（P．327　定理15．1）

1）$\Gamma(x)$ は $x > 0$ で連続、さらに、C^∞ 級であり、任意の $n \in N$ に対し n 階導関数は次の式で与えられる。

(15.2) $$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t)^n dt$$

2）$\ell og\,\Gamma(x)$ は $x > 0$ で凸関数である。

（証明の前に $n = 1$ として確かめてみる。）

(15.2’) $$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t) dt$$

$x \in I = \{ x \in R \mid x > 0 \}$, $t \in J = \{ t \in R \mid t > 0 \}$ とおく

a) 定理12．1から $x > 0$ ならば $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$ は収束する。

b) $y = e^{-t} t^{x-1}$ として、$\dfrac{\partial y}{\partial x} = e^{-t} (\ell og\ t) t^{x-1}$ は $J \times I$ で連続である。

c) $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t) dt$ が I 上広義一様収束することを示す。

任意の $\alpha > 0$ に対し、$\ell og\ t = -x$ と置けば、$e^{-x} = t \ \rightarrow e^{-\alpha x} = t^\alpha$

($e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = t$ （$x \to \infty \ \Leftrightarrow\ t \to +0$ ））

$$\lim_{t \to 0} t^\alpha \ell og\ t = \lim_{x \to \infty} -x e^{-\alpha x} = \lim_{x \to \infty} -\frac{x}{e^{\alpha x}} = 0$$

よって、$\dfrac{\ell og\ t}{t^{-\alpha}} = t^\alpha \ell og\ t \to 0\ (t \to +0)$　だから、$\ell og\ t = O(t^{-\alpha})$ $(t \to +0)$ となる。そこで、$f_1(x,t) = e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t)$ とおけば

$$\frac{e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t)}{t^{x-\alpha-1}} = \frac{e^{-t} (\ell og\ t)}{t^{-\alpha}} = e^{-t} (t^\alpha \ell og\ t) \to 0\ (t \to +0)$$

よって、$f_1(x,t) = O(t^{x-\alpha-1})$ $(t \to +0)$

だから、$\forall x > 0$ に対し $0 < \alpha < x$ となるように α をとれば

$0 < \alpha < x \ \rightarrow\ 0 < x - \alpha$　であり

$f_1(x,t) = O(t^\beta)$（ $\beta = x - \alpha - 1 > -1$ ）となり $\int_{\to 0}^{1} f_1(x,t)\, dt$ は<u>絶対収束</u>する。

（補足1）

定理11．3、2)において、$\int_{\to b}^{a} f(x)dx$ の場合、$f(x) = O((x-b)^{\beta})$ ($x \to b+0$) と置き換わる。それは、絶対収束を考える場合、$x-b>0$ となる必要があるからだ。よって、本証明では、$0-t$ ではなく、$t-0=t$ となり、$f_1(x,t) = O(t^{\beta})$ ($\beta = x-\alpha-1>-1$) でよいことになる。

ここで、$x_0>0$ を固定すれば、

$x_0 \leqq x$, $0<t \leqq 1$ で t^x は単調減少であるから、定理14．2より、

$|f_n(x,t)| = |e^{-t}t^{x-1}(\ell og\ t)| \leqq |e^{-t}t^{x_0-1}(\ell og\ t)| = |f_1(x_0,t)|$

$|f_1(x_0,t)| = M(t)$ とすれば、$\int_{\to 0}^{1} M(t)dt$ は収束するので、$x_0 \leqq x$ で上の積分

$\int_{\to 0}^{1} f_1(x,t)\,dt$ は I 上一様収束する。

次に、(P．115) $\dfrac{\ell og\ t}{t} \to 0$ ($t \to +0$) だから、$\ell og\ t = O(t)$ ($t \to +\infty$) である。

任意のmに対し

$\dfrac{e^{-t}}{t^{-m}} = \dfrac{t^m}{e^t} \to 0$ ($t \to +\infty$) (P．115)、$e^{-t} = O(t^{-m})$ ($t \to +\infty$) と合わせて

$$\frac{f_1(x,t)}{t^{x-1+1-m}} = \frac{e^{-t}t^{x-1}(\ell og\ t)}{t^{x-1+1-m}} = \frac{e^{-t}(\ell og\ t)}{t^{1-m}}$$

$$= \frac{e^{-t}}{t^{-m}} \times \left(\frac{\ell og\ t}{t}\right) \to 0\ (t \to +\infty)$$

$f_1(x,t) = O(t^{x-m})$ ($t \to +\infty$) を得るから、m を十分大きくすれば、

$x-m<-1$ として、定理11．3、1) より、

$\int_{1}^{+\infty} f_1(x,t)\,dt$

が<u>絶対収束</u>することがわかる。さらに $x_1>0$ を固定したとき、$x \leqq x_1$, $1 \leqq t$ で、

$|f_1(x,t)| = |e^{-t}t^{x-1}(\ell og\ t)| \leqq |e^{-t}t^{x_1-1}(\ell og\ t)| = |f_1(x_1,t)|$

だから、この積分は $x \leqq x_1$ で一様収束する。($|f_1(x_1,t)| = M(t)$ とする)

ここで、$0<x_0$, x_1 は任意だったので、$x_0 = x_1$ としてもよい。よって、広義積分(15

.2') の右辺が I 上一様収束することがわかった。したがって、定理14．4から

(15.2') が成り立つ。***END***

（n の場合の証明）　1）任意の $\alpha > 0$ に対し、$\ell og\ t = -x$ と置けば

$$e^{-x} = t \ \to e^{-\alpha x} = t^{\alpha} \quad \left(e^{-x} = \frac{1}{e^{x}} = t \quad (x \to \infty \ \Leftrightarrow \ t \to +0) \right)$$

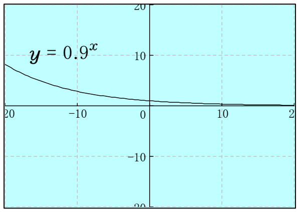
$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha} \ell og\ t = \lim_{x \to \infty} -x e^{-\alpha x} = \lim_{x \to \infty} -\frac{x}{e^{\alpha x}} = 0$$

よって、$\dfrac{\ell og\ t}{t^{-\alpha}} = t^{\alpha} \ell og\ t \to 0 \ (t \to +0)$　だから、$\ell og\ t = O(t^{-\alpha})$ $(t \to +0)$ となる。そこで、$f_n(x,t) = e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t)^n$ とおけば

$$\frac{e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t)^n}{t^{x-n\alpha-1}} = \frac{e^{-t} (\ell og\ t)^n}{t^{-n\alpha}} = e^{-t} (t^{\alpha} \ell og\ t)^n \to 0 \ (t \to +0)$$

よって、$f_n(x,t) = O(t^{x-n\alpha-1})$ $(t \to +0)$

だから、$\forall x > 0$ に対し $0 < \alpha < \dfrac{x}{n}$ となるように α をとれば



$0 < n\alpha < x \ \to \ x - n\alpha > 0$ であり

$f_n(x,t) = O(t^{\beta})$（ $\beta = x - n\alpha - 1 > -1$ ）となるから $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} f_n(x,t)\,dt$ は<u>絶対収束</u>する。

ここで、$x_0 > 0$ を固定すれば、

$x_0 \leqq x$, $0 < t \leqq 1$ で t^x は単調減少であるから、定理14．2より、

$$| f_n(x,t) | = | \ e^{-t} t^{x-1} (\ell og\ t)^n \ | \leqq | \ e^{-t} t^{x_0 - 1} (\ell og\ t)^n \ | = | \ f_n(x_0,t) |$$

$| \ f_n(x_0,t) | = M(t)$ とすれば、$\displaystyle\int_{\to 0}^{1} M(t) dt$ は収束するので、$x_0 \leqq x$ で上の積分 $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} f_n(x,t)\,dt$ は一様収束する。

次に、(P. 115) $\dfrac{\ell og\ t}{t} \to 0$ (t $\to +0$) だから、 $\ell og\ t = O(t)$ $(t \to +\infty)$ である。

任意のmに対し

$\dfrac{e^{-t}}{t^{-m}} = \dfrac{t^m}{e^t} \to 0 \ (t \to +\infty)$ (P. 115)、$e^{-t} = O(t^{-m})$ $(t \to +\infty)$ と合わせて

$$\frac{f_n(x,t)}{t^{x+n-1-m}} = \frac{e^{-t}t^{x-1}(\ell og\ t)^n}{t^{x+n-1-m}} = \frac{e^{-t}(\ell og\ t)^n}{t^{n-m}}$$

$$= \frac{e^{-t}}{t^{-m}} \times \left(\frac{\ell og\ t}{t} \right)^n \to 0\ (t \to +\infty)$$

$f_n(x,t) = O(t^{x+n-1-m})$ $(t \to +\infty)$ を得るから、m を十分に大きくすれば、

$x+n-1-m < -1$ として、定理11．3、1）より、

$$\int_1^{+\infty} f_n(x,t)\, dt$$

が絶対収束することがわかる。さらに $x_1 > 0$ を固定したとき、$x \leqq x_1$, $1 \leqq t$ で、

$|f_n(x,t)| = |\ e^{-t}t^{x-1}(\ell og\ t)^n\ | \leqq |\ e^{-t}t^{x_1-1}(\ell og\ t)^n\ | = |f_n(x_1,t)|$

だから、この積分は $x \leqq x_1$ で一様収束する。($|f_n(x_1,t)| = M(t)$ とする)

ここで、$0 < x_0$, x_1 は任意だったので、$x_0 = x_1$ としてもよい。よって、広義積分(15.2) の右辺が任意の n に対して I 上一様収束することがわかった。

したがって、定理14．4により、$\Gamma(x)$ は $x > 0$ で何回でも微分可能で、n 階導関数は(15.2)で与えられることが n に関する帰納法で証明される。特に、$\Gamma(x)$ は $x > 0$ で連続である。

（P．329　定理15．2の証明）

$f(x+n) = f(x+n-1+1) = (x+n-1)f(x+n-1)$

$= (x+n-1)f(x+n-2+1)$

$= (x+n-1)(x+n-2)f(x+n-2)$

↓

$= (x+n-1)(x+n-2)(x+n-3) \cdots (x+1)\, x\, f(x)$ ・・・ (15.4)

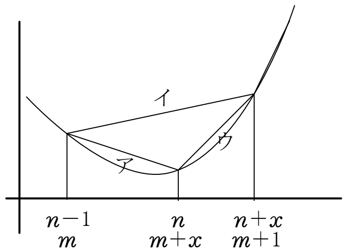
$g(x) = \ell og\ f(x)$ とし、$0 < x < 1$, $2 \leqq n \in N$ とする。

