったとする。$f_{P^{-1}AP} = f_A = f_B = f_{Q^{-1}BQ}$ なので

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ \to AP = PQ^{-1}BQ \to A = PQ^{-1}BQP^{-1} = (QP^{-1})^{-1}B(QP^{-1})$$

$A^2 = A$ ならば $A^2 - A = 0$ なので、最小多項式は $x^2 - x = x(x-1)$ の約数になる。よって、重解を持たない。

$A^{\nu} = E$ ならば 同様に $x^{\nu} - 1$ の約数が最小多項式となる。

$x^{\nu} - 1 = \prod_{i=0}^{\nu-1}(x - \zeta_{\nu}^{i})$ （参照 P. 30）つまり重根を持たない。

## （P. 141 $A$ －不変）

$V^n$ の部分空間 $W$ が $x \in W \Rightarrow Ax \in W$ となる性質を持つとき、$W$ は $A$ に関して $A$-不変であるという。

$V^n$ の底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が $W$ ( $m = dim\ W$ ) の底になるようにとる。この底に関して $A$ を表せば、一次変換なので

$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{a}_i$ （ $1 \leqq j \leqq n$ ）

「0」にする！

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}_1) &= a_{11}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,1}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{a}_n \\
f(\boldsymbol{a}_2) &= a_{12}\boldsymbol{a}_1 + a_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,2}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{a}_n \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{a}_m) &= a_{1m}\boldsymbol{a}_1 + a_{2m}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{mm}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,m}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{a}_n \\
f(\boldsymbol{a}_{m+1}) &= a_{1,m+1}\boldsymbol{a}_1 + a_{2,m+1}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m,m+1}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,m+1}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{n,m+1}\boldsymbol{a}_n \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{a}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{a}_1 + a_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m,n}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,n}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{a}_n
\end{aligned}$$

行列に表現すると転置されて

$f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

$$= (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{2n} \\
 & & \cdots & & & & \cdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \cdots & a_{mn} \\
0 & & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{m+1,n} \\
0 & & \cdots & 0 & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \cdots & a_{m+2,n} \\
 & & \cdots & & & & \cdots & \\
0 & & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(12)} \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}$$

よって、底の変換 $(\boldsymbol{e}_i) \to (\boldsymbol{a}_i)$ により

$$A \sim \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(12)} \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}$$

さらに $V^n$ が $A$-不変な2つの部分空間 $W_1$，$W_2$ の直和に分解されれば

$V^n$ の底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が $W_1$ ($m = dim\ W$) の底、 $\boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{a}_{m+2}$，$\cdots, \boldsymbol{a}_n$ が $W_2$ の底になるようにとることができる。すると、

$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{a}_i$ （$1 \leqq j \leqq n$）

「0」にする！

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}_1) &= a_{11}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,1}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{a}_n \\
f(\boldsymbol{a}_2) &= a_{12}\boldsymbol{a}_1 + a_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,2}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{a}_n \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{a}_m) &= a_{1m}\boldsymbol{a}_1 + a_{2m}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{mm}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,m}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{a}_n \\
f(\boldsymbol{a}_{m+1}) &= a_{1,m+1}\boldsymbol{a}_1 + a_{2,m+1}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m,m+1}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,m+1}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{n,m+1}\boldsymbol{a}_n \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{a}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{a}_1 + a_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{m,n}\boldsymbol{a}_m + a_{m+1,n}\boldsymbol{a}_{m+1} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{a}_n
\end{aligned}$$

行列に表現すると転置されて

$f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = A(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

$$= (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & & \cdots & 0 \\
 & & \cdots & & & & \cdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{m+1,n} \\
0 & & \cdots & 0 & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \cdots & a_{m+2,n} \\
 & & \cdots & & & & \cdots & \\
0 & & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}$$

よって、底の変換 $(\boldsymbol{e}_i) \to (\boldsymbol{a}_i)$ により

$$A \sim \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}$$ （$A^{(i)}$ は $A$ が $W_i$ にひきおこす一次変換）

## （P. 149　広い意味での固有空間）

ある（十分に大きいく1 以上の整数なら何でもよい） $\ell$ に対して

$(A-\alpha E)^{\ell}\boldsymbol{x}=0$

となるような $\boldsymbol{x}\in V^n$ 全体の集合は1つの $A$-不変な部分空間を作る。

それを広い意味での固有空間といい、$\widetilde{W}_\alpha$ で表す。

まず $A$-不変になることだが、任意の $\boldsymbol{x}\in\widetilde{W}_\alpha$ に対し

$(A-\alpha E)^{\ell}(A\boldsymbol{x})=(A-\alpha E)^{\ell}((A-\alpha E)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{x})$

$=(A-\alpha E)^{\ell+1}\boldsymbol{x}+(A-\alpha E)^{\ell}(\alpha\boldsymbol{x})$

$=(A-\alpha E)(A-\alpha E)^{\ell}\boldsymbol{x}+\alpha(A-\alpha E)^{\ell}\boldsymbol{x}$

$=0$

よって、$A\boldsymbol{x}\in\widetilde{W}_\alpha$

次に部分空間であることだが、任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\widetilde{W}_\alpha$ に対し、$k\boldsymbol{x}\in\widetilde{W}_\alpha$ は明らかである。

$(A-\alpha E)^{\ell}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(A-\alpha E)^{\ell}\boldsymbol{x}+(A-\alpha E)^{\ell}\boldsymbol{y}=0+0=0$

よって、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\widetilde{W}_\alpha$

以上により、$A$-不変な部分空間となる。

## （P. 149　補題 1）← すでに固有多項式のところで証明済み！

$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ を（全体として）共通因子をもたない多項式（互いに素）とすれば

$M_1(x)f_1(x)+M_2(x)f_2(x)+\cdots+M_s(x)f_s(x)=1$

となるような $s$ 個の多項式 $M_1(x), M_2(x), \cdots, M_s(x)$ が存在する。

$A$ の固有多項式 $f_A(x)$ を相異なる一次因数の冪の積に分解し

（9）　$f_A(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{n_i}$

とする。

（10）　$f_i(x)=\dfrac{f_A(x)}{(x-\alpha_i)^{n_i}}=\prod_{j\neq i}^{s}(x-\alpha_j)^{n_j}$

とおけば、$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ は共通因子をもたない。よって上の補題により

（11）　$M_1(x)f_1(x)+M_2(x)f_2(x)+\cdots+M_s(x)f_s(x)=1$

となるような $s$ 個の多項式 $M_1(x), M_2(x), \cdots, M_s(x)$ が存在する。

スカラー係数の多項式なので、変数 $x$ に行列 $A$ を代入して

$M_1(A)f_1(A)+M_2(A)f_2(A)+\cdots+M_s(A)f_s(A)=E$

$M_i(A)f_i(A)=A_i$ とおいて

(12) $A_1+A_2+\cdots+A_s=\boldsymbol{E}$

を得る。ここでさらに

(13) $A_iA_j=0\ (i\neq j)$

が成立する。

実際、$f_i(x)f_j(x)=\dfrac{\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{n_i}\times\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{n_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}\times(x-\alpha_j)^{n_j}}$ は $f_A(x)$ で割り切れる。( $\dfrac{ab}{a}\times\dfrac{ab}{b}=ab$ )

従って定理1により$f_A(A)=0$ なので $f_i(A)f_j(A)=0$ よって、$A_iA_j=M_i(A)f_i(A)M_j(A)f_j(A)=0$

(12)と(13)から

$A_i=A_i\boldsymbol{E}=A_i(A_1+A_2+\cdots+A_s)=A_i^2$

すなわち、$A_i$ は冪等行列である。

(14) $A_i^2=A_i$

これらのことから(Ⅲ章P. 132) $V^n$ は部分空間

$A_iV^n=\{\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{x}\in V^n,\ A_i\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\}$

の直和に分解される。

さて、$\boldsymbol{A_iV^n}$ は $\widetilde{\boldsymbol{W}}_{\alpha_i}$ と一致する。実際、$(x-\alpha_i)^{n_i}f_i(x)=f_A(x)$ なので

$(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{n_i}f_i(A)=0$ よって、$(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{n_i}A_i=(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{n_i}M_i(A)f_i(A)=0$

任意の $\boldsymbol{x}\in V^n$ に対し $(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{n_i}A_i\boldsymbol{x}=0$ よって、$A_i\boldsymbol{x}\in\widetilde{W}_{\alpha_i}$

故に $A_iV^n\subset\widetilde{W}_{\alpha_i}$ である。

逆に、$\boldsymbol{x}\in\widetilde{W}_{\alpha_i}$ ならば、ある $\ell$ に対して $(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{\ell}\boldsymbol{x}=0$ (11)により $(x-\alpha_i)^{\ell}$ と $M_i(x)f_i(x)$ とは共通因子をもたない(もし、$M_i(x)f_i(x)$ が $x-\alpha_i$ で割り切れれば(11)の左辺が $x-\alpha_i$ で割り切れることになって矛盾する。)から、補題1によりある多項式 $M(x)$, $N(x)$ があって

$M(x)(x-\alpha_i)^{\ell}+N(x)M_i(x)f_i(x)=1\ \rightarrow\ M(x)(x-\alpha_i)^{\ell}+M_i(x)f_i(x)N(x)=1$ でもよい

$M(A)(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{\ell}+M_i(A)f_i(A)N(A)=\boldsymbol{E}$

$M(A)(A-\alpha_i\boldsymbol{E})^{\ell}+A_iN(A)=\boldsymbol{E}$

これを $\boldsymbol{x}$ にほどこせば、$A_iN(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ 、$N(A)\boldsymbol{x}\in V^n$ なので $\boldsymbol{x}=A_i(N(A)\boldsymbol{x})\in A_iV^n$

故に、$\widetilde{W}_{\alpha_i}\subset A_iV^n$

## (P. 131 射影子の補足)

定義から $\boldsymbol{x}\in W_1\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

⇐) について、$Ax \in W_1$ なので $x = Ax \in W_1$

## 準備（商ベクトル空間 線型代数学　川久保勝夫　著　P. 159）

ベクトル空間 $V$ とその部分空間 $W$ があるとき、次の様に新しいベクトル空間を構成する。

$x \in V$ に対し、$x + W = \{x + y \mid y \in W\}$ とする。

この集合を一点として考え直すことによって商ベクトル空間と定義する。

（補題　6．12．1）

$x, y \in V$ に対して、次の2つの条件は同値である。

(1) $x + W = y + W$

(2) $x - y \in W$

（証明）

(1) → (2)　$W$ は部分空間であるから、0 を含む。$x = x + 0 \in x + W = y + W$ よって、ある $w \in W$ に対して、$x = y + w$ と表すことができる。したがって、$x - y \in W$ となる。

(2) → (1) $x - y = w_1$ とおくと、仮定より $w_1 \in W$ である。$W$ は部分空間であるから、任意の $w \in W$ に対して、$w + w_1 \in W$ である。

$z \in x + W$ とすると、ある $w \in W$ に対して $z = x + w$ と書ける。

$z = x + w = x - w_1 + w_1 + w = x - (x - y) + w_1 + w = y + w_1 + w \in y + W$

よって、$x + W \subset y + W$

$x$ と $y$ の立場を入れ替えても同様なことがいえるので　$y + W \subset x + W$　よって

$x + W = y + W$

ここで、$V$ の二元 $x, y$ に対し、$x - y \in W$ のとき、$x \sim y$ と定義すれば、$\sim$ は $V$ の同値関係である。よってその商集合を $V/W$ で表し、$V$ の元 $x$ が含まれる類を $x + W$ で表す。