$\ell og\ f(x)$ は凸関数なので、定理2．13、b) より、$0 < a < t < b$ に対して、

$$\frac{g(t)-g(a)}{t-a} \underset{ア}{\leqq} \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \underset{イ}{\leqq} \frac{g(b)-g(t)}{b-t} \quad \cdots (15.6)$$

区間を $(n-1\ ,\ n\ ,\ n+x)$ に適用すると

すると、上の(15.6)の(イ)から



$(\ 0 < x \leqq 1\ )$

$$\frac{g(n)-g(n-1)}{n-(n-1)} \leqq \frac{g(n+x)-g(n)}{(n+x)-n}$$

$$\frac{\ell og\, f(n)-\ell og\, f(n-1)}{n-(n-1)}$$

$$\leqq \frac{\ell og\, f(n+x)-\ell og\, f(n)}{(n+x)-n}$$

ここで、$f(n+1)=n!$ (15.5) なので、

$\ell og\, f(n)-\ell og\, f(n-1)=\ell og1+\ell og2+\cdots+\ell og(n-1)-(\ell og1+\ell og2+\cdots+\ell og($

$n-2))=\ell og(n-1)$

よって、 $\ell og(n-1) \leqq \dfrac{\ell og\, f(n+x)-\ell og\, f(n)}{x}$ $(\ n \geqq 2\ )$ ・・・①

次に、$(m\ ,\ m+x\ ,\ m+1)$ 区間に(15.6)の(ア)から

$$\frac{g(m+x)-g(m)}{(m+x)-m} \leqq \frac{g(m+1)-g(m)}{(m+1)-m} = \frac{\ell og\, f(m+1)-\ell og\, f(m)}{1}$$

$\dfrac{\ell og\, f(m+x)-\ell og\, f(m)}{x} \leqq \ell og\, m$ $(\ m \geqq 2)$ ・・・②

①は $x=1$ で成り立つ。また、(15.6)の(ア)は $t=b$ ($x=1$)でも成り立つので

①、②は $x=1$ で成り立つ。

①にxをかけたものにおける指数関数 exp の値を考えて得られる不等式に $f(n)$ をかければ、

$x\ell og(n-1) \leqq \ell og\dfrac{f(n+x)}{f(n)} \rightarrow (n-1)^x \leqq \dfrac{f(n+x)}{f(n)}$　　となって

①は、$(n-1)^x f(n) \leqq f(n+x)$　$(0 < x \leqq 1)\ (n \geqq 2)$

同様にして $\ell og\dfrac{f(m+x)}{f(m)} \leqq x\ell og(m)$ なので

②は、$f(m+x) \leqq m^x f(m)$　　　$(0 < x \leqq 1)\ (m \geqq 2)$

ここで、(15.4) を用い、$x(x+1)\cdots(x+n-1)$　または、$x(x+1)\cdots(x+m-1)$ で割れば

①は、$(n-1)^x f(n) \leqq (x+n-1)\cdots(x+1)\,xf(x)$

$$\frac{(n-1)^x f(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leqq f(x)$$

ここで、$n \geqq 2$ は任意だから、$n-1$ を p に置き換えてもよい。そして、(15.5) を用いると、$n-1=p$ として

①は、$\dfrac{p!p^x}{x(x+1)\cdots(x+p)} \leqq f(x)$ ($0<x \leqq 1$) ($p \geqq 1$)

②は、$f(x) \leqq \dfrac{m^x f(m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}$　同様に(15．5)を用いると

②は、$f(x) \leqq \dfrac{m^x(m-1)!}{x(x+1)\cdots(x+m-1)} = \dfrac{m^x m!}{x(x+1)\cdots(x+m-1)(x+m)} \cdot \dfrac{(x+m)}{m}$

を得る。以上をまとめると、

① $\dfrac{p!p^x}{x(x+1)\cdots(x+p)} \leqq f(x)$　($0<x \leqq 1$) ($p \geqq 1$)

② $f(x) \leqq \dfrac{m^x m!}{x(x+1)\cdots(x+m-1)(x+m)} \cdot \dfrac{(x+m)}{m}$　($0<x \leqq 1$) ($m \geqq 2$)

いままで、p と m は別々にしてきたが、$p\,,m \geqq 2$ ならば、それぞれの不等式は成り立つので、$n \geqq 2$ として両方とも n に置き換えると

(15.9)　$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqq f(x) \leqq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{(x+n)}{n}$$

を得る。この不等式の左辺を$a_n(x)$ とおけば、

$a_n(x) \leqq f(x) \leqq a_n(x) \cdot \dfrac{(x+n)}{n}$　　($0<x \leqq 1\,,n \geqq 2$)

$0 \leqq f(x) - a_n(x) \leqq a_n(x)\left(\dfrac{x+n}{n} - 1\right) \leqq f(x)\dfrac{x}{n} \to 0\ (n \to \infty)$

だから、$a_n(x) \to f(x)\ (n \to \infty)$ である。 すなわち、

(15.10)　$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

を得る。ここで、$0<x \leqq 1$ であるが、任意の $x>0$ に対しては、$x=y+m\,,0<y$

$\leqq 1$, $m \in \boldsymbol{N}$ と置けるので、

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!n^y n^m}{(y+m)(y+m+1)\cdots(y+n+m)}$$ となり

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x \boldsymbol{n^m} y(y+1)(y+2)\cdots(y+m-1)}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)\boldsymbol{(y+n+1)(y+n+2)\cdots(y+n+m)}}$$

$= y(y+1)(y+2)\cdots(y+m-1)\, f(y) = f(y+m) = f(x)$

となる。ここで、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{(y+n+1)(y+n+2)\cdots(y+n+m)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n}{(y+n+1)} \times \frac{n}{(y+n+2)} \times \cdots \times \frac{n}{(y+n+m)} \right\} = 1$$ を用いた。

ところで、$\Gamma(x)$ も ⅰ)、ⅱ)、ⅲ)をみたすから、$\Gamma(x)$ についても(15.10) が成り立ち、したがって定理の結論である(15.3) が成り立つ。

（P.330　例1）　P.321の例3で触れたように**部分積分**を使う。

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1}\frac{1}{(1-t)^x}\, t^x\, dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

ここで、$\int fg' = fg - \int f'g$ なので、$f = \left(\frac{t}{1-t}\right)^x$ ，$g' = (1-t)^{x+y-1}$ とすれば

$m = 1-t \;\rightarrow\; \frac{dm}{dt} = -1 \;\rightarrow\; dt = -dm$ より

$$g = \int (1-t)^{x+y-1}dt = -\int m^{x+y-1}dm = -\frac{1}{x+y}m^{x+y} = -\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}$$

$$f' = x\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1-t-(-t)}{(1-t)^2} = x\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}$$ から

$$= \left[-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}x\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$= \left[-\frac{(1-t)^y}{x+y} t^x \right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 (1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}\,dt$$

$$= \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x+y-(x-1)-2}dt$$

$$= \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

そこで、$y>0$ を固定したとき

$f(x) = \mathrm{B}(x\ ,\ y)\Gamma(x+y)$ は定理15．2の条件ｉ)、ⅱ)をみたす。なぜなら、

$f(x+1) = \mathrm{B}(x+1\ ,\ y)\Gamma(x+y+1) = \dfrac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)(x+y)\Gamma(x+y)$

$= x\mathrm{B}(x,y)\Gamma(x+y) = xf(x)$

を得る。よって 条件ｉ)をみたす。

条件ⅱ)については、$\ell og\, f(x) = \ell og\,\mathrm{B}(x,\ y)+\ell og\,\Gamma(x+y)$ なので $\ell og\,\Gamma(x+y)$ が条件ⅱ)をみたすことは定理15．1からわかる。残りの $\ell og\,\mathrm{B}(x,\ y)$ については $\mathrm{B}(x,y)>0$ は定理12．２，5) と同様にしてわかるので、あとは $\ell og\,\mathrm{B}(x,\ y)$ が $x>0$ で凸関数であることを示せばよい。そのための準備として、

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n dt$ が $x>0$，$y>0$ で広義一様収束することを示す必要がある。（ここでは、$y>0$ は固定されており、x の関数と考えている。）

$f_n(x,y,t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n$ とすれば、

$$\frac{f_n(x,y,t)}{(1-t)^{y-n\alpha-1}} = \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n}{(1-t)^{y-n\alpha-1}} = \frac{t^{x-1}(\ell og\ t)^n}{(1-t)^{-n\alpha}}$$

$= t^{x-1}((1-t)^{\alpha}\ell og\ t)^n \to 0\ (t\to 1)$

よって、$f_n(x,y,t) = O((1-t)^{y-n\alpha-1})\quad (t\to 1)$ となる。

そこで、$\forall x>0$ に対し、$0<\alpha<\dfrac{y}{n}$ となるような α をとれば、$0<n\alpha<y\to$ $-n\alpha<0<y-n\alpha \to -1-n\alpha<-1<y-n\alpha-1$ よって、$\beta=y-n\alpha-1$

とすれば、$\beta > -1$ となるので、 定理11．3、2)から、

$\int_0^1 f_n(x,y,t)dt$ は任意の $x > 0$, $y > 0$ に対し絶対収束する。

ここで、任意に $x_0 > 0$ を固定し、$x \geqq x_0$, $0 \leqq t < 1$ ならば、$-1 \leqq t-1 < 0 \to 1 \geqq 1-t > 0$ となり、$y = a^x$ ($0 < a \leqq 1$) は単調減少関数なので $|f_n(x,y,t)| =$

$|t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n| \leqq |t^{x_0-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n|$ だから、

$|t^{x_0-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n| = M(t)$ として、$\int_0^1 M(t)dt$ は上の結果から収束する。

よって、定理14．2から、 $x \geqq x_0$ で一様収束する。

つまり、$I = \{x \mid x \in R, x > 0\}$ とすれば I に含まれる任意の有界閉区間 $J = [x_1, x_2]$ をとれば、$x \geqq x_1$ で一様収束するので、上の積分は $x > 0$ で**広義一様収束することがわかる。**定理15．1と同様に n に関する帰納法で

$$g(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$g'(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)\,dt$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^n\,dt$$

$$g^{(n+1)}(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ell og\ t)^{n+1}dt$$

を得る。また、任意の $u \in R$ に対し

$g(x)u^2+2g'(x)u+g''(x)$

$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(u^2+2u\ell og\ t+(\ell og\ t)^2)dt$

$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(u+\ell og\ t)^2dt \geqq 0$

この二次式の判別式 D は $\dfrac{D}{4} = g'(x)^2-g(x)g''(x) \leqq 0$ となり

$(\ell og\ g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

$\to (\ell og\ g(x))'' = \left(\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)g''(x)-g'(x)^2}{g(x)} \geqq 0$

となって、$\ell og\ g(x)$ が凸関数であることがわかる。そこで、定理15．2 系1により

$f(x) = f(1)\,\Gamma(x)$

となる。

（P．331　定理15．2系2）

$0 < x+m = y$ として

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!n^y}{n^m \underbrace{(y-m)(y-m+1)\cdots(y-m+n)}_{n+1\text{ 個}}}$$

$$\underbrace{(y-m)(y-m+1)\cdots(y-m+n)}_{n+1\text{ 個}}\times\underbrace{\boldsymbol{(y-m+n+1)\cdots(y+n)}}_{m\text{ 個}}$$

は $(y-m)$ から $(y+n)$ までの $m+n+1$ 個の因子すべての積である。わかりにくいが実際に

$m = 3$, $n = 5$ としてやってみると

$(y-3)(y-2)(y-1)y(y+1)(y+2)\times(y+3)(y+4)(y+5)$

となり、9 個の因子の積になっている。

$$= \frac{n!n^y\boldsymbol{(y-m+n+1)\cdots(y+n)}}{n^m(y-m)(y-m+1)\cdots(y-m+n)\times\boldsymbol{(y-m+n+1)\cdots(y+n)}}$$

$$= \frac{1}{(y-m)(y-m+1)\cdots(y-m+n)(y-m+n+1)\cdots(y-1)}\times\frac{n!n^y}{y(y+1)\cdots(y+n)}$$

$$\times\frac{(y-m+n+1)\cdots\cdot(y+n)}{n^m}$$

第三の因子は分子が m 個の因子の積なので

$$\frac{(y-m+n+1)\cdots(y+n)}{n^m} = (1+\frac{y-m+1}{n})\cdots(1+\frac{y}{n}) \to 1 \quad (\ n \to +\infty\ )$$

第二の因子は $y > 0$ なので $\Gamma(y)$ に収束する。

$$(5.13)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{\Gamma(y)}{(y-m)(y-m+1)\cdots(y-1)}$$

$y = x+m$ を代入すると

$$= \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}$$

となる。m は適当だったので、$m+1$ としてみると

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{\Gamma(x+m+1)}{x(x+1)\cdots(x+m)}=\frac{(x+m)\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m)}$$

$$=\frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}$$

となり等しいことがわかる。また、x が 0 または負の整数の場合、分母の $x(x+1)\cdots(x+n)$ のいずれかが 0 となってしまうので定義域からはずす必要がある。

(P. 333　*Weierstrass*の公式)

$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ オイラー定数が収束することはP.370を参照せよ。任意の $x\in D$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x\log n}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\times\frac{1}{n!}}\qquad\leftarrow(\log n^x=x\log n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{x(\log n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}))}\frac{e^{(x+\frac{1}{2}x+\cdots+\frac{x}{n})}}{x(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{x(\log n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}))}\frac{e^{\frac{x}{1}}e^{\frac{x}{2}}\cdots e^{\frac{x}{n}}}{x(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}\quad\cdots\text{ア}$$

$$=\frac{e^{-Cx}}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{1}}e^{\frac{x}{2}}\cdots e^{\frac{x}{n}}}{x(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}=\frac{e^{-Cx}}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{(1+\frac{x}{k})}$$

$$=\frac{e^{-Cx}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}$$

第 I 章定理2．5，3) の $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ （$b\neq 0$）を使っている。つまり、ア 全体を a_n，$b_n=e^{x(\log n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}))}$ とし、ともに収束するのでアの右の因子が収束

することがわかる。よって次の等式を得る。

(5.17) $$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}$$

無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}$ が R で広義一様収束することを示す。

$(1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}} = 1+u_n$ (u_n は連続)とおく、任意に $L>0$ を決め、$|x| \leqq L$ のとき、n を十分大きく取れば、ある定数 K に関して

$$|u_n| \leqq K\frac{|x|^2}{n^2}$$

とすることができることを示す。 そうすれば、$|u_n| \leqq K\frac{L^2}{n^2}$ で、$\sum\frac{1}{n^2}$ は収束し、P. 390定理6. 4より、無限積が広義一様収束することがわかる。

まず、$n>L$ とし、 $\frac{|x|}{n}<1$ とすることができる。そこで、 $\frac{x}{n}=z$ とおいて

$|z| \leqq 1$ のとき $\left|\frac{u_n}{z^2}\right| = \left|\frac{(1+z)e^{-z}-1}{z^2}\right|$ が有界であることを示す。そうすれば、その上限を K とすれば証明できる。

さて、$\frac{(1+z)e^{-z}-1}{z^2}$ であるが、$z=0$ を除き、$|z| \leqq 1$ で連続であることは明らかである。

そこで、$z=0$ で連続であることがわかれば、有界閉区間で連続な関数は有界であるので K を定めることができる。

まずは準備することとして、

$b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{n!}$ とする。 $\lim_{k\to\infty} b_n = e^a$ （a は任意の実数） である。

$$b_n = 1+a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3!}+\frac{a^4}{4!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}$$

$$b_n = 1+a+\frac{a^2}{2}+a^3(\frac{1}{3!}+\frac{a}{4!}+\cdots+\frac{a^{n-3}}{n!})$$

$$b_n = 1+a+\frac{a^2}{2}+a^3c_n \quad \cdots \quad ①$$

ここで、( )の中を c_n とすれば、c_n は $n\to\infty$ で収束するはずである。特に有界である。

そこで、正数 M がとれて、

$|c_n| \leqq M \quad \cdots$ ②

とすることができる。

$(z>0)$ の場合　　$0<a$ となる a をとり、 $a\to +0$ を考える。

$|b_n-1-a-\dfrac{a^2}{2}|=|a^3c_n|$　であり、$n\to\infty$ のとき、②より、

$|e^a-1-a-\dfrac{a^2}{2}|=|e^a-a-1-\dfrac{a^2}{2}|\leqq a^3M$

となる。両辺をa^2で割って、$a\to +0$ とすれば aM で押さえられるので、

$$\lim_{a\to+0}\frac{e^a-a-1}{a^2}=\frac{1}{2}$$

となる。よって、

$$\lim_{z\to+0}\frac{(1+z)e^{-z}-1}{z^2}=\lim_{z\to+0}-\frac{1}{e^z}\times\frac{-(1+z)+e^z}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to+0}-\frac{1}{e^z}\times\frac{e^z-z-1}{z^2}=-\frac{1}{2}$$

$(z<0)$ の場合

$z=-a\,,\,a>0$ とする。

$(1+z)e^{-z}-1=(1-a)e^a-1=e^a-ae^a-1$

②を利用する。

$|b_n-ab_n-1+\dfrac{1}{2}a^2|$

$=|1+a+\dfrac{a^2}{2}+a^3c_n-a(1+a+\dfrac{a^2}{2}+a^3c_n)-1+\dfrac{1}{2}a^2|$

$=|1+a+\dfrac{a^2}{2}+a^3c_n-a-a^2-\dfrac{a^3}{2}-a^4c_n-1+\dfrac{1}{2}a^2|$

$= |\ a^3(c_n - \frac{1}{2} - ac_n)\ | \leqq a^3|\ c_n - \frac{1}{2}\ | + a^4|\ c_n\ |$

$n \to \infty$ のとき、②より、

$|\ e^a - ae^a - 1 + \frac{1}{2}a^2\ | \leqq a^3|\ M - \frac{1}{2}\ | + a^4 M$

となる。両辺を a^2 で割って、$a \to +0$ とすれば、$a|\ M - \frac{1}{2}\ | + a^2 M$ で押さえることができるので

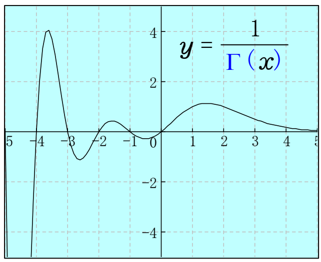
$$\lim_{a \to +0} \frac{e^a - ae^a - 1}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{z \to -0} \frac{(1+z)e^{-z} - 1}{z^2} = \lim_{z \to -0} \frac{e^{-z} + ze^{-z} - 1}{z^2} = \lim_{a \to +0} \frac{e^a - ae^a - 1}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

よって、$z = 0$ で連続になることがわかった。L は任意だったので、任意の有界閉区間を含ませることができるので広義一様収束することがわかる。よって、P.390定理6．4とP.308の定理13．3系2を参考にして $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}$ が R 上で連続であることがわかった。

(5.17) の右辺は任意の $x \in R$ で収束する。よって、$x = -m \in (-N)$ に対し $n = m$ のとき $(1 + \frac{(-m)}{n}) = 0$ となることが一度だけあるが、P.389の定理6．1から 0 となる因子を除いた無限積は収束するので、値は 0 となる。

(15.16) から、$\frac{1}{\Gamma(x)}$ は $x = -n$ で 0 として R 全体に拡張し、また、R で連続であったので、(5.17) が任意の $x \in R$ で成り立つことがわかった。



（P．333　定理15．3系2）

$0 < x + m = y$ とおくとき条件ｉ）から

$f(x+m-1+1) = (x+m-1)f(x+m-1)$

$= (x+m-1)(x+m-2)f(x+m-2)$

$= (x+m-1)(x+m-2)(x+m-3)f(x+m-3)$

$= (y-1)(y-2)\cdots(y-m)f(x)$

つまり

$$f(x) = \frac{f(y)}{(y-1)(y-2)\cdots(y-m)} = \frac{f(1)\Gamma(y)}{(y-1)(y-2)\cdots(y-m)}$$

$\Gamma(y) = \Gamma(x+m) = (x+m-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x) = (y-1)(y-2)\cdots(y-m\Gamma(x)$

なので

$$= \frac{f(1)(y-1)(y-2)\cdots(y-m)\Gamma(x)}{(y-1)(y-2)\cdots(y-m)} = f(1)\Gamma(x)$$

(P．334　定理15．5(相補公式))