まずは同値律が満たされることを証明する。

ｉ) $x - x = 0 \in W$ なので $x \sim x$

ⅱ) $x \sim y \to y \sim x$

$x - y \in W$ ならば、$W$ は部分空間なので $-1(x - y) \in W$、つまり $y - x \in W$

よって、$y \sim x$

ⅲ) $x \sim y$ , $y \sim z$ $\to x \sim z$

$x - y \in W$, $y - z \in W$ ならば、$W$ は部分空間なので $x - y + (y - z) = x - z \in W$

よって、$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$

次に、$V/W = \{\boldsymbol{x}+W \mid \boldsymbol{x} \in V\}$となることを示す。

$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ ならば $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in W$ なので補題 6.12.1から、$\boldsymbol{x}+W = \boldsymbol{y}+W$

$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ でなければ $(\boldsymbol{x}+W) \cap (\boldsymbol{y}+W) = \varnothing$ である。もし $\varnothing$ でなかったとすれば

$\boldsymbol{z} \in (\boldsymbol{x}+W) \cap (\boldsymbol{y}+W)$ となる元 $\boldsymbol{z}$ が存在するはずである。

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}_2$ ( $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ ) と書ける。すると、

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}-\boldsymbol{w}_1-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1 \in W$ となり、矛盾する。

以上により、二つの類は互いに共通元をもたないか、または、完全に一致するということになる。

この $V/W$ に足し算とスカラー倍を次の様に定義する。

（足し算）：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V/W$ に対して、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V/W$ を次の様に定める。

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}+W, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}+W$ としたとき、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+W$ とする。

（スカラー倍）：$\boldsymbol{a} \in V/W$ とスカラー $k$ に対して、$k\boldsymbol{a} \in V/W$ を次の様に定める。

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}+W$ としたとき、$k\boldsymbol{a} \in (k\boldsymbol{x})+W$ とする。

ここで、$\boldsymbol{x}+W = \boldsymbol{x}'+W, \boldsymbol{y}+W = \boldsymbol{y}'+W$ のとき、$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+W = (\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')+W$ が成り立てば

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ だけによって定まり、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の取り方によらないことがわかる。

補題 6.12.1から、$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' \in W, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}' \in W$ が成り立つ。$W$ は部分空間なので

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}') \in W$

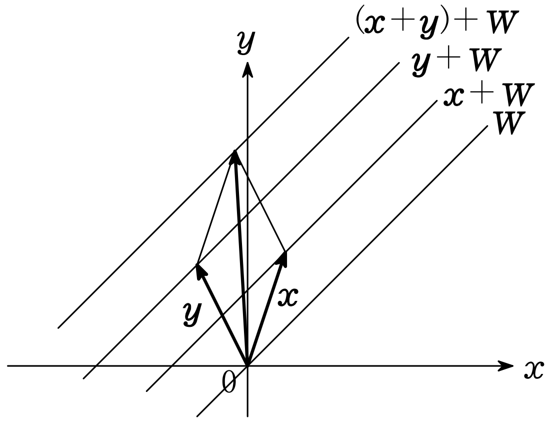
よって、補題 6.12.1から、$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+W = (\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')+W$ となる。

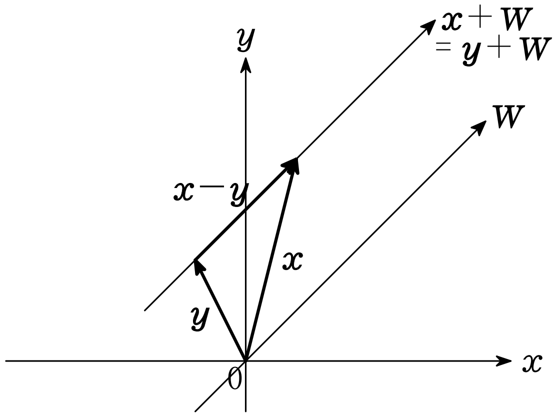
また、$\boldsymbol{x}+W = \boldsymbol{x}'+W$ のとき、$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' \in W$ だから $k\boldsymbol{x}-k\boldsymbol{x}' = k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \in W$

よって、$k\boldsymbol{x}+W = k\boldsymbol{x}'+W$ が成り立つ。

$V/W$ がベクトル空間になるということだが、ベクトル空間の公理を満たしていることは明らかである。例えば、零ベクトルは $0+W$ であり、任意の $\boldsymbol{x}+W$ に対して、$0+W+\boldsymbol{x}+W = \boldsymbol{x}+W$ となる。

（例）$V$ を2項数ベクトル空間 $R^2$, $W = \{(x, y) \mid x-y = 0\}$ とすると、$V/W$ は $W$ と平行な直線の集合である。




（自然な射影）

$V$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{x}+W$ を対応させる写像 $p : V \to V/W$ を自然な射影と呼ぶ。

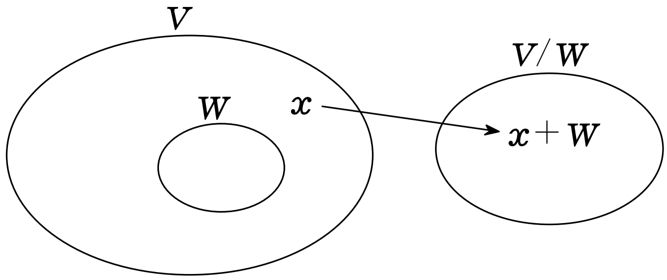
この $p$ は一次写像である。$\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{y} \in V$ とスカラー $k$ に対し

（ｉ） $p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+W = \boldsymbol{x}+W+\boldsymbol{y}+W = p(\boldsymbol{x})+p(\boldsymbol{y})$

（ⅱ） $p(k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}+W = k(\boldsymbol{x}+W) = kp(\boldsymbol{x})$

（定理　６．１２．１）

$dim(W/V) = dim\ V - dim\ W$




（証明）$W$ の基底を $\boldsymbol{a}_1$ , … , $\boldsymbol{a}_r$ とし、

それに、$V$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1$ , … , $\boldsymbol{b}_s$ を加

えて $V$ の基底をつくる。このとき、

$p(\boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{b}_1+W$ , … , $p(\boldsymbol{b}_s) = \boldsymbol{b}_s+W$ は $V/W$ の基底になる。これを示せば、

$dim\ V = r+s$ , $dim\ W = r$ , $dim\ V/W = s$

となり、この定理が証明されたことになる。

まず、上のベクトルが一次独立であることを示す。

$c_1(\boldsymbol{b}_1+W)+c_2(\boldsymbol{b}_2+W)+\cdots+c_s(\boldsymbol{b}_s+W) = 0+W \ \leftarrow$ 　$V/W$ における零ベクトル

両辺とも $V/W$ の元なので、$V/W$ における足し算とスカラー倍の決め方から、

$(c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{b}_s)+W = 0+W$

補題　６．１２．１ から、$(c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{b}_s)-0 \in W$ を意味するから

$c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{b}_s = d_1\boldsymbol{a}_1+d_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+d_r\boldsymbol{a}_r$

と表すことができる。

$\boldsymbol{a}_1$ , … , $\boldsymbol{a}_r$ , $\boldsymbol{b}_1$ , … , $\boldsymbol{b}_s$ は一次独立なので、上の式を移項すれば

$-d_1\boldsymbol{a}_1-d_2\boldsymbol{a}_2-\cdots-d_r\boldsymbol{a}_r+c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{b}_s = 0$

よって、$c_1 , \cdots , c_r , d_1 , \cdots , d_r = 0$ となる。

すなわち、$b_1 + W , \cdots , b_r + W$ は一次独立である。

次に、$V/W$ の任意の元を $a$ とすれば、ある $x \in V$ があって $a = x + W$ と書けることを示す。

$a_1 , \cdots , a_r , b_1 , \cdots , b_s$ は $V$ の基底だから、

$x = \lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_r a_r + \mu_1 b_1 + \cdots \mu_s b_s$

と表すことができる。

$x - (\mu_1 b_1 + \cdots \mu_s b_s) = \lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_r a_r \in W$

補題　6．12．1 から、$x + W = (\mu_1 b_1 + \cdots \mu_s b_s) + W = \mu_1 (b_1 + W) + \cdots + \mu_s (b_s + W)$

このことは、任意の $a$ が $b_1 + W , \cdots , b_r + W$ で生成されることを示している。

（別証明）$p : V \to V/W$ は一次写像なのでⅢ章定理 7（佐武　線型代数学）から
$dim\, p(V) = dim\, V - dim\, p^{-1}(0)$
$p^{-1}(0) = W , p(V) = W/V$ なので $dim\, ( W/V ) = dim\, V - dim\, W$ となる。

（冪零部分空間 川久保 線型代数学　P．299）
$V$ を $n$ 次元ベクトル空間、$f : V \to V$ を線型変換とする。そのとき、

$W_0 = \{ 0 \} , W_1 = Ker\, f , W_2 = Ker\, f^2 , \cdots , W_i = Ker\, f^i , \cdots$

とおくと、明らかに

$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_i \subset \cdots$

である。

なぜなら、$f(0) = 0$ つまり、$W_0 \subset W_1$

$x \in W_i$ ならば $f^i(x) = 0$ なので、$f^{i+1}(x) = f ( f^i(x) ) = 0$　よって、$x \in W_{i+1}$

（定理　12．2．1）ある $k$ が存在して

$\{ 0 \} = W_0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_k = W_{k+1} = \cdots$

が成り立つ。

（証明）$W_j$ の次元を $n_j$ とおくと

$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_i \subset \cdots V$

であるから

$0 = n_0 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq dim\, V = n$

が成り立つ。したがって $n_i$ はすべて異なることはない。つまり、$n_i = n_{i+1}$ となる $i$ が存在する。

このような $i$ の最小値を $k$ とする。すると、$n_k = n_{k+1}$ かつ $W_k \subset W_{k+1}$ であるから $W_k = W_{k+1}$ が成り立つ。（佐武 線型代数学 P. 101）

次に、$W_{k+1} = W_{k+2}$ を示す。

それには $W_{k+1} \supset W_{k+2}$ さえ示せばよい。任意の元 $x \in W_{k+2}$ に対し

$$f^{k+1}(f(x)) = f^{k+2}(x) = 0$$

であるから、$f(x) \in W_{k+1}$ である。ところが、$W_k = W_{k+1}$ であるから、$f(x) \in W_k$

したがって

$$f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = 0$$

つまり $x \in W_{k+1}$ となり、$W_{k+1} = W_{k+2}$ が成り立つ。あとは同様にして

$$W_{k+1} = W_{k+2} = W_{k+3} = \cdots$$

となる。この $W_k$ を線型変換 $f$ の**冪零部分空間**と呼ぶ。

（安定像空間 川久保 線型代数学 P. 300）

$V$ を $n$ 次元ベクトル空間、$f : V \to V$ を線型変換とする。そのとき、

$V_0 = V$ , $V_1 = f(V)$ , $V_2 = f^2(V)$ , $\cdots$ , $V_i = f^i(V)$ , $\cdots$ とすれば