(周期性) $\Gamma(1-x)$ の関係から、$D = R-(-N)$ が $R-Z$ になったことに注意したい。また、$\sin\pi(x+1) = \sin\pi x\cos\pi + \cos\pi x\sin\pi = -\sin\pi x$ であり

x を $x+1$ に置き換えると、$\Gamma(1-x) = (-x)\Gamma(-x)$ なので

$$\phi(x+1) = \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin\pi(x+1) = x\Gamma(x)\frac{\Gamma(1-x)}{-x}(-\sin\pi x) = \phi(x)$$

しかし、$\phi(x+1) = \phi(x)$ なので周期が 1 と考えるのは軽率であり、**周期に 1 をもつ**と考えた方がよい。証明の後半でその点はすっきりする。

参考までに、$\Gamma(x)$ は周期関数ではない。もし、周期 $a>0$ をもつならば、任意の $x\in R-(-N)$ に対して、

$\Gamma(x+a) = \Gamma(x)$ …①

x は任意であるので $x=1$ とすると、$\Gamma(1+a) = \Gamma(1) = 1$

$x=2$ とすれば、$\Gamma(2+a) = \Gamma(2) = 1! = 1$

ところが、定理15．3より、任意の $x\in R-(-N)$ に対して

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$…②

なので、$\Gamma(2+a) = \Gamma(1+a+1) = (1+a)\Gamma(1+a) = 1+a$ となる。

よって、$1 = 1+a$ となり、$a=0$ となって矛盾する。

(C^∞ 級)　$\phi(x)$が $x\in R$ で C^∞ 級であることを示す。

(15．20)'より

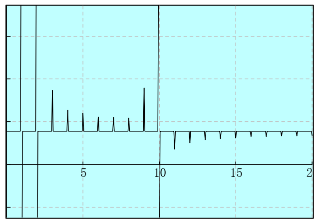
$$\phi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x = \Gamma(x+1)\Gamma(1-x)\frac{\sin\pi x}{x}$$

$$= \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\left(\pi - \frac{\pi^3 x^2}{3!} + \frac{\pi^5 x^4}{5!} - \cdots\right)$$

$-1 < x < 1$ ならば　$1-x > 0$, $1+x > 0$　なので、$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)$ は C^∞ 級 、$\left(\pi - \frac{\pi^3 x^2}{3!} + \cdots\right)$ も C^∞ 級 により、$-1 < x < 1$ で $\phi(x)$ は C^∞ 級となる。

ϕ は $R-Z$ で定義されていたが、$x \to \pm 0$ のとき、$\lim_{x\to\pm 0} \phi(x) = \pi$ となる。そこで、周期性から任意の $n \in Z$ に対し、$\lim_{x\to\pm 0} \phi(x) = \pi$ よって、$\phi(0) = \phi(n) = \pi$ （$n \in Z$）と定義すれば ϕ は R で連続になる。また、$|x| < 1$ で C^∞ 級なので R 全体で C^∞ 級となる。

$y = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\frac{\sin(\pi x)}{x}$



（不連続点処理をしていない。）

（(15．21)の式変形）

$$\sin\frac{\pi(x+1)}{2} = \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi x}{2}$$

なので、$R-Z \in D$ で $\frac{1}{2}$ の公式（定理15．4）から

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2} - \frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2} - \frac{x+1}{2}\right)\sin\frac{\pi(x+1)}{2}$$

$$= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-x}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\pi x\;\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-x+2}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-x+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\pi x\;\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-x+2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\pi x \cdot 2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x) \cdot 2^{1+x-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^{1-x} \cdot 2^{x}\,\pi\sin\pi x \cdot \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi\,\phi(x)$$

((15．22) の証明)

$$\pi\,\phi(x)=\phi(\frac{x}{2})\phi(\frac{x+1}{2})$$

$$\log\pi+\log\phi(x)=\log\phi(\frac{x}{2})+\log\phi(\frac{x+1}{2})$$

両辺を微分して

$$(\log\phi(x))'=\frac{1}{2}\frac{\phi'(\frac{x}{2})}{\phi(\frac{x}{2})}+\frac{1}{2}\frac{\phi'(\frac{x+1}{2})}{\phi(\frac{x+1}{2})}$$

$$g(x)=(\log\phi(x))''$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\phi''(\frac{x}{2})\phi(\frac{x}{2})-\phi'(\frac{x}{2})^2}{\phi(\frac{x}{2})^2}+\frac{1}{4}\frac{\phi''(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x+1}{2})-\phi'(\frac{x+1}{2})^2}{\phi(\frac{x+1}{2})^2}$$

$$=\frac{\phi(\frac{x+1}{2})^2\left\{\phi''(\frac{x}{2})\phi(\frac{x}{2})-\phi'(\frac{x}{2})^2\right\}}{4(\pi\,\phi(x))^2}+\frac{\phi(\frac{x}{2})^2\left\{\phi''(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x+1}{2})-\phi'(\frac{x+1}{2})^2\right\}}{4(\pi\,\phi(x))^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\phi(x)^2}\{\boldsymbol{\phi(\frac{x+1}{2})^2}\phi''(\frac{x}{2})\boldsymbol{\phi(\frac{x}{2})}-\phi(\frac{x+1}{2})^2\ \phi'(\frac{x}{2})^2$$

$$+\boldsymbol{\phi(\frac{x}{2})^2}\phi''(\frac{x+1}{2})\boldsymbol{\phi(\frac{x+1}{2})}-\phi(\frac{x}{2})^2\phi'(\frac{x+1}{2})^2\}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\phi(x)^2}\{\boldsymbol{\pi\,\phi(x)\phi(\frac{x+1}{2})}\phi''(\frac{x}{2})-\phi(\frac{x+1}{2})^2\ \phi'(\frac{x}{2})^2$$

$$+\boldsymbol{\pi\,\phi(x)\phi(\frac{x}{2})}\phi''(\frac{x+1}{2})-\phi(\frac{x}{2})^2\phi'(\frac{x+1}{2})^2\}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\phi(x)^2}\{\pi\,\phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2})+\phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2})\}-\{\phi(\frac{x+1}{2})^2\ \phi'(\frac{x}{2})^2$$

$$+\phi(\frac{x}{2})^2\phi'(\frac{x+1}{2})^2\}\}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\phi(x)^2}(\pi\,\phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2})+\phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2})\}-\{\phi(\frac{x+1}{2})\ \phi'(\frac{x}{2})$$

$$+\phi(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}^2+2\boldsymbol{\phi(\frac{x+1}{2})}\ \phi'(\frac{x}{2})\boldsymbol{\phi(\frac{x}{2})}\phi'(\frac{x+1}{2}))$$

ここで、$(\phi(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x}{2}))'=\frac{1}{2}\phi'(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\phi(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2})$ なので、

$$(\pi\,\phi(x))' = \frac{1}{2}\phi'(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\phi(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2})$$

$$2\pi\,\phi'(x) = \phi'(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2}) \cdots ①$$

$$\pi\,\phi''(x) = \frac{1}{4}\phi''(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x}{2}) + \frac{1}{4}\phi'(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2}) + \frac{1}{4}\phi'(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2})$$

$$+\frac{1}{4}\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2})$$

$$= \frac{1}{4}\{\phi''(\frac{x+1}{2})\phi(\frac{x}{2}) + 2\phi'(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2})\} \cdots ②$$

もとの計算にもどると

$$= \frac{1}{4\pi^2\phi(x)^2}(\pi\,\phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2})\} - \{\phi(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2})$$

$$+\phi(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}^2 + 2\pi\,\phi(x)\phi'(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2}))$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\phi(x)^2}(\pi\,\phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2}) + 2\phi'(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}$$

$$-\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi'(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}^2)$$

①, ② を代入して

$$= \frac{\pi\,\phi(x)\cdot 4\pi\,\phi''(x) - (2\pi\,\phi'(x))^2}{4\pi^2\phi(x)^2}$$

$$= \frac{4\pi^2\phi(x)\phi''(x) - 4\pi^2\phi'(x)^2}{4\pi^2\phi(x)^2} = \frac{\phi(x)\phi''(x) - \phi'(x)^2}{\phi(x)^2}$$

以上により $\boldsymbol{g(x) = \frac{\phi(x)\phi''(x) - \phi'(x)^2}{\phi(x)^2}}$ **となる。**

次に、(15．22) を証明する。

$$g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2})$$

$$= \frac{\phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x}{2}) - \phi'(\frac{x}{2})^2}{\phi(\frac{x}{2})^2} + \frac{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x+1}{2}) - \phi'(\frac{x+1}{2})^2}{\phi(\frac{x+1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\phi(\frac{x}{2})^2\phi(\frac{x+1}{2})^2}\{\phi(\frac{x+1}{2})^2\phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x}{2}) - \phi(\frac{x+1}{2})^2\ \phi'(\frac{x}{2})^2$$

$$+\phi(\frac{x}{2})^2\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x+1}{2}) - \phi(\frac{x}{2})^2\phi'(\frac{x+1}{2})^2\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\phi(x)^2}\{\pi\ \phi(x)\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) - \phi(\frac{x+1}{2})^2\ \phi'(\frac{x}{2})^2$$

$$+\pi\ \phi(x)\phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2}) - \phi(\frac{x}{2})^2\phi'(\frac{x+1}{2})^2\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\phi(x)^2}\{\pi\ \phi(x)\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) + \pi\ \phi(x)\phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2})$$

$$-(\phi(\frac{x+1}{2})^2\ \phi'(\frac{x}{2})^2 + \phi(\frac{x}{2})^2\phi'(\frac{x+1}{2})^2)\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\phi(x)^2}\{\pi\ \phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2})\} - \{\phi(\frac{x+1}{2})\ \phi'(\frac{x}{2})$$

$$+\phi(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}^2 + 2\phi(\frac{x+1}{2})\ \phi'(\frac{x}{2})\ \phi(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}$$

①、②より

$$= \frac{1}{\pi^2\phi(x)^2}\{\pi\ \phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2})\} - \{2\pi\ \phi'(x)\}^2$$

$$+2\phi(\frac{x+1}{2})\ \phi'(\frac{x}{2})\ \phi(\frac{x}{2})\phi'(\frac{x+1}{2})\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\phi(x)^2}\{\pi\ \phi(x)\{\phi(\frac{x+1}{2})\phi''(\frac{x}{2}) + \phi(\frac{x}{2})\phi''(\frac{x+1}{2}) + 2\phi'(\frac{x}{2})\ \phi'(\frac{x+1}{2})\}$$

$$-\{2\pi\ \phi'(x)\}^2\}$$

$$= \frac{\pi\ \phi(x)\cdot 4\pi\ \phi''(x) - 4\pi^2\phi'(x)^2}{\pi^2\phi(x)^2} = 4\frac{\phi(x)\phi''(x) - \phi'(x)^2}{\phi(x)^2} = 4g(x)$$