（定理 12．3．1）ある $k$ が存在して

$$V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_k = V_{k+1} = \cdots$$

が成り立つ。そして、任意の $i \geqq k$ , $h \geqq 1$ に対して

$$f^h \mid V_i : V_i \to V_{i+h} = V_i$$

は同型写像である。

（証明）まず、数学的帰納法で $V_0 \supset V_1 \supset \cdots$ を証明する。

明らかに、$V_0 = V \supset V_1$ である。いま、任意の $j \geqq 1$ に対して $V_{j-1} \supset V_j$ が成り立つと仮定する。両側の $f$ による像を考えると $f(V_{j-1}) \supset f(V_j)$ よって、$V_j \supset V_{j+1}$ が成り立ち続くことになる。ここで、線型写像の合成は線型写像であることから、任意の $j$ に対し

$$dim\, f^j(V) + dim\,(Ker\, f^j) = n \;\to\; dim\, V_j + dim\, W_j = n$$

また、定理 12．2．1 から、ある $k$ に対し

$$dim\, W_0 < dim\, W_1 < \cdots < dim\, W_k = dim\, W_{k+1} = \cdots$$

が成り立つ。したがって、上の関係から

$dim\ V_0 > dim\ V_1 > \cdots > dim\ V_k = dim\ V_{k+1} = \cdots$

これより

$V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq V_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_k = V_{k+1} = \cdots$

を得る。また、このことは

$V \supsetneqq f(V) \supsetneqq f^2(V) \supsetneqq \cdots \supsetneqq f^k(V) = f^{k+1}(V) = \cdots = f^{k+h}(V) = \cdots$

また、$f \mid V_i : V_i \to V_{i+1}$ は全射であり、$i \geqq k$ に対しては $V_{i+1} = V_i$ であるから $f \mid V_i$ は $i \geqq k$ に対して同型写像になる。したがって、任意の $i \geqq k$ , $h \geqq 1$ に対して $f^h \mid V_i : V_i \to V_{i+h} = V_i$ は同型写像である。（一次変換が全射であれば単射であるので同型写像となる。）

この $V_k$ を線型変換 $f$ の安定像空間と呼ぶ。

（冪零部分空間と安定像空間の直和分解　川久保 線型代数学　P．302）

（定理　12．4．1）定理　12．3．1 により定まる $k$ に対して $V$ は冪零部分空間 $W_k$ と安定像空間 $V_k$ の直和になる。

$V = W_k \dot{+} V_k$

（証明）任意の $x \in W_k \cap V_k$ をとると、$x \in W_k$ より $f^k(x) = 0$ が成り立つ。

他方、定理　12．3．1 より

$f^k \mid V_k : V_k \to V_{k+k} = V_k$　（$i = k$ , $h = k$ としている）

は同型写像であるから、$f^k$ は単射であって、$x = 0$　つまり　$W_k \cap V_k = \{ 0 \}$ が成り立つ。

したがって、$W_k \dot{+} V_k$ は $V$ の部分空間であり、

$dim( W_k \dot{+} V_k ) = dim\ W_k + dim\ V_k = n$　なので $W_k \dot{+} V_k = V$ となる。

（一般固有空間と安定像空間の不変性　川久保　線型代数学　P．303）

$f : V \to V$ を線型変換とする。$f$ の固有値を $\lambda$ として、線型変換 $f - \lambda 1$ の冪零部分空間を $\widetilde{W}_\lambda$ とすれば、すなわち、ある $k$ が存在して　$\widetilde{W}_\lambda = Ker( f - \lambda 1 )^k$ で与えられる。また、安定像空間は $V_k = Im( f - \lambda 1 )^k$ で与えられる。

（定理　12．5．1）$V = \widetilde{W}_\lambda \dot{+} V_k$ となり、それぞれの部分空間は $f$－不変である。また、$f$ の固有多項式は、$f \mid \widetilde{W}_\lambda$ の固有多項式と $f \mid V_k$ の固有多項式の積に等しい。

（証明）定理　12．4．1 から、$V = \widetilde{W}_\lambda \dot{+} V_k$ は明らかである。また、任意の自然数 $N$ に対して

$( f - \lambda 1 )^N f = f( f - \lambda 1 )^N$

が成り立つことに注意する。定理　12．2．1 より、ある $k$ が存在して

$\widetilde{W}_\lambda = Ker\,(f-\lambda 1)^k$

であるから、任意の $x \in \widetilde{W}_\lambda$ に対して、

$(f-\lambda 1)^k f(x) = f\,(f-\lambda 1)^k(x) = f(0) = 0$

つまり、$f(x) \in \widetilde{W}_\lambda$ であるから、$\widetilde{W}_\lambda$ は $f$－不変である。

また、

$f(V_k) = f\,(\,(f-\lambda 1)^k(V)\,) = (f-\lambda 1)^k(\,f(V)\,) \subset (f-\lambda 1)^k(V) = V_k$

よって、$V_k$ も $f$－不変である。

(一般固有空間の固有多項式　川久保　線型代数学　P．304)

(定理) 線型変換 $f: V \to V$ とその固有値 $\lambda$ が与えられたとき、制限写像 $f\,|\,\widetilde{W}_\lambda \to \widetilde{W}_\lambda$ の固有多項式は $m = dim\,\widetilde{W}_\lambda$ とすると $(x-\lambda)^m$ である。特に、$f\,|\,\widetilde{W}_\lambda$ の固有値は $\lambda$ のみである。

(証明) $\widetilde{W}_\lambda$ の一つの基底をとり、それに関する線型変換 $f\,|\,\widetilde{W}_\lambda$ の表現行列を $A$ とする。そして、行列 $A$ を複素ベクトル空間 $A: C^m \to C^m$ とみなす。$A$ の固有多項式 $f_A(x)$ は複素数の範囲で因数分解されるから、それを $f_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)$ とする。

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ は固有値であるから、各 $i$ に対し、ベクトル $x_i \neq 0 \in C^m$ があって、

$Ax_i = \lambda_i x_i$

が成り立つ。

他方、$(A-\lambda E)^k = 0$ だから、各 $i$ について

$(A-\lambda E)^k(x_i) = 0$ ← 次の定理２(佐武 線型代数学)にも出てくる。

$k = 1$ のとき、$(A-\lambda E)(x_i) = Ax_i - \lambda x_i = \lambda_i x_i - \lambda x_i = (\lambda_i - \lambda)x_i$

$k = 2$ のとき、$(A-\lambda E)^2(x_i) = (A-\lambda E)(\lambda_i-\lambda)x_i = (\lambda_i-\lambda)^2 x_i$

$(A-\lambda E)^k(x_i) = (\lambda_i-\lambda)^k x_i = 0$

よって、$\lambda_i = \lambda$ が結論される。つまりすべての固有値が $\lambda$ に等しいことがわかる。すなわち

$f_A(x) = (x-\lambda)^m$ ，$m = dim\,\widetilde{W}_\lambda$

が成り立つ。

最後に制限写像 $f\,|\,V_k: V_k \to V_k$ の固有多項式が $x-\lambda$ を因子にもたないことを示す。

もしも、$f\,|\,V_k$ の固有多項式が $x-\lambda$ を因子にもつとすると、$f\,|\,V_k$ が $\lambda$ を固有値にもつこと

になる。そこで、$x \neq 0 \in V_k$ が $f(x) = \lambda x$ を満たしたとすれば、$x \in \widetilde{W}_\lambda$ であるから $x \in \widetilde{W}_\lambda \cap V_k = \{0\}$ なので、$x = 0$ となり矛盾する。よって、$x - \lambda$ を因子にもたない。

# 佐武 線型代数学へ戻る

## （P. 144 定理2）(脚注の上の証明から… → P.151の証明に訂正が必要)

$n$ 次行列 $A$ の相異なる固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ とし

（15） $\widetilde{W}_{\alpha_i} = \{x ; x \in V^n, (A - \alpha_i E)^\ell x = 0 \ (\ell : 十分大)\}$

とおけば、$V^n$ はそれらの直和に分解される。

（16） $V^n = \widetilde{W}_{\alpha_1} \dotplus \widetilde{W}_{\alpha_2} \dotplus \cdots \dotplus \widetilde{W}_{\alpha_s}$

$\alpha_i$ の重複度を $n_i$ とすれば

（17） $dim\, \widetilde{W}_{\alpha_i} = n_i$

である。

(17)の証明

$dim\, \widetilde{W}_{\alpha_i} = n'_i$ とする。$\widetilde{W}_{\alpha_i}$ は $A$-不変であるから、直和分解(16)に即して $V^n$ の底をとれば

$$(18)\quad A \sim \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & 0 \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A^{(s)} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$A^{(i)}$ は $A$ が $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ にひきおこす一次変換を表す $n'_i$ 次の行列である。

今、$n'_i$ 次の単位行列を $E_{n'_i}$ とすれば、(15)により $N_i = A^{(i)} - \alpha_i E_{n'_i}$ は冪零行列である。

なぜなら、任意の $x \in \widetilde{W}_{\alpha_i}$ に対し、$(A - \alpha_i E)^\ell x = 0$ なので $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ において $(A - \alpha_i E)^\ell = 0$

(任意の $x$ に対し $Ax = 0$ ならば $A = 0$ である。なぜなら、$AE = A = 0$ だから)

$$P^{-1}(A - \alpha_i E)P = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(s)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & A^{(i)} - \alpha_i E_{n'_i} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(P^{-1}(A - \alpha_i E)P)^\ell = P^{-1}(A - \alpha_i E)^\ell P = 0$

したがって、その部分である $N_i^\ell = (A^{(i)} - \alpha_i E_{n'_i})^\ell = 0$ である。

$f_{N_i}(x) = |xE_{n'_i} - A^{(i)} + \alpha_i E_{n'_i}| = |(x + \alpha_i)E_{n'_i} - A^{(i)}| = x^{n'_i}$ （P. 144 例3）

故に、$x - \alpha_i = y$ とすれば

$$f_{A^{(i)}}(x)=|\,xE_{n'_i}-A^{(i)}\,|=\ |\,(y+\alpha_i)E_{n'_i}-A^{(i)}\,|=y^{n'_i}=(x-\alpha_i)^{n'_i}$$

よって、(18)から

$$f_A(x)=\prod_{i=1}^{s}f_{A^{(i)}}(x)=\ \prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{n'_i}$$

$f_A(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{n_i}$ だったので、$n'_i=n_i$ でなければならない。

次に、$A$ をさらに分解するためには各 $A^{(i)}$ について考えればよい。今、$k=1,2,\cdots$ に対し

(19)　$W_{\alpha_i}^{(k)}=\{\,x\,;\,x\in V^n,\,(A-\alpha_iE)^kx=0\,\}$

$=\{\,x\,;\,x\in\widetilde{W}_{\alpha_i},\,N_i^k\,x=0\,\}\ \leftarrow(N_i=A^{(i)}-\alpha_iE_{n_i})$

とおく。これらすべて $A$-不変 (定理 12.5.1 の証明と同様) な部分空間であって、上の定理から

(20)　$W_{\alpha_i}=W_{\alpha_i}^{(1)}\subset W_{\alpha_i}^{(2)}\subset\cdots=W_{\alpha_i}^{(k)}=\widetilde{W}_{\alpha_i}$

($|\,A-\alpha_iE\,|=0$ とは $x\neq0$ が存在するための $\alpha_i$ だから $W_{\alpha_i}^{(1)}\neq\{\,0\,\}$)

となるような $k$ が存在する。また、基底を次のように作る。

$a_1,a_2,\cdots,a_{n_i^{(1)}}\ \leftarrow W_{\alpha_i}^{(1)}$ の底

$a_1,a_2,\cdots,a_{n_i^{(1)}},a_{n_i^{(1)}+1},\cdots,a_{n_i^{(2)}}\leftarrow\ W_{\alpha_i}^{(2)}$ の底

$a_1,a_2,\cdots,a_{n_i^{(1)}},a_{n_i^{(1)}+1},\cdots,a_{n_i^{(2)}},a_{n_i^{(2)}+1},\cdots,a_{n_i^{(3)}}\ \leftarrow W_{\alpha_i}^{(3)}$ の底

$W_{\alpha_i}^{(3)}$　$\{\{\,a_{n_i^{(2)}+1},\cdots,a_{n_i^{(3)}}\}\}$

$W_{\alpha_i}^{(2)}$　$\{\{\,a_{n_i^{(1)}+1},\cdots,a_{n_i^{(2)}}\}\}$

$W_{\alpha_i}^{(1)}$　$\{\{\,a_1,\cdots,a_{n_i^{(1)}}\}\}$

◎$\widetilde{W}_{\alpha_i}$まで底を追加していく。

任意の $x\in W_{\alpha_i}^{(k)}$ に対し、$N_i^{k-1}N_ix=0$ なので $N_ix\in W_{\alpha_i}^{(k-1)}$ よって、$N_iW_{\alpha_i}^{(k)}\subset W_{\alpha_i}^{(k-1)}$

であるから、$N_i$ をほどこすと、$W_{\alpha_i}^{(i)}$ の底のうち、$W_{\alpha_i}^{(1)}$ の底は 0 に、それ以外の底は $W_{\alpha_i}^{(i-1)}$ の底の線型結合で表されることになる。

$N_i(\,a_1,a_2,\cdots,a_{n_i^{(1)}},a_{n_i^{(1)}+1},\cdots,a_{n_i^{(2)}},a_{n_i^{(2)}+1},\cdots,a_{n_i^{(3)}},\cdots,a_{n_i}\,)$

線型結合

線型結合（例　$N_i(a_{n_i^{(2)}+1})=*a_1+\cdots+*a_{n_i^{(1)}}+*a_{n_i^{(1)}+1}+\cdots+*a_{n_i^{(2)}}$）

$$
= (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n_i})
\begin{pmatrix}
0 & & 0 & * & & * & * & & * & & * & & * \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
0 & & 0 & * & & * & * & & * & & * & & * \\
0 & & 0 & 0 & & 0 & * & & * & & * & & * \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
0 & & 0 & 0 & & 0 & * & & * & & * & & * \\
 & & & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & \\
0 & & 0 & 0 & & 0 & & & & & 0 & & 0 \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & & \cdots & & \ddots & \\
0 & & 0 & 0 & & 0 & & & & & 0 & & 0
\end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{P}_i$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n_i}$ を列ベクトルとする行列にし、底の変換をすれば、$\boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{P}_i$ は対角成分までこめて左下半分が 0 であるような三角行列に表現できる。

$$
\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}^{(i)} - \alpha_i \boldsymbol{E}_{n_i} \ \rightarrow\ \boldsymbol{A}^{(i)} = \boldsymbol{N}_i + \alpha_i \boldsymbol{E}_{n_i} \rightarrow \boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{A}^{(i)}\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_i^{-1}(\boldsymbol{N}_i + \alpha_i \boldsymbol{E}_{n_i})\boldsymbol{P}_i
$$

$$
= \boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{P}_i + \alpha_i \boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{E}_{n_i}\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{P}_i + \alpha_i \boldsymbol{E}_{n_i}
$$

$$
\boldsymbol{A}^{(i)} = \alpha_i \boldsymbol{E}_{ni} + \boldsymbol{N}_i \ \sim
\begin{pmatrix}
\alpha_i & & 0 & * & & * & & * & & * \\
 & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
0 & & \alpha_i & * & & * & & * & & * \\
0 & & 0 & \alpha_i & & 0 & & * & & * \\
 & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
0 & & 0 & 0 & & \alpha_i & & * & & * \\
 & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
0 & & 0 & 0 & & 0 & & \alpha_i & & 0 \\
 & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
0 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 & & \alpha_i
\end{pmatrix}
$$

（注意）

$$
\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}_{\alpha_i} \ \rightarrow\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left.\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}\right] n_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left.\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}\right] n_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_i = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ & * & & * & \\ & & \ddots & & \\ & * & & * & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}
$$

（定理3） 任意の $n$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し適当な $n$ 次正則行列 $\boldsymbol{P}$ をとれば

$$
(21) \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{(1)} & & & 0 \\ & \boldsymbol{A}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{A}^{(s)} \end{pmatrix} \leftarrow \text{上三角行列}, \quad \boldsymbol{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{pmatrix}
$$

$$P = \begin{pmatrix} * & & * & 0 & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ * & & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ & & & * & & * & 0 & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & * & & * & 0 & \cdots \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$ ← 各列ベクトルは一次独立になるので正則行列となる。

## （P. 145　注意1）

(9)’ $f_A(x) \to \phi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{\nu_i}$ とする。

(10)’ $\phi_i(x) = \dfrac{\phi_A(x)}{(x-\alpha_i)^{\nu_i}} = \prod_{j \neq i}^{s} (x - \alpha_j)^{\nu_j}$

とおけば、各 $\phi_i(x)$ は共通因子をもたない。よって、補題から

(11)’ $M_1(x)\phi_1(x) + M_2(x)\phi_2(x) + \cdots + M_s(x)\phi_s(x) = 1$

変数 $x$ に $A$ を代入して

$M_1(A)\phi_1(A) + M_2(A)\phi_2(A) + \cdots + M_s(A)\phi_s(A) = E$

$M_i(A)\phi_i(A) = A_i$ とおき

(12)’ $A_1 + A_2 + \cdots + A_s = E$

さらに

(13) $A_iA_j = 0\ (i \neq j)$

(14) $A_i^2 = A_i$ （冪等行列）

このことから $V^n$ は部分空間

$A_iV^n = \{ x ; x \in V^n, A_ix = x \}$

の直和に分解される。

(15)’ $\widetilde{W}_{\alpha_i} = \{ x ; x \in V^n, (A - \alpha_i E)^{\ell} x = 0 \}$ ←（$\ell \leqq \nu_i$ とする）

$A_iV^n$ は $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ と一致する。 実際、$(x - \alpha_i)^{\nu_i}\phi_i(x) = \phi_A(x)$ であるから、

$(A - \alpha_i E)^{\nu_i}\phi_i(A) = 0$　よって $(A - \alpha_i E)^{\nu_i} A_i = (A - \alpha_i E)^{\nu_i} M_i(A)\phi_i(A) = 0$

故に $A_iV^n \subset \widetilde{W}_{\alpha_i}$ である。

逆に、$x \in \widetilde{W}_{\alpha_i}$ とすれば、$x \in A_iV^n$ となり、$A_iV^n = \widetilde{W}_{\alpha_i}$ を得る。

そして、定理2の $\ell$ を $\nu_i$ として

(16)’ $V^n = \widetilde{W}_{\alpha_i} \dotplus \widetilde{W}_{\alpha_2} \dotplus \cdots \dotplus \widetilde{W}_{\alpha_s}$ （直和）

定理2の前半は同じように導き出せる。ただし、$\nu_i \leqq n_i = dim\ \widetilde{W}_{\alpha_i}$ である。

また、$A^{(i)}$ は $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ に引き起こす一次変換なので

$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{pmatrix}$ なので、$f_{A^{(i)}}(x) = (x - \alpha_i)^{n_i}$ である。したがって、*Hamilton-Cayley*

の定理から $(A^{(i)} - \alpha_i E_{n_i})^{n_i} = 0$ は当然であるが、そのときの最小多項式は固有多項式の約

数なので、$\phi_{A^{(i)}}(x) = (x - \alpha_i)^{\nu'_i}$ ( $\nu'_i \leqq n_i$ ) となる。

$\nu'_i = \nu_i$ となるはずである。

なぜなら、P. 145の問4から $\phi_{P^{-1}AP} = \phi_A$ なので

$\phi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{\nu_i}$ は各 $(x - \alpha_i)^{\nu'_i}$ の最小公倍数のはずなので、$(x - \alpha_i)^{\nu'_i}$

で割り切れる最小のものでなければならない。よって、$\nu'_i = \nu_i$ となる。

つまり、$\phi_{A^{(i)}}(x) = (x - \alpha_i)^{\nu_i}$ となり、$(A^{(i)} - \alpha_i E_{n_i})^{\nu_i} = 0$ となる。

最小多項式の定義から $(A^{(i)} - \alpha_i E_{n_i})^{\nu_i - 1} \neq 0$ となる。

したがって、十分大きな $\ell$ は $n_i$ より $\nu_i$ の方がより精度が高かったことがわかる。

## (P. 146　例1　$S+N$ 分解)

任意の $n$ 次行列 $A$ は

(22)　$A = S + N$　( $S$ : 準単純 , $N$ : 冪零 , $SN = NS$ )

の形に一意的に表される。しかも、$S$ , $N$ は $A$ のスカラー係数の多項式になる。

(証明)

$S = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s$

$= \alpha_1 M_1(A) f_1(A) + \alpha_1 M_1(A) f_1(A) + \cdots + \alpha_s M_s(A) f_s(A)$

とおけば、これは $A$ の多項式である。

任意の $\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}_{\alpha_i} = A_i V^n$ に対しある $\boldsymbol{y} \in V^n$ が存在して $\boldsymbol{x} = A_i \boldsymbol{y}$ とすることができる。

$S\boldsymbol{x} = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s)\boldsymbol{x} = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_s A_s) A_i \boldsymbol{y} = \alpha_i A_i^2 \boldsymbol{y}$

$= \alpha_i A_i \boldsymbol{y} = \alpha_i \boldsymbol{x}$

$V^n$ の底 $\boldsymbol{a}_1 , \boldsymbol{a}_2 , \cdots , \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{a}_{i1} , \boldsymbol{a}_{i2} , \cdots , \boldsymbol{a}_{in_i}$ が $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ ($n_i = dim\ \widetilde{W}_{\alpha_i}$) の底になるようにと

る。この底に関して $S$ を表せば、一次変換なので

行列に表現すると

$S(\boldsymbol{a}_{11}, \cdots, \boldsymbol{a}_{1n_1}, \boldsymbol{a}_{21}, \cdots, \boldsymbol{a}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

$$= (\boldsymbol{a}_{11}, \cdots, \boldsymbol{a}_{1n_1}, \boldsymbol{a}_{21}, \cdots, \boldsymbol{a}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & & \\ & & & \alpha_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \alpha_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \alpha_s \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{a}_{11}, \cdots, \boldsymbol{a}_{1n_1}, \boldsymbol{a}_{21}, \cdots, \boldsymbol{a}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1\boldsymbol{E}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s\boldsymbol{E}_{ns} \end{pmatrix}$$

よって、底の変換 $(\boldsymbol{e}_i) \to (\boldsymbol{a}_i)$ により、$S$ の固有値は $A$ の固有値と等しく

$$S \sim \begin{pmatrix} \alpha_1\boldsymbol{E}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s\boldsymbol{E}_{n_s} \end{pmatrix}$$

$S$ は準単純である。また、$N = A - S$ とすれば、$N$ も $A$ の多項式となる。$N(x) = x - S(x)$ とおけば、どちらもスカラー係数の多項式なので、$S(x)N(x) = N(x)S(x)$ から $SN = NS$ となる。

$P^{-1}NP = P^{-1}(A - S)P$

$$= P^{-1}AP - \begin{pmatrix} \alpha_1\boldsymbol{E}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s\boldsymbol{E}_{n_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} - \alpha_1\boldsymbol{E}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(s)} - \alpha_s\boldsymbol{E}_{n_s} \end{pmatrix}$$