また、$g(x)$ は $\phi(x), \phi(x)', \phi(x)''$ の関数なので、$\phi(x)', \phi(x)''$ の周期性さえわかればよい、それは微分の定義から容易にわかる。

$$\phi'(x+1) = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+1+h) - \phi(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \phi'(x)$$

$\phi''(x)$ についても同様である。よって、$g(x)$ は周期 1 をもつ周期関数である。

注意1 (15.23) は$\frac{1}{\Gamma(x)} = 0$ ($x = -n$) $\to$ $\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-x)} = 0$

(P. 336 (15.24))

$$\frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -\frac{\pi}{x}\cdot\{xe^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}\cdot(-xe^{-Cx}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x}{n})e^{\frac{x}{n}})\}$$

(P. 336 定理15. 6 系 ,2))

$$\prod_{n=1}^{m}\frac{2^2n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^2\times1}{1\times3}\times\frac{2^2\times2^2}{3\times5}\times\frac{2^2\times3^2}{5\times7}\times\cdots\times\frac{2^2m^2}{(2m-1)(2m+1)}$$

$$= \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m-1)!!\,(2m+1)!!} = \frac{(2^m m!)^2}{(2m-1)!!\,(2m-1)!!\,(2m+1)} = (\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!})^2\frac{1}{2m+1}$$

両辺を2倍して平方根を取ると

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sqrt{\frac{2}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} \quad (\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\to 1)$$

第 I 章定理2. 5 , 3) を使った。

(P. 338、(15.26))

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{(x+1)^{x+\frac{1}{2}}e^{-x-1}e^{\mu(x+1)}}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}}$$

ここで、$\frac{x(x+1)^{x+\frac{1}{2}}}{x\cdot x^{x-\frac{1}{2}}} = \frac{x(x+1)^{x+\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}} = x(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}$ なので、

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = x(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}e^{-x-1+x}e^{\mu(x+1)-\mu(x)}$$

$$= x(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}e^{\mu(x+1)-\mu(x)-1}$$

(15. 25)の1)をみたすためには　$f(x+1) = xf(x)$ となる必要がある。よって

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = x = x(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}e^{\mu(x+1)-\mu(x)-1}$$

$$(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}e^{\mu(x+1)-\mu(x)-1} = 1$$

$(x+\frac{1}{2})\ell og(1+\frac{1}{x})+\mu(x+1)-\mu(x)-1=0$

つまり、$(x+\frac{1}{2})\ell og(1+\frac{1}{x})-1=\mu(x)-\mu(x+1)$ が必要十分条件になる。

（P. 338 (15.27))

$g(x)=(x+\frac{1}{2})\ell og(1+\frac{1}{x})-1$

$x>0$ で $\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g(x+n)$ が収束すれば $\mu(x)$ は定義できる。収束するとすれば $\sum_{n=0}^{\infty}g(x+1+n)$ も収束するので

$\mu(x)-\mu(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}g(x+n)-\sum_{n=0}^{\infty}g(x+1+n)$

$=g(x)+g(x+1)+g(x+2)+\cdots(g(x+1)+g(x+2)+\cdots)$

$=g(x)$

(P.338 y'')

$\ell og\, f(x)=\ell og(x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x})+\mu(x)$ なので $y=\ell og(x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x})$ として、y'' を求める。

準備として、$z=x^{x-\frac{1}{2}}$ の微分を用意する。

$\ell og\, z=(x-\frac{1}{2})\ell og\, x \rightarrow \frac{z'}{z}=\ell og\, x+(x-\frac{1}{2})\times\frac{1}{x}$

$z'=x^{x-\frac{1}{2}}(\ell og\, x+(x-\frac{1}{2})\times\frac{1}{x})$

$$y'=\frac{(x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x})'}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}}=\frac{z'e^{-x}+x^{x-\frac{1}{2}}\times(-e^{-x})}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}}$$

$$=\frac{e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}(\ell og\, x+(x-\frac{1}{2})\times\frac{1}{x})+x^{x-\frac{1}{2}}\times(-e^{-x})}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}}$$

$=\ell og\, x+(x-\frac{1}{2})\times\frac{1}{x}-1$

$= \ell og\, x + 1 - \frac{1}{2}x^{-1} - 1 = \ell og\, x - \frac{1}{2}x^{-1}$

$y" = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0 \quad (x > 0)$

したがって、$\mu(x)$ が $x > 0$ で凸ならば f は 2)をみたすことになる。

(P.338 (15.29))

$g(x) = (x+\frac{1}{2})\ell og(1+\frac{1}{x})-1$

$(\ell og(1+\frac{1}{x}))' = \frac{-1x^{-2}}{1+x^{-1}} = \frac{-1}{x^2+x} = \frac{-1}{x(x+1)}$ なので

$g(x)' = \ell og(1+\frac{1}{x})+(x+\frac{1}{2})\frac{-1}{x(x+1)} = \ell og(1+\frac{1}{x})-\frac{x+0.5}{x(x+1)}$

$g(x)" = \frac{-1}{x(x+1)}-\frac{x^2+x-(2x+1)(x+0.5)}{x^2(x+1)^2}$

$= \frac{-x(x+1)-x^2-x+2x^2+x+x+0.5}{x^2(x+1)^2} = \frac{0.5}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2}$

(P.338 (15.27)の収束することの証明)

$y = \frac{1}{2x+1}$ とおけば、 $0 < x$ なので $y = \frac{1}{2x+1} < 1$ となる。

そこで、 $1+y = 1+\frac{1}{2x+1} = \frac{2x+2}{2x+1}$, $1-y = 1-\frac{1}{2x+1} = \frac{2x}{2x+1}$

なので

$\frac{1}{2}\ell og\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ell og\frac{2x+2}{2x} = \frac{1}{2}\ell og(1+\frac{1}{x})$ これを $g(x)$ に代入すると、

$g(x) = (x+\frac{1}{2})\ell og(1+\frac{1}{x})-1 = (2x+1)\frac{1}{2}\ell og(1+\frac{1}{x})-1$

$= (2x+1)\frac{1}{2}\ell og(\frac{1+y}{1-y}) - 1$

ここで、(P. 198(4. 19)より、$|y| < 1$ なので

$\frac{1}{2}\ell og(\frac{1+y}{1-y}) = y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots$ は収束する整級数であり

$= (2x+1)(y+\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^5}{5}+\cdots) - 1$

$= (2x+1)(\dfrac{1}{(2x+1)}+\dfrac{1}{3(2x+1)^3}+\dfrac{1}{5(2x+1)^5}+\cdots) - 1$

$= \dfrac{1}{3(2x+1)^2}+\dfrac{1}{5(2x+1)^4}+\cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n}}$

ここで、 $s = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n} \to as = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n} \to as = 1+s \to s = \dfrac{1}{a-1}$ なので

$0 < g(x) < \dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2x+1)^{2n}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(2x+1)^2-1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{4x^2+4x+1-1}$

$= \dfrac{1}{12x(x+1)} = \dfrac{1}{12x}-\dfrac{1}{12(x+1)}$

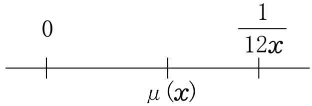
である。したがって、

$0 < \mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}g(x+n) < \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{12}(\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1})$

$= \dfrac{1}{12}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\cdots) = \dfrac{1}{12x}$

が成り立つ。 そこで

(15．30) $\mu(x) < \dfrac{\theta}{12x}$ （$0 < \theta < 1$）



と表される。ただし、θ は x に応じて変化する。

(P．339 定理15．7(スターリングの公式)の証明)

$n! = \Gamma(n+1) = af(n+1) = anf(n)$

$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}$ なので

$n! = anf(n) = an\cdot n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\mu(n)} = an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\mu(n)}$

$(2n)! = 2anf(2n) = 2an\cdot(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{\mu(2n)}$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\frac{(2\times4\times6\times\cdots\times2n)\times(2\times4\times6\times\cdots\times2n)}{1\times2\times3\times4\times\cdots\times(2n-1)\times2n\times\sqrt{n}}$$

$$=\frac{(2^n(n!))^2}{1\times2\times3\times4\times\cdots\times(2n-1)\times2n\times\sqrt{n}}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!!\sqrt{n}}$$ だから

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}a^2n^{2n+1}e^{-2n}e^{2\mu(n)}}{2an(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{\mu(2n)}\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}an^{2n+1}e^{2\mu(n)}}{2n(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{\mu(2n)}\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}an^{2n+1}e^{2\mu(n)}}{2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+1}e^{\mu(2n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{e^{2\mu(n)}}{e^{\mu(2n)}}$$

ここで、 $\mu(n)=\dfrac{\theta_1}{12n}$ ， $\mu(2n)=\dfrac{\theta_2}{12\times2n}$ （$0<\theta_1,\ \theta_2<1$） とすれば

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{e^{2\mu(n)}}{e^{\mu(2n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{2}}\times e^{\frac{\theta_1}{6n}-\frac{\theta_2}{24n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{2}}\times e^{\frac{4\theta_1-\theta_2}{24n}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

したがって、 $a=\sqrt{2\pi}$ を得る。

（P. 339　注意2）

定数 a を $\dfrac{1}{2}$ 公式で求める。

$$f(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}\ ,\quad \mu(x)=\frac{\theta}{12x}\quad(0<\theta<1)$$

$$\Gamma(x)=af(x)\ ,\quad \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x)\ \cdots\ \frac{1}{2}\text{公式}$$

$$af(x)\,2^{1-x}\sqrt{\pi}=a^2f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{a^2f(\frac{x}{2})f(\frac{x+1}{2})}{a2^{1-x}\sqrt{\pi}}=\frac{a\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}e^{\mu(\frac{x}{2})}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}e^{\frac{-x-1}{2}}e^{\mu(\frac{x+1}{2})}}{2^{1-x}\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{a\,2^{\frac{-x+1}{2}}2^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{x-1}{2}}(x+1)^{\frac{x}{2}}e^{\frac{-2x-1}{2}}e^{\mu(\frac{x}{2})+\mu(\frac{x+1}{2})}}{2^{1-x}\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{a\ 2^{\frac{-2x+1}{2}-1+x}\ x^{\frac{x-1}{2}}\ (x+1)^{\frac{x}{2}} e^{\frac{-2x-1}{2}}\ e^{\mu(\frac{x}{2})+\mu(\frac{x+1}{2})}}{\sqrt{\pi}}$$