$N_i = A^{(s)} - \alpha_s\boldsymbol{E}_{n_s}$ は定理2の証明の前半から冪零行列であり、$N$ も冪零行列となる。

次に、分割の一意性をいうために、まずその準備をする。

1) $S$, $S'$ が交換可能な2つの準単純行列ならば、それらは同時に対角化される。したがって、$S \pm S'$ も準単純である。

2) $N$, $N'$ が交換可能な2つの冪零行列ならば、$N \pm N'$ も冪零である。

3) 準単純かつ冪零な行列は 0 だけである。

(証明)

1) $S$ の相異なる固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とする。$S$ は準単純であるから、P. 146 例4から $V^n$ は $S$ の固有空間 $W_{\alpha_i}$ の直和に分解される。: $V^n = W_{\alpha_1} + \cdots + W_{\alpha_s}$, $S$ と $S'$ とは交換可能で

あるから、$\boldsymbol{x} \in W_{\alpha_i}$ とすれば、$SS'\boldsymbol{x} = S'S\boldsymbol{x} = S'(\alpha_i\boldsymbol{x}) = \alpha_i S'\boldsymbol{x}$ すなわち、$S'\boldsymbol{x} \in W_{\alpha_i}$ つまり、$W_{\alpha_i}$ は $S'$-不変である。よって直和分解に即して底をとれば

$$S \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{E}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s \boldsymbol{E}_{n_s} \end{pmatrix} \quad , \quad S' \sim \begin{pmatrix} S_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_s' \end{pmatrix}$$

と表現できる。ここで、最小多項式 $\phi_{S'}(x)$ はP．146例4から重根を持たない。よって、その約数である $\phi_{S_i'}(x)$ も重根を持たない（P．145 問4）。よって、$W_{\alpha_i}$ の底を適当にとることによって $S_i'$ は対角化される。このような $W_{\alpha_i}$ の底を列ベクトルとして並べて底（$\boldsymbol{a}_i$）を作り、底の変換（$\boldsymbol{e}_i$）→（$\boldsymbol{a}_i$）の行列を $P$ とすれば、$P^{-1}SP$ , $P^{-1}S'P$ は共に対角行列にすることができる。

また、$P^{-1}(S \pm S')P = P^{-1}SP \pm P^{-1}S'P$ なので、$S \pm S'$ も準単純となる。

2）$N^{\nu} = 0$ , $N'^{\nu'} = 0$ とする。$N$ と $N'$ は交換可能であるから、「二項定理」により

$(N+N')^m = N^m + {}_m\mathrm{C}_1 N^{m-1}N' + \cdots + {}_m\mathrm{C}_i N^{m-i}N'^i + \cdots + N'^m$

よって、$m = \nu + \nu' - 1$ とおけば $m-i \geqq \nu$ ならば $\nu + \nu' - 1 - i \geqq \nu \rightarrow \nu' - 1 \geqq i$

$m-i < \nu$ ならば $\nu + \nu' - 1 - i < \nu \rightarrow \nu' - 1 < i$ （$i$ , $\nu'$ は自然数）→ $\nu' \leqq i$

したがって、いずれにせよ $N^{m-i}N'^i = 0$ よって、$(N+N')^m = 0$ また、$-N'$ も冪零なので $(N \pm N')^m = 0$ となる。

3）準単純な行列 $S$ が同時に冪零であるとする。

$$S \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s \end{pmatrix}$$

とすれば、冪零行列の固有値はすべて 0 なので $S \sim 0$ したがって、$S = P^{-1}0P = 0$

最後に一意性を示す。

行列 $A$ が別の仕方で分解できたとする。$A = S+N = S'+N'$

そのとき、$S-S' = N-N'$ 、仮定により、$S'$ , $N'$ は交換可能であるから、$AS' = (S'+N')S' = S'^2 + N'S' = S'^2 + S'N' = S'(S'+N') = S'A$

$AN' = (S'+N')N' = S'N' + N'^2 = N'S' + N'^2 = N'(S'+N') = N'A$

よって、$A$ とも交換可能、したがって、$A$ の多項式である $S$ , $N$ とも交換可能である。故に、1）、2）から $S-S'$ は準単純、$N-N'$ は冪零となる。よって、3）より $= 0$ となって、$S = S'$ , $N$

$= N'$ である。

## （P. 148　問1）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_A(x) = |\,xE - A\,| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$$

固有値は $\alpha_1 = 1$（重根），$\alpha_2 = 2$

$f_1(x) = (x-2)$ , $f_2(x) = (x-1)^2$

$M_1(x)(x-2) + M_2(x)(x-1)^2 = 1$　にしたい。$M_1(x) = -x$ ， $M_2(x) = 1$ とすれば

$-x(x-2) + (x^2 - 2x + 1) = 1$

よって、$A_1 = -A(A-2E) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$SN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = NS$$

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$　←　冪零行列

ここで、次の準備をする。$S$ と $N$ が交換可能なので二項定理が使える。

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ に $A = S+N$（$S+N$ 分解）を代入する。$N^{\nu} = 0$ ，$n > \nu$ とする。

$$A^k = (S+N)^k = {}_k\mathrm{C}_0 S^k N^0 + {}_k\mathrm{C}_1 S^{k-1} N^1 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k S^0 N^k$$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k ({}_k\mathrm{C}_0 S^k N^0 + {}_k\mathrm{C}_1 S^{k-1} N^1 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k S^0 N^k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_0 S^k N^0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_1 S^{k-1} N^1 + \cdots + \sum_{k=i}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_i S^{k-i} N^i + \cdots + \sum_{k=n}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_k S^0 N^k$$

各項ごとに $N^*$ を度外視して計算してみると

$\sum_{k=0}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_0 S^{k} = a_0\, {}_0\mathrm{C}_0 S^{0} + \cdots + a_n\, {}_n\mathrm{C}_0 S^{n} = a_0 S^0 + \cdots + a_n S^n = f(S)$

$\sum_{k=1}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_1 S^{k-1} = a_1\, {}_1\mathrm{C}_1 S^{0} + a_2\, {}_2\mathrm{C}_1 S^{1} + \cdots + a_n\, {}_n\mathrm{C}_1 S^{n-1}$

$= a_1 S^0 + a_2 2S^1 + \cdots + a_n n S^{n-1} = \dfrac{f\,'(S)}{1!}$

$\vdots$

$\sum_{k=i}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_i S^{k-i} = a_i\, {}_i\mathrm{C}_i S^{0} + a_{i+1}\, {}_{i+1}\mathrm{C}_i S^{1} + a_{i+2}\, {}_{i+2}\mathrm{C}_i S^{2} + \cdots + a_n\, {}_n\mathrm{C}_i S^{n-i}$

$= a_i \dfrac{{}_i\mathrm{P}_i}{i!} S^0 + a_{i+1} \dfrac{{}_{i+1}\mathrm{P}_i}{i!} S^1 + a_{i+2} \dfrac{{}_{i+2}\mathrm{P}_i}{i!} S^2 + \cdots + a_n \dfrac{{}_n\mathrm{P}_i}{i!} S^{n-i}$

$$\boxed{f^{(i)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^{(i)} = a_i\, {}_i\mathrm{P}_i x^0 + a_{i+1}\, {}_{i+1}\mathrm{P}_i x^1 + \cdots + a_n\, {}_n\mathrm{P}_i x^{n-i} \quad , \quad {}_n\mathrm{C}_k = \frac{{}_n\mathrm{P}_k}{k!}}$$

$= \dfrac{f^{(i)}(S)}{i!}$

$\vdots$

$\sum_{k=n}^{n} a_k\, {}_k\mathrm{C}_k S^{0} = a_n \dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n!} S^0 = a_n S^0 = \dfrac{f^{n}(S)}{n!}$

$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(S)}{k!} N^k \quad (N^{\nu} = 0\ ,\ n > \nu) \ \rightarrow\ f(A) = \sum_{k=1}^{\nu-1} \dfrac{f^{(k)}(S)}{k!} N^k$

## （P. 148　例2）

$A$ を $S+N$ 分解する。$f(x)$ を任意の多項式とすれば、$S$ , $N$ が交換可能であるため

(*)　$f(A) = f(\,S+N\,)$

$= f(S) + f\,'(S)N + \dfrac{1}{2!} f\,''(S)N^2 + \cdots + \dfrac{1}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(S) N^{\nu-1}$　（ただし、$N^{\nu} = 0$ ）

$S$ は準単純だから、正則行列 $P$ があって　$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s \end{pmatrix}$ と表現できる。

$(\,P^{-1}SP\,)^2 = P^{-1}SPP^{-1}SP = P^{-1}S^2P$

したがって、対角行列の2乗は対角行列なので、$P^{-1}S^2P$ も対角行列である。同様にして、

$P^{-1}S^{\ell}P$ も対角行列である。またそのスカラー倍も対角行列なので

$P^{-1}f(S)P = P^{-1}(\,a_0E + a_1S + a_2S^2 + \cdots + a_kS^k\,)P$

$= a_0E + a_1P^{-1}SP + a_2P^{-1}S^2P + \cdots + a_kP^{-1}S^kP = f(P^{-1}SP)$

となり、$f(S) = a_0E + a_1S + a_2S^2 + \cdots + a_kS^k$ も準単純となる。

$$\sum_{n=1}^{\nu-1}\frac{f^{(n)}(S)}{n!}N^n = f'(S)N+\frac{1}{2!}f''(S)N^2+\cdots+\frac{1}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}N^{\nu-1}$$

の各項が冪零であることを示す。

$f^{(\ell)}(S) = b_0E+b_1S+b_2S^2+\cdots+b_mS^m$ とすれば、$S$ , $N$ は交換可能なので

$N^aS^b = N\cdots NSS\cdots S = N\cdots SNS\cdots S = N\cdots SSNS\cdots S = S^bN^a$ に注意すれば

$(f^{(\ell)}(S)N^i)^j = ((b_0E+b_1S+b_2S^2+\cdots+b_mS^m)N^i)^j$

$= (b_0E+b_1S+b_2S^2+\cdots+b_mS^m)N^i\cdots(b_0E+b_1S+b_2S^2+\cdots+b_mS^m)N^i$

$= (b_0E+b_1S+b_2S^2+\cdots+b_mS^m)^j N^{ij}$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\nu-1}\frac{f^{(n)}(S)}{n!}N^n$ の各項は冪零である。$S$ , $N$ は $A$ のスカラー係数の多項式であるので各項は $A$ のスカラー係数の多項式である。よって、各項は交換可能であり、それらの部分和もそれぞれ交換可能である。したがって、P. 152例1の2)から冪零となる。$f(S)$ も $A$ のスカラー係数の多項式なので、$f(S)$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\nu-1}\frac{f^{(n)}(S)}{n!}N^n$ は交換可能である。

以上のことから、分解の一意性から $f(A) = f(S)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\nu-1}\frac{f^{(n)}(S)}{n!}N^n$ が $S+N$ 分解となる。

## (P. 154 *Frobenius*の定理)

$A$ の固有値を(重複までいれて) $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\cdots$ , $\alpha_n$ とする。

$f(A)$ の固有値は(重複までいれて) $f(\alpha_1)$ , $f(\alpha_2)$ , $\cdots$ , $f(\alpha_n)$ で与えられる。

$S \sim \begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$ ← $n$ としている理由は重複を含めると $n$ 個あるから

とすれば、ある正則行列があって、$P^{-1}SP = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$ とすることができる。また

$(P^{-1}SP)^k = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}\alpha_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^k\end{pmatrix}$ , $P^{-1}f(S)P = f(P^{-1}Sp)$

$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$ とすると

$P^{-1}f(S)P = a_0E+a_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^2\end{pmatrix}+\cdots+a_k\begin{pmatrix}\alpha_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^k\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_0+a_1\alpha_1+\cdots+a_k\alpha_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_0+a_1\alpha_n+\cdots+a_k\alpha_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

よって、$f(S) \sim \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\alpha_n) \end{pmatrix}$ を得る。

定理3 から任意の $n$ 次行列は、ある正則行列があって、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ とすること

ができる。( $P^{-1}AP$ $)^k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^k \end{pmatrix}$ , $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP)$

なので、同様にして

$P^{-1}f(A)P = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\alpha_n) \end{pmatrix}$ となり、上三角行列の固有値は対角成分によって与えられる

(P. 141)ので$f(A)$ の固有値は(重複までいれて) $f(\alpha_1)$ , $f(\alpha_2)$ , $\cdots$ , $f(\alpha_n)$ となる。簡単には、$f(A)$ を $S+N$ 分解したときの準単純部分が $f(S)$ なので、$f(S)$ の固有値が $f(A)$ の固有値と一致することからもわかる。

## (P. 155　注意)

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ が $|x| < r$ で絶対収束する冪級数であり、固有値 $|\alpha_i| < r$ ( $1 \leqq i \leqq n$ )

ならば、$f(A)$ , $f(S)$ 等も絶対収束し、やはり (*) が成立する。したがって、$f(A)$ の固有値は(重複までいれて) $f(\alpha_1)$ , $f(\alpha_2)$ , $\cdots$ , $f(\alpha_n)$ で与えられる。(P. 37～P. 38参照)

なぜなら、まずは $f(S)$ についてだが

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と表現できる。したがって有限和を $f_n(x)$ とすると

$$f_n(S) = \sum_{i=0}^{n} a_i S^i = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \cdots + a_k S^n$$

有限和であるので

$$P^{-1}f_n(S)P = f_n(P^{-1}SP) = \begin{pmatrix} f_n(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

次に行列の級数の極限の性質についていくつか証明しておく必要がある。

まず 行列のノルムであるが、$\| AB \| \leqq \| A \| \| B \|$ を満たしていれば何でもよいが、たとえば、

$\| A \| = max \mid a_{ij} \mid$ は満たさない。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \| AB \| \geqq \| A \| \| B \|$$

ここでは次のノルムを定めることにする。

$$\| A \| = \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{Tr\left( {}^{t}\overline{A}A \right)}$$

（証明） $A = ( a_{ij} ) , B = ( b_{jk} ) , AB = ( c_{ik} )$ とすれば $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} ( a_{ij}b_{jk} )$ だから

$$\| AB \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mid c_{ij} \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} ( a_{ij}b_{jk} ) \right|^2$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid \mid b_{jk} \mid \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ( \mid a_{i1} \mid \mid b_{1k} \mid + \mid a_{i2} \mid \mid b_{2k} \mid + \cdots + \mid a_{in} \mid \mid b_{nk} \mid )^2$$

$Schwarz$ の不等式から

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \{ ( \mid a_{i1} \mid^2 + \mid a_{i2} \mid^2 + \cdots + \mid a_{in} \mid^2 ) ( \mid b_{1k} \mid^2 + \mid b_{2k} \mid^2 + \cdots + \mid b_{nk} \mid^2 ) \}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ( \mid a_{i1} \mid^2 + \mid a_{i2} \mid^2 + \cdots + \mid a_{in} \mid^2 ) \sum_{k=1}^{n} ( \mid b_{1k} \mid^2 + \mid b_{2k} \mid^2 + \cdots + \mid b_{nk} \mid^2 )$$

$$= \| A \|^2 \| B \|^2$$

ノルムが定まっていれば次のことが成り立つ

$$\lim_{k \to \infty} A_k = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \| A_k - A \| = 0$$

$P , Q$ が正則行列のとき、 $\lim_{k \to \infty} A_k = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} PA_kQ = PAQ = P ( \lim_{k \to \infty} A_k ) Q$

（証明）

$$\| PA_kQ - PAQ \| = \| P ( A_k - A ) Q \| \leqq \| P \| \| A_k - A \| \| Q \|$$

したがって、$\lim_{k \to \infty} A_k = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} PA_kQ = PAQ = P ( \lim_{k \to \infty} A_k ) Q$

$$\| A_k - A \| = \| P^{-1} P ( A_k - A ) Q Q^{-1} \| \leqq \| P^{-1} \| \| PA_kQ - PAQ \| \| Q^{-1} \|$$

したがって、 $\lim_{k \to \infty} PA_kQ = PAQ \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} A_k = A$

固有値 $\mid \alpha_i \mid < r$ （$1 \leqq i \leqq n$）なので、$P^{-1} f_n(S) P$ は絶対収束する。それを $B$ とすれば $B$ は間

違いなく対角行列であり、$\lim_{n\to\infty} P^{-1}f_n(S)P = B$ なので $\lim_{n\to\infty} f_n(S) = PBP^{-1}$ となり絶対収束する。それを $f(S)$ とすればよい。

$f(A)$ が絶対収束することと $f(A)$ の固有値については他書の説明に譲る。例えば、(線型代数と群　赤尾和男 著　共立出版　P.51) などがある。

## (P. 148　例2　冪零行列の標準化)

$N$ を冪零行列、$N^{\nu-1} \neq 0$ , $N^{\nu} = 0$ とする。$W^{(i)} = \{ \boldsymbol{x} ; \boldsymbol{x} \in V^n , N^i\boldsymbol{x} = 0 \}$ とおけば

$\{ 0 \} = W^{(0)} \subset W^{(1)} \subset W^{(2)} \subset W^{(3)} \subset \cdots \subset W^{(\nu)} = V^n$ （ $ker^k f = W^{(k)}$ なので ）

今、$dim\ W^{(i)} = m_i$ , $m_i - m_{i-1} = r_i \neq 0$ ( $1 \leqq i \leqq \nu$ ) ただし、$m_0 = 0$ とおく、つまり

$m_2 = r_2 + r_1$ , $m_3 = r_3 + r_2 + r_1$ , $\cdots$ , $dim\ W^{(i)} = m_i = r_i + \cdots + r_2 + r_1$ である。

$W^{(\nu-1)}$ の任意の底に $r_\nu$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_\nu}$ をつけ加えて $W^{(\nu)}$ の底になるようにすれば（注意 $N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_i \neq 0$ ( $1 \leqq i \leqq r_\nu$ )　もし $N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_i = 0$ ならば $\boldsymbol{a}_i \in W^{(\nu-1)}$ となる。）

$(*_\nu)$　　$W^{(\nu)} = \{ \{ \boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_\nu} \} \} \dotplus W^{(\nu-1)}$　（直和）

そのとき、$N\boldsymbol{a}_1 , N\boldsymbol{a}_2 , \cdots , N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-1)}$ であるが、これらのベクトルは一次独立で、かつ $\{ \{ N\boldsymbol{a}_1 , \cdots , N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \} \} \cap W^{(\nu-2)} = \{ 0 \}$ となる。

なぜなら、$c_1N\boldsymbol{a}_1 + c_2N\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{r_\nu}N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-2)}$ とすれば

$N^{\nu-2}( c_1N\boldsymbol{a}_1 + c_2N\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{r_\nu}N\boldsymbol{a}_{r_\nu} ) = N^{\nu-1}( c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{r_\nu}\boldsymbol{a}_{r_\nu} ) = 0$

よって、$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{r_\nu}\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-1)}$　しかるに $(*_\nu)$ から $\{ \{ \boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_{r_\nu} \} \} \cap W^{(\nu-1)} = \{ 0 \}$　よって、$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{r_\nu}\boldsymbol{a}_{r_\nu} = 0$ から $c_1 = c_2 = \cdots = c_{r_\nu} = 0$

さて、ここまでで理解しておかなければならないことをまとめる。

①

次の $r_\nu \times \nu$ 個のベクトルは一次独立である。

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{a}_1 , & \boldsymbol{a}_2 , \cdots & , \boldsymbol{a}_{r_\nu} \\
N\boldsymbol{a}_1 , & N\boldsymbol{a}_2 , \cdots & , N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \\
N^2\boldsymbol{a}_1 , & N^2\boldsymbol{a}_2 , \cdots & , N^2\boldsymbol{a}_{r_\nu} \\
 & \cdots & \\
N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_1 , & N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_2 , \cdots & , N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_{r_\nu}
\end{array}
$$

（証明）　$\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i1}\boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i2}N\boldsymbol{a}_i + \cdots + \sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i\nu}N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_i = 0$　… ※

とおく、この両辺に $N^{\nu-1}$ をほどこすと、第二項以下は 0 となるから

$N^{\nu-1}(\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i1}\boldsymbol{a}_i) = 0$

である。したがって、$\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i1}\boldsymbol{a}_i \in W^{(\nu-1)}$ である。また、$\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i1}\boldsymbol{a}_i \in \{\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu}\}\} \in W^{(\nu)}$ なので、$(*_\nu)$ から直和であるから $\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i1}\boldsymbol{a}_i = 0$ である。$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu}$ は一次独立なので $c_{11} = c_{21} = \cdots = c_{r_\nu 1} = 0$ となる。ここまでは上の証明と同じ。

次に、※の式の両辺に $N^{\nu-2}$ をほどこすと第3項以下は 0 となるから

$N^{\nu-2}(\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i2}N\boldsymbol{a}_i) = N^{\nu-1}(\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i2}\boldsymbol{a}_i) = 0$

となるから、$\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i2}\boldsymbol{a}_i \in W^{(\nu-1)}$、$\sum_{i=1}^{r_\nu} c_{i2}\boldsymbol{a}_i \in \{\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu}\}\}$ なので、$(*_\nu)$ から同様にして、$c_{12} = c_{i2} = \cdots = c_{r_\nu 2} = 0$ となる。

以下これを続けると $c_{pq} = 0$（$p = 1, \cdots, r_\nu$, $q = 1, \cdots, \nu$）

つまり一次独立であることが証明された。ただし、P. 144 例3から縦の列が一次独立であることは明らかであった。

②

$$\boxed{\{\{N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu}\}\} \cap W^{(\nu-2)} = \{0\}}$$

このことは、$W^{(\nu-2)}$ の基底と $N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ をあわせたものは一次独立であるということを意味する。

③

$$\boxed{r_\nu \leqq r_{\nu-1}}$$

$r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_\nu \geqq 1$

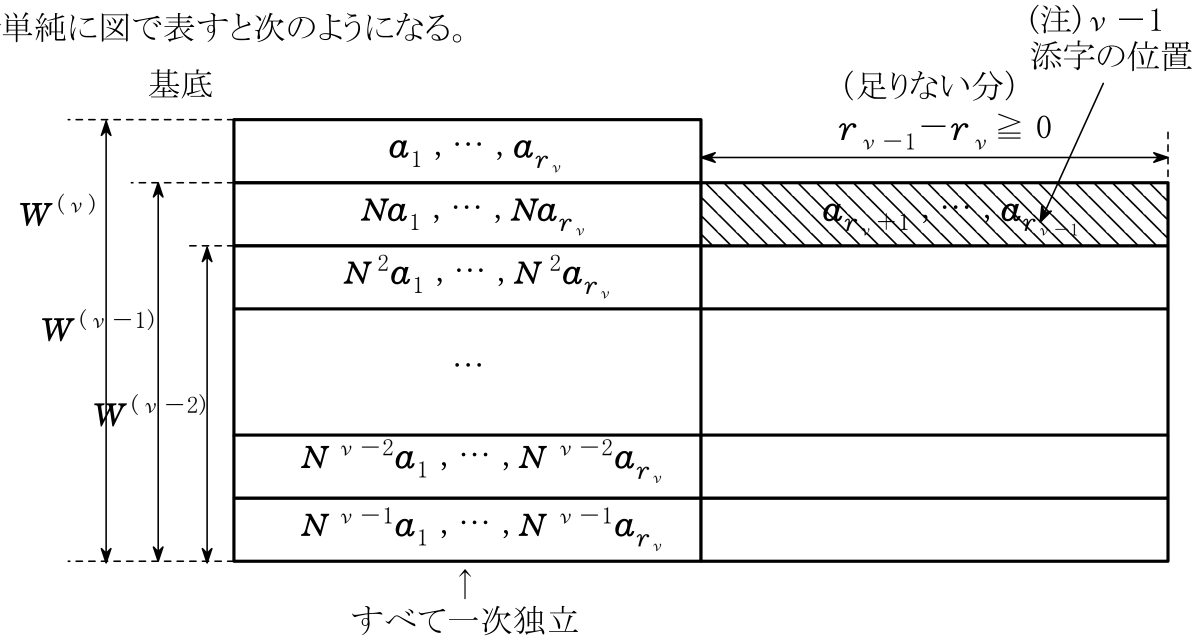
（証明）$r_\nu \geqq 1$（もし $r_\nu = 0$ ならば $W^{(\nu-1)} = W^{(\nu)}$ となってしまい、$N^\nu = 0$ に反する）