よって、 $$\frac{f(x)}{f(x)} = \frac{a\ 2^{-\frac{1}{2}}\ x^{\frac{x-1}{2}}\ (x+1)^{\frac{x}{2}} e^{\frac{-2x-1}{2}}\ e^{\mu(\frac{x}{2})+\mu(\frac{x+1}{2})}}{\underbrace{\sqrt{\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}}_{f(x)}} = 1$$

$$\mu(\frac{x}{2}) + \mu(\frac{x+1}{2}) - \mu(x) = \frac{\theta_1}{6x} + \frac{\theta_2}{6(x+1)} - \frac{\theta_3}{12x} \leqq \frac{2(x+1)+2x+(x+1)}{12x(x+1)}$$

$$\leqq \frac{5x+3}{12x(x+1)} \to 0\ (x \to +\infty) \qquad (0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1)$$

$$e^{\mu(\frac{x}{2})+\mu(\frac{x+1}{2})-\mu(x)} = \frac{e^{\mu(\frac{x}{2})+\mu(\frac{x+1}{2})}}{e^{\mu(x)}} = 1\ (x \to +\infty)$$

よって、 $$\frac{a\ 2^{-\frac{1}{2}}\ x^{\frac{x-1}{2}}\ (x+1)^{\frac{x}{2}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} \to 1\ (x \to +\infty)$$

$$\frac{a\ 2^{-\frac{1}{2}}\ x^{\frac{x-1}{2}}\ (x+1)^{\frac{x}{2}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\ \frac{2^{-\frac{1}{2}}\ x^{\frac{x-1}{2}-(\frac{2x-1}{2})}\ (x+1)^{\frac{x}{2}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{e^{-x}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\ \frac{2^{-\frac{1}{2}}\ x^{-\frac{x}{2}}(x+1)^{\frac{x}{2}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{e^{-x}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\ \frac{2^{-\frac{1}{2}}\ (\frac{x+1}{x})^{\frac{x}{2}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{e^{-x}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\ \frac{2^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{e^{-x}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\ \frac{2^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(1+\frac{1}{x})^{x}}\ e^{\frac{-2x-1}{2}}}{e^{-x}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(1+\frac{1}{x})^x}\ e^{\frac{-2x-1}{2}+\frac{2x}{2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(1+\frac{1}{x})^x}\ e^{-\frac{1}{2}} \ \to\ 1 \quad (x\to+\infty)$$

$$\sqrt{(1+\frac{1}{x})^x}\cdot e^{\frac{-1}{2}} = 1\ (x\to+\infty) \quad (\sqrt{(1+\frac{1}{x})^x}\to\sqrt{e}\quad (x\to+\infty))$$

$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} = 1\quad (x\to+\infty)$　　つまり、 $a=\sqrt{2\pi}$ となる。

第Ⅰ章定理6. 6 , 2) を使っている。

(P. 340 (15. 33))

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}}{\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}} = 1$$

よって、 $\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\ (x\to+\infty)$（P.115定義2） となる。

$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ に対しては

(15.34)　　$n!\sim\sqrt{2\pi}\,n\cdot n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n} = \sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\ (n\to+\infty)$

(P. 340 例2)

$(2n)!! = 2n\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times2$

$= 2^n\times\{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times1) = 2^n n!$

$(2n-1)!! = (2n-1)\times(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times1$

$$= \frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times2\times1}{2n\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times2} = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\ (2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(2^n\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n})^2}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\ (2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{2^{2n}\cdot2\pi\,n^{2n+1}e^{-2n}}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{\sqrt{2\pi}\ 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{2^{2n}\cdot2\pi\,n^{2n+1}e^{-2n}}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot n^1} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \quad (n \to +\infty)$$

$$\frac{a_n}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \times \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{2\sqrt{\pi}\, n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi n}(2n+1)} = \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{2n^{\frac{3}{2}} + \sqrt{n}} \leqq 1$$

よって、$a_n \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ なので、第Ｖ章定理２．５と比較定理により$\sum a_n$ が収束することがわかる。

（P．340　例3）

$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x$ から

$$\frac{\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)}}{n^x} = \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\,\Gamma(x)}{n!n^x} = \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{\frac{n!n^x}{\Gamma(x)}}$$

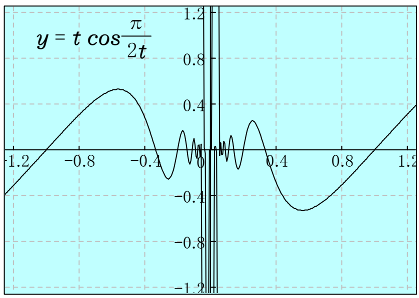
$= 1 \quad (n \to +\infty)$

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{n\,\Gamma(n)} \sim n^x \qquad \left(\frac{x+n}{n} = 1 \ (n \to +\infty)\right)$$

(P.343 例3)

$f(t) = t\cos\frac{\pi}{2t}$

$t = \frac{1}{4n-k}$ とした場合、$\cos x$ は偶関数なので、



$$f(t) = \frac{1}{4n-k}\cos\left(\frac{4n\pi}{2} - \frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{4n-k}\cos\left(2n\pi - \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4n-k}\cos 2n\pi \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin 2n\pi \sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{4n-k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$k \bmod 4 = 0 \to f(t) = \frac{1}{4n-k}$

$k \ mod \ 4 = 1 \to f(t) = 0$

$k \ mod \ 4 = 2 \to f(t) = \dfrac{-1}{4n-k}$

$k \ mod \ 4 = 3 \to f(t) = 0$

具体的に $n = 3$ の場合

$\Delta_3 : 0 < \dfrac{1}{12} < \dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{10} < \dfrac{1}{9} < \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$

つまり、両端を含めて4×3＋1個の分点より成る。

$f(0) = 0 \ , f(\dfrac{1}{12}) = \dfrac{1}{12} \ , f(\dfrac{1}{11}) = 0 \ , f(\dfrac{1}{10}) = \dfrac{-1}{10} \ , f(\dfrac{1}{9}) = 0 \ , f(\dfrac{1}{8}) = \dfrac{1}{8} \ , f(\dfrac{1}{7})$

$= 0 \ , f(\dfrac{1}{6}) = \dfrac{-1}{6} \ , \ f(\dfrac{1}{5}) = 0 \ , f(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{4} \ , f(\dfrac{1}{3}) = 0 \ , f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{-1}{2} \ , f(1) = 0$

$\ell(\Delta_3) = \sum_{i=1}^{13} | \Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}) | = \sum_{i=1}^{13} \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2}$

$\geqq \sum_{i=1}^{13} \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{13} | f(t_i) - f(t_{i-1}) |$

$= | f(t_1) - f(t_0) | + | f(t_2) - f(t_1) | + | f(t_3) - f(t_2) | + | f(t_4) - f(t_3) | + | f(t_5) - f(t_4) |$

$+ | f(t_6) - f(t_5) | + \cdots + | f(t_{13}) - f(t_{12}) |$

$= \dfrac{1}{12} + |\dfrac{-1}{12}| + |\dfrac{-1}{10}| + \dfrac{1}{10} + \cdots + |\dfrac{-1}{6}| + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + |\dfrac{-1}{4}| + |\dfrac{-1}{2}| + \dfrac{1}{2}$

$= 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \sum_{k=1}^{2\times 3} \dfrac{1}{k}$

$4n+1$ 個の分点の場合は

$\ell(\Delta_n) \geqq \sum_{k=1}^{n} \{ \dfrac{2}{4k} + \dfrac{2}{4k-2} \} = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} \to +\infty \ (n \to +\infty)$

したがって、その上限は $+\infty$ となる。

（P.344　命題16．1）

D の分点は高々一個しか含まれない・・・

もし、分点 t_i 、t_{i+1} が含まれていたとすれば、$[t_i, t_{i+1}] \subset I_n$ となり、$d(I_n) > e$ となってしまう。

また、本文では、「いま I の内部にある D の分点の総数を r とする。」とあるが、Δによって生ずる各小区間の内部には、D の分点は高々一個しかないので、「そのような分点の総数を r とする。」と改めたほうがわかりやすいと思う。

（P.345　例5）

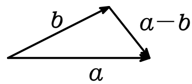
$f : I = [\,a\,,\,b\,] \to R$　（　$a < b \to f(a) \leqq f(b)$ とする。）

$$\sum_{i=1}^{m} |\,f(t_i) - f(t_{i-1})\,| = \sum_{i=1}^{m} (\,f(t_i) - f(t_{i-1})\,) = f(b) - f(a)$$

（P.347　定理16．3の証明）

$|\varepsilon_i| = |\,\ell_i - |\,f'(t_i)\,|\,| \leqq (\sum_{k=1}^{n} |\,f_k'(\tau_{ki}) - f_k'(t_i)\,|^2\,)^{\frac{1}{2}}$ について

$|\,a\,| \leqq |\,b\,| + |\,a-b\,|$　→　$|\,a\,| - |\,b\,| \leqq |\,a-b\,|$



$d_i = \begin{pmatrix} f_1'(\tau_{1i}) \\ \vdots \\ f_n'(\tau_{ni}) \end{pmatrix}$ とする。$f'(t_i) = \begin{pmatrix} f_1'(t_i) \\ \vdots \\ f_n'(t_i) \end{pmatrix}$ なので

$\ell_i = |\,d_i\,| = (\,\sum_{k=1}^{n} (f_k'(\tau_{ki})^2\,)^{\frac{1}{2}}$ から

$$\varepsilon_i = |\,d_i\,| - |\,f'(t_i)\,| \leqq \left|\begin{pmatrix} f_1'(\tau_{1i}) \\ \vdots \\ f_n'(\tau_{ni}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1'(t_i) \\ \vdots \\ f_n'(t_i) \end{pmatrix}\right| = (\,\sum_{k=1}^{n} |\,f_k'(\tau_{ki}) - f_k'(t_i)\,|^2\,)^{\frac{1}{2}}$$

また、

$$(\,\sum_{k=1}^{n} |\,f_k'(\tau_{ki}) - f_k'(t_i)\,|^2\,)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{n(\frac{\varepsilon}{n(b-a)})^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n(b-a)^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}(b-a)}$$

$\int_a^b |\,f'(t)\,|dt$ は定理3．5から存在するので、それを s とおいた。

言い換えると、任意の分割 $\Delta \in \mathfrak{D}$ に対し、代表点 ξ_k の取り方によらず常に s にになるのであるから、$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{m} |\,f'(t_i)\,|(t_i - t_{i-1}) = s$