$W^{(\nu-1)}$ の任意の底に $r_\nu$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu}$ をつけ加えて $W^{(\nu)}$ の底になるようにしたとする。$N\boldsymbol{a}_1, N\boldsymbol{a}_2, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-1)}$ であり、$W^{(\nu-2)}$ の基底と $N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ をあわせたものは一次独立であるということから、$W^{(\nu-2)}$ の基底と $N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ をあわせたものだ

けでは $W^{(\nu-1)}$ の基底として足りない可能性がある。したがって

$r_\nu \leqq r_{\nu-1}$ が言える。故に、$r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_\nu \geqq 1$ となる。

以上を単純に図で表すと次のようになる。




同様なことを続けていくと、$r_{\nu-1}-r_\nu$ 個のベクトル $a_{r_\nu+1}, \cdots, a_{r_{\nu-1}}$ を適当にとれば

$W^{(\nu-2)}$ の底に $Na_1, \cdots, Na_{r_\nu}, a_{r_\nu+1}, \cdots, a_{r_{\nu-1}}$ を付け加えて $W^{(\nu-1)}$ の底になるように

することができる。そのとき

$(*_{\nu-1})$　$W^{(\nu-1)} = \{\{Na_1, \cdots, Na_{r_\nu}, a_{r_\nu+1}, \cdots, a_{r_{\nu-1}}\}\} \dotplus W^{(\nu-2)}$　(直和)

したがって上と同様にして

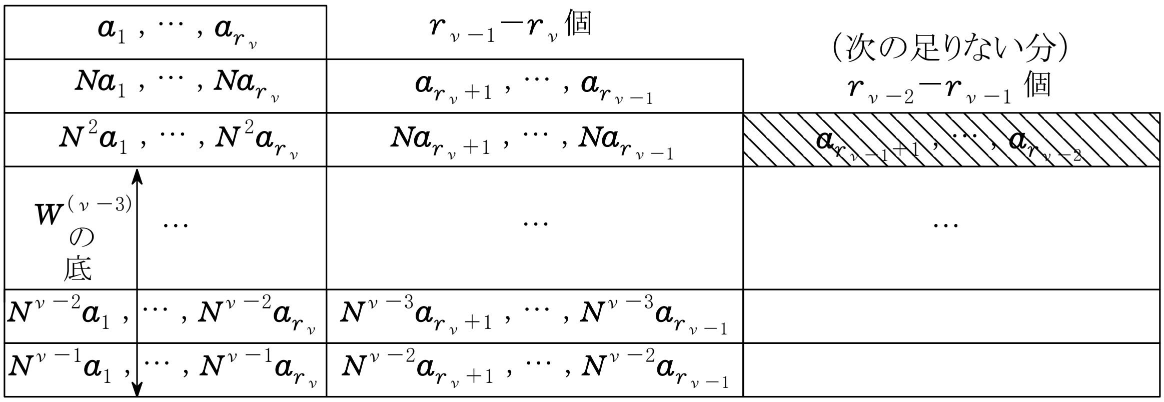
$N^2a_1, \cdots, N^2a_{r_\nu}, Na_{r_\nu+1}, \cdots, Na_{r_{\nu-1}} \in W^{(\nu-2)}$

は一次独立、かつ

$\{N^2a_1, \cdots, N^2a_{r_\nu}, Na_{r_\nu+1}, \cdots, Na_{r_{\nu-1}}\} \cap W^{(\nu-3)} = \{0\}$　(直和)

$r_{\nu-1} \leqq r_{\nu-2}$　だったので

図にすると



この手順で並べていくと、縦横のベクトルが一次独立であることはわかる。斜めの関係も調べる必要があるが、ここは直和になっていることから一次独立になることがわかる。

なぜなら、上の段のあるベクトルとそれよりも下の段のいくつかのベクトルと一次従属であれば、上の段のベクトルは下の段のベクトルの線型結合で表すことができる。つまり、上の段のベクトルは下の段の部分空間に含まれてしまう。よって、$\{0\}$ に反する。

よって、以下同様にして

$r_\nu \leqq r_{\nu-1} \leqq \cdots \leqq r_1$

で、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_1}$ を適当に選べば

$\nu - k = i$ とすれば

$(*_{\nu-k})\quad W^{(\nu-k)} = \{\{N^k\boldsymbol{a}_1, \cdots, N^k\boldsymbol{a}_{r_\nu}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{\nu-k+1}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{\nu-k}}\}\} \dotplus W^{(\nu-k-1)}$

$(*_i)\quad W^{(i)} = \{\{N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_1, \cdots, N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_{r_\nu}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_i}\}\} \dotplus W^{(i-1)}$ （直和）

となることが証明される。そのとき、$N^k\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, N^k\boldsymbol{a}_{r_i}$（$1 \leqq i \leqq \nu$, $0 \leqq k \leqq i-1$）は全体として

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $V^n$ の底 | $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu}$ | | | | |
| | $N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ | $\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ | | | |
| | $N^2\boldsymbol{a}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ | $N\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ | | | |
| | $\cdots$ | $\cdots$ | | | |
| | $N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_1, \cdots, N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ | $N^{\nu-3}\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}, \cdots, N^{\nu-3}\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ | $\cdots$ | $\boldsymbol{a}_{r_3+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_2}$ | |
| | $N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_1, \cdots, N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_{r_\nu}$ | $N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}, \cdots, N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ | $\cdots$ | $N\boldsymbol{a}_{r_3+1}, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_2}$ | $\boldsymbol{a}_{r_2+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_1}$ |

（注）基底が足りる場合は、横に伸びずにそのまま次の段にいく場合がある。

さて、$r_{i+1}+1 \leqq j \leqq r_i$（$i = \nu$, $k = 0$ のときは $r_{i+1} = 0$） に対し

($) $\{\{\boldsymbol{a}_j, N\boldsymbol{a}_j, \cdots, N^{i-1}\boldsymbol{a}_j\}\}$

は $N$ − 不変な部分空間である。

（すべて一次独立だから）

（$r_{i+1}+1 \leqq j \leqq r_i$）

| | |
|---|---|
| $W^{(i)}$ の底 | $\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_i}$ |
| | $N\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, N\boldsymbol{a}_j, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_i}$ |
| | |
| | |
| | $N^{i-2}\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \cdots, N^{i-2}$ |
| | $N^{i-1}\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, \cdots, N^{i-1}\boldsymbol{a}_{r_i}$ |

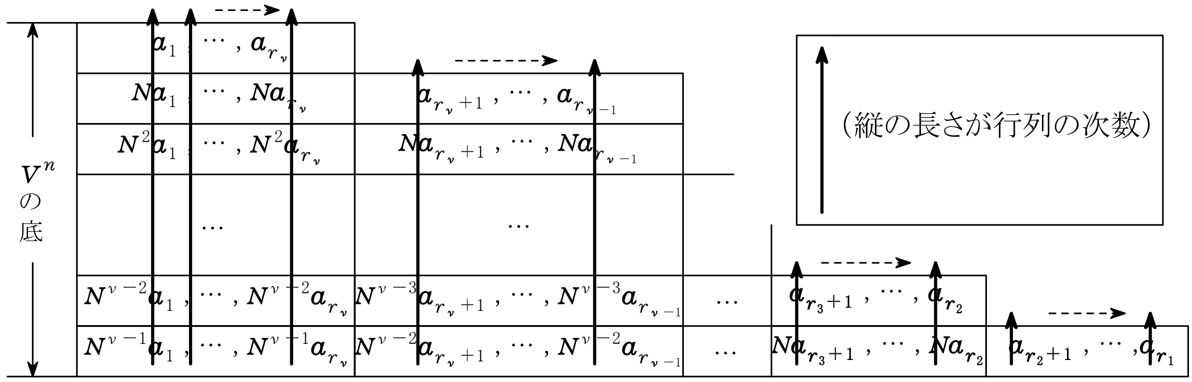
$W^{(i)} = \{\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{x} \in V^n, N^i = 0\}$

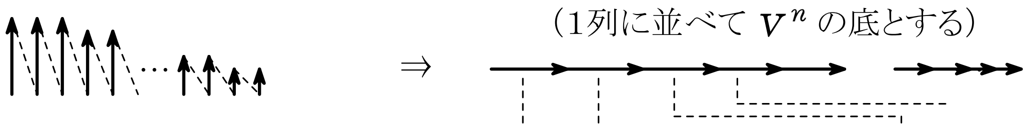
したがって

$$N(N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j) = (0, N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \cdots, N\boldsymbol{a}_j)$$

$$= (N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 次行列}$$

故に、$V^n$ は($) いくつかの直和に分解される。




$$N(N^{i-1}\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_1, N^{i-1}\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_2, \cdots)$$

$$= (0, N^{i-1}\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_1, 0, N^{i-1}\boldsymbol{a}_2, \cdots, N\boldsymbol{a}_2, \cdots)$$

$$= (N^{i-1}\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_1, N^{i-1}\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_2, \cdots)\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \ddots \\ & & \ddots \end{matrix} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

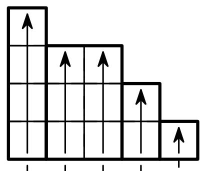
よって、$N$ は

$$(\$\$) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

なる形の行列のいくつか斜めに並べてできる行列に相似である。また、その様な行列を冪零行列の標準形という。

上の階段の図のことを冪零行列のジョルダン・ダイヤグラムと呼ぶそうである。つまり、ジョルダン・ダイヤグラムの形がわかれば冪零行列の標準形がわかることになる。

（例）冪零行列 $N$ のジョルダン・ダイヤグラムが次の形をしているとする。



この矢印上にならぶベクトルを底とした部分空間に直和分解されることになる。

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{matrix} & & & & \\
& \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix} & & & \\
& & \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix} & & \\
& & & \begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix} & \\
& & & & 0
\end{pmatrix}
$$

この結果から $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ の底を上のジョルダン・ダイヤグラムの矢印の順にとれば、($$) から

$$
A^{(i)} \sim \begin{pmatrix}
\begin{matrix}\alpha_i & 1 & & 0\\ & \alpha_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \alpha_i\end{matrix} & & & 0\\
& \boxed{\begin{matrix}\alpha_i & 1 & & 0\\ & \alpha_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \alpha_i\end{matrix}} & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & \alpha_i
\end{pmatrix}
$$

ジョルダン細胞

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix}
\begin{matrix}\alpha_1 & 1 & & 0\\ & \alpha_1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1\\ 0 & & & \alpha_1\end{matrix} & & & & 0\\
& \ddots & & & \\
& & \boxed{\begin{matrix}\alpha_1 & 1 & & 0\\ & \alpha_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \alpha_1\end{matrix}} & & \\
& & & \ddots & \\
0 & & & & \begin{matrix}\alpha_s & 1 & & 0\\ & \alpha_s & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \alpha_s\end{matrix}
\end{pmatrix}
$$

と表現できる。このような形の行列を $Jordan$ の標準形といい、また

$\begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & 0 \\ & \alpha_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha_i \end{pmatrix}$ の形の行列を $Jordan$ 細胞とよぶ。

さて、冪零行列の標準形の一意性だが、$i$ 次行列の個数は

$r_i - r_{i+1} = m_i - m_{i-1} - (m_{i+1} - m_i) = 2m_i - m_{i-1} - m_{i+1}$

P. 109 定理7から、$dim\,f(V^n) = n - dim\,f^{-1}(0)$ , $f^{-1}(0) = \{ \boldsymbol{x} \in V^n \,;\, N^i \boldsymbol{x} = 0 \} = W^{(i)}$

$rank\,N^i = n - m_i \;\rightarrow\; m_i = n - rank\,N^i$ なので

$= 2(n - rank\,N^i) - (n - rank\,N^{i-1}) - (n - rank\,N^{i+1})$

$= rank\,N^{i-1} + rank\,N^{i+1} - 2rank\,N^i$

したがって、$N$ によって一意的に決まる。

ならば、相似な標準形を $B$ とすれば、正則行列 $Q$ があって $B = Q^{-1}NQ$ とすることができる。

$B^i = Q^{-1}N^iQ$ となり、P. 111 定理8 (16) から、$rank\,N^i = rank\,B^i$ となる。

つまり、相似な冪零行列は $N$ の標準形に一致する。

次に、$Jordan$ の標準形の一意性だが

（注意） $N^{(i)} = A^{(i)} - \alpha_i E_{n_i}$ に対する $r_k$ は $W_{\alpha_i}^{(k)} = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V^n , (A - \alpha_i E)^k \boldsymbol{x} = 0 \}$ から

$dim\,W_{\alpha_i}^{(k)} = dim\,f^{-1}(0) = n - dim\,f(V^n) = n - rank\,(A - \alpha_i E)^k$ より、

$r_k = dim\,W_{\alpha_i}^{(k)} - dim\,W_{\alpha_i}^{(k-1)}$

$= (n - rank\,(A - \alpha_i E)^k) - (n - rank\,(A - \alpha_i E)^{k-1})$

$= rank\,(A - \alpha_i E)^{k-1} - rank\,(A - \alpha_i E)^k$

したがって、$\nu_i$（$A$ の最小多項式 $\phi_A(x)$ における根 $\alpha_i$ の重複度）は $r_k = 0$ となる、つまり、

$rank\,(A - \alpha_i E)^k = rank\,(A - \alpha_i E)^{k+1}$ となる最小の $k$ に等しく、$A$ によって一意的に決まる。（安定像空間とP. 152 注意 1 参照）

また、相似な行列 $B$ は固有値が等しく、上記と同様に $B = Q^{-1}AQ$ とおくと

$(B - \alpha_i E)^k = (Q^{-1}AQ - \alpha_i E)^k = \{ Q^{-1}(A - \alpha_i E)Q \}^k = Q^{-1}(A - \alpha_i E)^k Q$

$r_k = rank\,(B - \alpha_i E)^{k-1} - rank\,(B - \alpha_i E)^k$

$= rank\,(A - \alpha_i E)^{k-1} - rank\,(A - \alpha_i E)^k$

となり等しくなる。

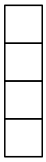
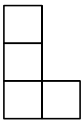
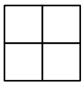
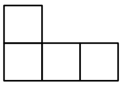
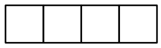
つまり、相似であれば、固有値は一致し、最小多項式も等しく、$Jordan$細胞の大きさが等しくなるので、並べる順番を除けば一致することがわかる。

## （P. 150　問4）

$n$ = 4 の場合

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（ジョルダン・ダイヤグラム）

## （例題）

行列 $\boldsymbol{A}$ のジョルダンの標準形 $\boldsymbol{J}$ と変換行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ。（線型代数入門　東大出版　P. 193）

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0&2&1\\-4&6&2\\4&-4&0\end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda&-2&-1\\4&\lambda-6&-2\\-4&4&\lambda\end{vmatrix} = \lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8 = (\lambda-2)^3$$

→　固有値は $\lambda = 2$ (重複度 3)

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}-2&2&1\\-4&4&2\\4&-4&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{（基本変形）}$$

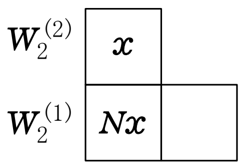
$rank(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) = 1$

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ は冪零行列なので、ランクを求めると、$dim\ \boldsymbol{W}_2^{(1)} = \boldsymbol{r}_1 = 3-rank(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) = 2$

なので、ジョルダン・ダイヤグラムの底辺の長さが 2 と

いうことでジョルダン細胞の個数は↑の本数なので底辺の長さと一致する。

つまり、ジョルダン細胞は2個になる。




$\boldsymbol{W}_2^{(1)} = \{\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}^3,\ \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} = 0\}$

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} = 0$ の一般解は

$$\begin{pmatrix}-2&2&1\\-4&4&2\\4&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\to\quad -2x+2y+z = 0 \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha\\2\beta\end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta\ \text{は任意})$$

$\boldsymbol{Nx} \in \boldsymbol{W}_2^{(1)}$　でなければならないので、$\boldsymbol{Nx} = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha\\2\beta\end{pmatrix}$ を満たす必要がある。

そのためには P. 117 定理11から、$rank(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}) = rank(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$ なので

$rank\,(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\,,\boldsymbol{p}\,) = 1$ でなければならない

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\,,\boldsymbol{p}\,) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & \alpha+\beta \\ -4 & 4 & 2 & \alpha \\ 4 & -4 & -2 & 2\beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+4\beta \end{pmatrix} \rightarrow \alpha+2\beta = 0$$

でなければならない。

したがって、$\alpha = 2$ , $\beta = -1$ として、$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\,)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ を解くと

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = 1 \\ -4\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z} = 2 \\ 4\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z} = -2 \end{cases} \rightarrow -2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = 1 \rightarrow \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ とする。

$\boldsymbol{p}_1$ と独立した、$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} = 0$ の解として、

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = 0 \rightarrow \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ （ $\alpha = 0$ , $\beta = 1$ , $\alpha+2\beta \neq 0$ なので、$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\,)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_3$ の解はない。）

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ジョルダン・ダイヤグラム

| | |
|---|---|
| $p_2 = N^{-1}p_1$ | |
| $Np_2 = p_1$ | $p_3$ |

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ← ジョルダンの標準形

## （連立一次方程式の復習） 線型代数学　笠原晧司 著　サイエンス社

（基本変形）

左からの基本変形 $S$ は行、右からの基本変形 $S'$ は列に作用する。

（逆行列の求め方）

$$S_k\cdots S_2S_1AS_1'S_2'\cdots S_\ell' = E \rightarrow S_k\cdots S_2S_1A = S_\ell'^{-1}S_{\ell-1}'^{-1}\cdots S_1'^{-1} \rightarrow S_1'S_2'\cdots S_\ell'S_k\cdots S_2S_1A = E$$

したがって、$A^{-1} = S_1'S_2'\cdots S_\ell'S_k\cdots S_2S_1$

具体的計算方法は

$[\,\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}\,]$ を左からの基本変形だけで $[\,\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{D}\,]$ に変形したら、$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{D}$ である。

また、$S_k\cdots S_2S_1AS_1{}'S_2{}'\cdots S_\ell{}' = E \to AS_1{}'S_2{}'\cdots S_\ell{}' = S_1^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}S_k^{-1} \to AS_1{}'S_2{}'\cdots S_\ell{}'S_k\cdots S_2S_1 = E$

したがって、$A^{-1} = S_1{}'S_2{}'\cdots S_\ell{}'S_k\cdots S_2S_1$

この場合は右からの基本変形なので

$\left[\dfrac{A}{E}\right]$ を右からの基本変形だけで $\left[\dfrac{E}{D}\right]$ に変形したら、$A^{-1} = D$ である。

（連立一次方程式の解法） $rank\, A = k$ とする。列の順序を適当にかえて（変数の順序もそれに応じてかえる必要がある） $A_1$ を正則行列にする。

$$Ax = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ & A_1 & & \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{k+1,1} & \cdots & \cdots & a_{k+1,k} \\ & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mk} \end{matrix} & \begin{matrix} & \cdots & \\ & & \\ a_{m,k+1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

$$PAx = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & a'_{1k+1} & \cdots & a'_{1n} \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{kn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \ (P = \text{左からの基本変形の積})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + A_1^{-1} \begin{pmatrix} a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = -A_1^{-1} \begin{pmatrix} a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A_1^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a'_{1k+1} & \cdots & a'_{1n} \\ & \cdots & \\ a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_k \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{pmatrix}$ として、解空間は$n-k$ 次元ベクトル空間となる。

## （例題）

行列 $A$ のジョルダンの標準形 $J$ と変換行列 $P$ を求めよ。（線型代数入門　東大出版　P. 194）

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & \lambda-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \lambda(\lambda-1)\{(\lambda-2)(\lambda-1)-1\} - \lambda\{-1-\lambda+2\} - \{(\lambda-2)(\lambda-1)-1\} - 2 - \lambda + 2 - \lambda + 1 - 1 -$

$(\lambda-1)\{-2(\lambda-1)-1\} + 2 - 1 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda-1)^4$

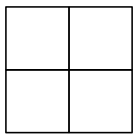
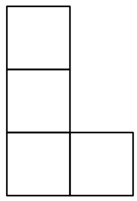
固有値は $\lambda = 1$ (4重根)

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = 2$

ジョルダン細胞の個数は 4－2 = 2 個


または


方程式 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & b_3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & b_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & b_3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & b_4 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -b_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & b_3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & b_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2-b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & b_3+2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2-b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & b_3+2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3+b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$b_3+b_1+b_2 = 0$ , $b_4-b_1 = 0$ として、$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_2-b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_2-b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2-x_3-b_1 \\ -x_2-x_3-b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta - b_1 \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta + b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0$ の一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \boldsymbol{C})$$

次に、$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつためには、$b_3 + b_1 + b_2 = 0$ , $b_4 - b_1 = 0$ が必要十分である。したがって $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix}$ はその条件である、$\beta - \alpha - \beta + \alpha = 0$ , $-\alpha - \beta - (-\alpha - \beta) = 0$ を満たすので解をもつ。このことは $\alpha, \beta$ は任意なので、2つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{p}_1$ , $\boldsymbol{p}_3$ を選ぶことができ、$\boldsymbol{p}_2$ ,$\boldsymbol{p}_4$ を解くことができるので、$\boldsymbol{J}(1, 1)+\boldsymbol{J}(1, 3)$ はありえないことがわかる。

ジョルダン・ダイヤグラム

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{p}_1$ | $\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{p}_3$ |
| $\boldsymbol{p}_1$ | $\boldsymbol{p}_3$ |

① $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ としたとき $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta - b_1 \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta + b_2 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② $\alpha = 0$ , $\beta = 1$ としたとき $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta - b_1 \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta + b_2 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$