（P.347　例6）

$$\cos\theta = \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$ から

$$(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 1 - 2\cos\theta + 1 = 2 - 2\cos\theta = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$2a\int_0^{2\pi} sin\frac{\theta}{2} d\theta = 4a\int_0^{\pi} sin\ t\ dt = 4a[-cos\ t]_0^{\pi} = 4a\cdot(1-(-1)) = 8a$$

（P.348　例7）

$$t=\sqrt{x} \ \rightarrow\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \ \rightarrow\ \int_0^x \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int_0^t \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}2t\ dt$$

$$= 2\int_0^t \sqrt{t^2+1}dt$$

（P.350　命題17．1）

$$|(f+g)(t)-(f+g)(s)| = |f(t)+g(t)-(f(s)+g(s))| = |f(t)-f(s)+g(t)-g(s)|$$

$$|(f-g)(t)-(f-g)(s)| = |f(t)-g(t)-(f(s)-g(s))| = |f(t)-f(s)+g(s)-g(t)|$$

なので、

$$|(f+g)(t)-(f+g)(s)| \leqq |f(t)-f(s)|+|g(t)-g(s)|$$

I の分割 Δ が (16.1) で与えられているとして、$f-g$ ならば

$$v_\Delta(f-g) = |(f-g)(t_i)-(f-g)(t_{i-1})| = |f(t_i)-f(t_{i-1})-g(t_i)+g(t_{i-1})|$$

$$\leqq |f(t_i)-f(t_{i-1})|+|g(t_i)-g(t_{i-1})| = v_\Delta(f)+v_\Delta(g)$$

次の不等式については

$$|(fg)(t)-(fg)(s)| = |f(t)g(t)-f(s)g(s)|$$

$$= |f(t)g(t)-f(t)g(s)+f(t)g(s)-f(s)g(s)|$$

$$= |f(t)\{g(t)-g(s)\}+g(s)\{f(t)-f(s)\}| \leqq A|g(t)-g(s)|+B|f(t)-f(s)|$$

（P.351　定理17．3）

定理17．2から $\phi(x)$ が有限であり定まる。また、$V \geqq 0$ は $\phi(a)=0$ なので ϕ が単調増加関数となる。

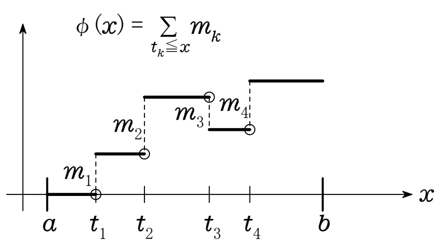
また、$V(x, y; f)-(f(y)-f(x)) \geqq 0$ については

$f(x) \geqq f(y)$ ならば問題ない。$f(x) \leqq f(y)$ なら $|f(y)-f(x)| \leqq V(x, y; f)$ は定義から明らかである。

（P.352　例3）

$p=4$ として $\phi(x)$ をイメイージしてみると

定点 $a < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < b$ それに対し実数 m_i を対応させるとする。$m_3 < 0$, 他は正とする。

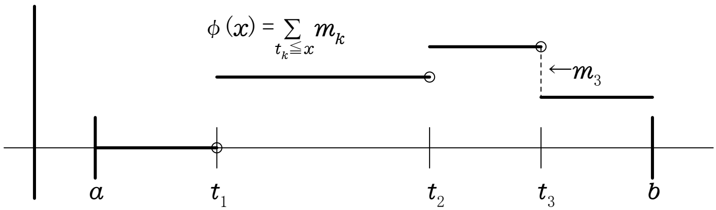


ϕ が有界変動であることは、$[t_{i-1}, t_i]$ において、t_i では、右連続であり、$\phi(x) = \sum_{t_k \leqq x} m_k$ なので、$\phi(t_i) = \sum_{t_k \leqq t_i} m_k$ となる。またそれ以外の点では、$\phi(x) = \sum_{t_k \leqq x} m_k$ つまり定数となる。よって、$[t_{i-1}, t_i]$ の任意の分割 Δ をとったとき、$v_\Delta = \sum_{j=1}^{m} |\phi(x_j) - \phi(x_{j-1})| = |\sum_{t_k \leqq t_i} m_k - \sum_{t_k \leqq x} m_k| = |m_{t_i}|$ となり、$[t_{i-1}, t_i]$ で有界変動となる。

よって、各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ で有界変動なので、定理17．2より、ϕ は、$[a,b]$ で有界変動となる。

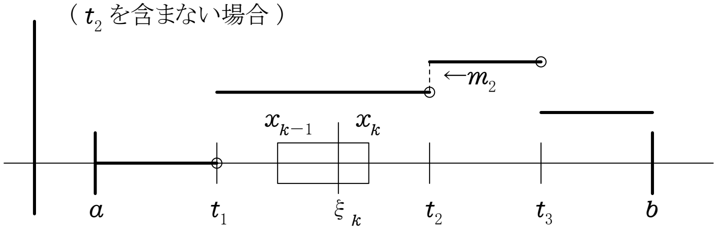
後半については、

（ $k = 3$ の場合 、t_2 に関する部分だけ考える ）



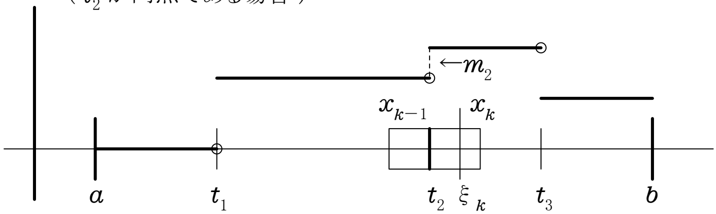
$d(\Delta) < \underset{1 \leqq j \leqq p}{Min}(t_j - t_{j-1})$ とし、$d(\Delta) \to 0$ としても、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の置かれ場所は次の4つしかない。

①　　（ t_2 を含まない場合 ）



$\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}) = 0$ なので　$f(\xi_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})] = 0$

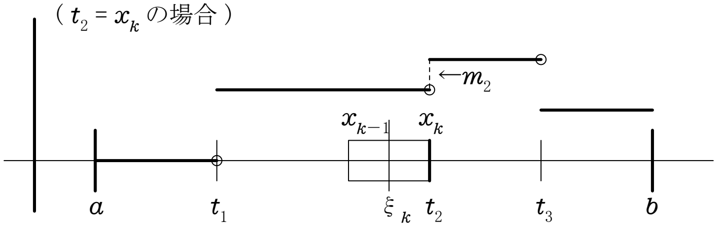
② （ t_2 が内点である場合 ）



$d(\Delta) \to 0$ つまり $x_k - x_{k-1} \to 0$ ならば

$f(\xi_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})] \to f(t_2 \pm 0)[\phi(t_2+0) - \phi(t_2-0)] = f(t_2)m_2$

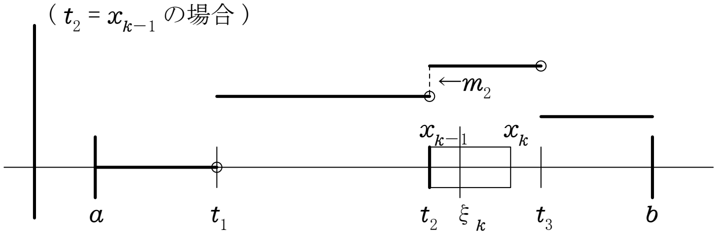
③ （ $t_2 = x_k$ の場合 ）



$d(\Delta) \to 0$ つまり $x_k - x_{k-1} \to 0$ ならば

$f(\xi_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})] \to f(t_2-0)[\phi(t_2) - \phi(t_2-0)] = f(t_2)m_2$

④ （ $t_2 = x_{k-1}$ の場合 ）



$d(\Delta) \to 0$ つまり $x_k - x_{k-1} \to 0$ ならば

$f(\xi_k)[\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})] \to f(t_2+0)[\phi(t_2+0) - \phi(t_2)] = 0$

以上により、$d(\Delta) \to 0$ つまり、$x_k - x_{k-1} \to 0$ ならば ②、③の場合のみ $f(t_2)m_2$ となる。したがって、$\int_a^b f d\phi = \sum_{j=1}^{3} m_j f(t_j)$ 一般に p の場合でも同様である。

（P.353　定理17．5）

$$f(\xi_k)\{(\phi \pm \psi)(x_k) - (\phi \pm \psi)(x_{k-1})\}$$

$$= f(\xi_k)\{\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})\} \pm f(\xi_k)\{\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})\}$$

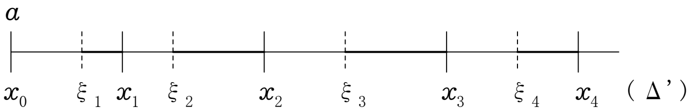
（P.353　定理17．6）

$$\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\phi(x_k) - \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\phi(x_{k-1})$$

$$= f(x_1)\phi(x_1) + f(x_2)\phi(x_2) + f(x_3)\phi(x_3) + \cdots + \boldsymbol{f(x_m)\phi(x_m)}$$

$$-(\boldsymbol{f(x_0)\phi(x_0)} + f(x_1)\phi(x_1) + f(x_2)\phi(x_2) + \cdots + f(x_{m-1})\phi(x_{m-1}))$$

$$= f(x_m)\phi(x_m) - f(x_0)\phi(x_0) = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a)$$



$$\sum_{k=1}^{m} f(x_k)[\phi(x_k) - \phi(\xi_k)] + \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})[\phi(\xi_k) - \phi(x_{k-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})[\phi(\xi_k) - \phi(x_{k-1})] + \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[\phi(x_k) - \phi(\xi_k)]$$

$$= f(x_0)[\phi(\xi_1) - \phi(x_0)] + f(x_1)[\phi(x_1) - \phi(\xi_1)] + f(x_1)[\phi(\xi_2) - \phi(x_1)]$$

$$+ f(x_2)[\phi(x_2) - \phi(\xi_2)] + f(x_2)[\phi(\xi_3) - \phi(x_2)] + f(x_3)[\phi(x_3) - \phi(\xi_3)] + \cdots$$

$$+ f(x_{m-1})[\phi(\xi_m) - \phi(x_{m-1})] + f(x_m)[\phi(x_m) - \phi(\xi_m)]$$

$$= s(f;\ \phi;\ \Delta';\ x)$$

（P.354　ϕが単調増加関数である必要性）

単調増加であれば（$\Delta\phi)_k = \phi(x_k) - \phi(x_{k-1}) \geqq 0$ である。

また、$a < b < c$ に対し、$\phi(a) < \phi(b) < \phi(c)$ なので

$\phi(a) - \phi(c) = \phi(a) - \phi(b) + \phi(b) - \phi(a)$ これを唯一つの分点をある辺で追加して得られる場合に利用すれば、命題3．1の2)と同様にして証明できる。よって

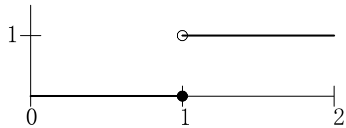
(17.17)　$\Delta \leqq \Delta' \Rightarrow s_{\Delta} \leqq s_{\Delta'} \leqq S_{\Delta'} \leqq S_{\Delta}$

(17.18)　任意の Δ, Δ' に対し $s_{\Delta} \leqq S_{\Delta'}$

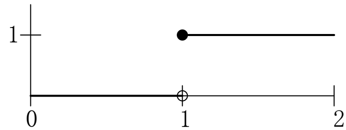
を得る。

（P.355　例4）

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & x\in[\,0,1\,]\\ 1\ , & x\in(\,1,2\,]\end{cases}$$



$$\phi(x)=\begin{cases}0\ , & x\in[\,0,1\,)\\ 1\ , & x\in[\,1,2\,]\end{cases}$$



0，1，2を分点とする　$I=[\,0\,,\,2\,]$ の分割 Δ_0をとるとき、$I_1=[\,0\,,\,1\,]$，$I_2=[\,1\,,\,2\,]$ に対する f の下限 m_1，m_2 は　$m_1=m_2=0$　、上限 M_1，M_2 は　$M_1=0$，$M_2=1$

$(\Delta\,\phi)_1=\ \phi(1)-\phi(0)=1-0=1$　　$(\Delta\,\phi)_2=\ \phi(2)-\phi(1)=1-1=0$　だから

$s_{\Delta_0}=0\times1+0\times0=0=S_{\Delta_0}=0\times1+1\times0$

したがって、(17.19) により　$s=S=0$　となる。

しかし、1 を分点に含まない I の任意の分割 $\Delta:0=x_0<x_1<\cdots<x_m=2$ をとり

$x_{j-1}<1<x_j$ であるとする。このとき

$(\Delta\,\phi)_k=\ \phi(x_k)-\phi(x_{k-1})=0-0=1-1=0$　　$(\,k\neq j\,)$

$(\Delta\,\phi)_j=\ \phi(x_j)-\phi(x_{j-1})=1-0=1$

$m_j=0$，$M_j=1$

だから

$s_\Delta=0+\cdots+0\times1+0+\cdots+0=0$，$S_\Delta=0+\cdots+1\times1+0+\cdots+0=1$

したがって、$d(\Delta)$ をいくら小さくしても　Δ　が 1 を分点に含まない限り $S_\Delta=1$

よって

$$\lim_{d(\Delta)\to0}S_\Delta=1\neq S=inf\,S_\Delta=0$$

つまり、ダルブーの定理が成り立たない。

（P355　定理17．7）

$b)\Leftrightarrow c)$

$$\lim_{d(\Delta)\to0}(S_\Delta-s_\Delta)=\lim_{d(\Delta)\to0}\sum_{k=1}^{m}\{\,M_k(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))-m_k(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))\,\}$$

$$= \lim_{d(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{m} \{ (M_k - m_k)(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) \} = \lim_{d(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{m} a(f, I_k)(\Delta\phi)_k$$

$a) \Rightarrow b)$ P.217 定理3．3の証明を真似してみる。

f が ϕ に関し I 上 S 可積分であるとする。$\int_a^b f d\phi = J$ と置く。定義からこのとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し、$d(\Delta) < \delta$ となる任意の分割 Δ と代表点 $\xi_k \in I_k$ の任意の取り方に対し

$$-\frac{\varepsilon}{2} < s(f;\phi;\Delta;\xi) - J < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。f, Δ を固定して I_k の代表点 ξ_k を I_k の中を動かしたときの $s(f;\phi;\Delta;\xi)$ の上限、下限が S_Δ, s_Δ である。(命題 1．6．1) 従って、上の不等式から、

S_Δ は $s(f;\phi;\Delta;\xi)$ の上限なので、右の不等号が $\leqq$ となる。

$$J - \frac{\varepsilon}{2} < S_\Delta \leqq J + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \leftarrow \quad (\text{ 参考 } \ sup\,[0, \varepsilon) = \varepsilon\ )$$

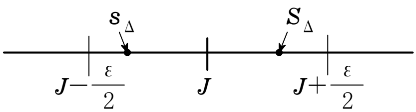
よって、より広い範囲に含まれるので

$$J - \frac{\varepsilon}{2} \leqq S_\Delta \leqq J + \frac{\varepsilon}{2}$$

同様にして、s_Δ は $s(f;\phi;\Delta;\xi)$ の下限なので、左の不等号が $\leqq$ となる。

$$J - \frac{\varepsilon}{2} \leqq s_\Delta < J + \frac{\varepsilon}{2}$$

より広い範囲に含まれるので



$$J - \frac{\varepsilon}{2} \leqq s_\Delta \leqq J + \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る。ゆえに

$$0 \leqq S_\Delta - s_\Delta = S_\Delta - J + J - s_\Delta \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

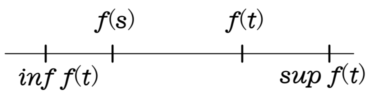
これは $b)$ を意味する。

（注意 ϕ が単調増加であることは（17．19）を使うためである。）

（P356　定理17．8）

$$\sup_{t,s\in I_k} |f(t) - f(s)| = M_k - m_k$$

（証明）$|f(t) - f(s)| \leqq \sup_{t\in I_k} f(t) - \inf_{t\in I_k} f(t)$



よって　$\sup_{t,s\in I_k}|f(t)-f(s)| \leqq \sup_{t\in I_k} f(t)-\inf_{t\in I_k} f(t)$

故に、$0 \leqq \sup_{t\in I_k} f(t)-\inf_{t\in I_k} f(t)-\sup_{t,s\in I_k}|f(t)-f(s)|$ … ①

次に、命題1．4 から 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$\sup_{t\in I_k} f(t)-\frac{\varepsilon}{2}<f(t_0)$, $\inf_{t\in I_k} f(t)+\frac{\varepsilon}{2}>f(s_0)$ となる $t_0 , s_0 \in I_k$ が存在する。

$-\inf_{t\in I_k} f(t)-\frac{\varepsilon}{2}<-f(s_0)$ なので

$\sup_{t\in I_k} f(t)-\inf_{t\in I_k}(t)-\varepsilon<f(t_0)-f(s_0) \leqq |f(t_0)-f(s_0)| \leqq \sup_{t,s\in I_k}|f(t)-f(s)|$ … ②

①、②から

$0 \leqq \sup_{t\in I_k} f(t)-\inf_{t\in I_k} f(t)-\sup_{t,s\in I_k}|f(t)-f(s)|<\varepsilon$

P.4 (1.5) より $\sup_{t,s\in I_k}|f(t)-f(s)| = \sup_{t\in I_k} f(t)-\inf_{t\in I_k} f(t) = M_k-m_k$

$M_k-m_k \leqq \frac{\varepsilon}{c}$ の $\leqq$ は上限だからである。

（P357　定理17．9 (17.23)）

$|s(f;\phi;\Delta;\xi)-s(f\phi';\Delta;\xi)|$

$=|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k)(\phi(x_k)-\phi(x_{k-1}))-\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k)\phi'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$

$=|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k)\phi'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})-\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k)\phi'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$

$=|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k)[\phi'(\xi_k')-\phi'(\xi_k)](x_k-x_{k-1})| \leqq \|f\|(b-a)\varepsilon$

ただし、$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ である。(P.302) （ f は有界だから ）

（P357　命題17．10）

1）単調性

任意の分割 $\Delta \in \mathfrak{D}$ と　$\xi_k \in I_k$ $(k\in K(\Delta))$ に対し、仮定から、

$s(f;\phi;\Delta;\xi) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)[\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})] \geqq \sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)[\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})]$

$= s(g;\phi;\Delta;\xi)$

なので、$d(\Delta)\to 0$ を考えれば定理を得る。

2）三角不等式

$||f(x)|-|f(y)|| \leqq |f(x)-f(y)|$　　（P.4　命題1．2に追加参照）

よって、任意の $k\in K(\Delta)$ に対し、

$0 \leqq \alpha(|f|, I_k)(\Delta\phi)_k \leqq \alpha(f, I_k)(\Delta\phi)_k$ なので、$|f|$ も ϕ に関し S 可積分となる。

また、ϕ は単調増加なので、

$|s(f;\phi;\Delta;\xi)| = |\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)[\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})]| \leqq \sum_{k=1}^{m} |f(\xi_k)|[\phi(x_k)-\phi(x_{k-1})]$

$= s(|f|;\phi;\Delta;\xi)$

(P357 定理17．11(第一平均値定理)) 定理2. 3を真似て

(証明) 任意の $x \in I$ に対し

$m \leqq f(x) \leqq M$

だから、積分の単調性(命題17. 10)と P.352 例2 より

(17.25) $\quad m(\phi(b)-\phi(a)) \leqq \int_a^b f d\phi \leqq M(\phi(b)-\phi(a))$

そこで $\phi(a) = \phi(b)$ ならば m と M の間に任意の実数 μ に対し (17.26) が成り立つ。$\phi(b)-\phi(a) > 0$ ならば $\dfrac{1}{\phi(b)-\phi(a)}\int_a^b f d\phi = \mu$ とおけば (17.25) により、$m \leqq \mu \leqq M$ だから

(17.26) $\quad \int_a^b f d\phi = \mu(\phi(b)-\phi(a))$

が成り立つ。

特に、f が連続ならば、I 章定理8. 1(中間値の定理) から $\mu = f(c)$ となる $c \in I$ が存在する。

(P359 定理17．13系の2)

2) $\phi_0(x) = -\phi(x)\ (x \neq b)$, $\phi_0(b) = 0$ とおけば、$\phi_0(x)$ は単調増加関数になるので、定理8. 6 系2 と 定理17. 13より、ある $\xi \in I$ が存在して

$-\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \int_a^b f(x)\phi_0(x)dx = \phi_0(a)\int_a^\xi f(x)dx + \phi_0(b)\int_\xi^b f(x)dx$

$= \phi_0(a)\int_a^\xi f(x)dx = -\phi(a)\int_a^\xi f(x)dx$

よって $\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)dx$

(P.360例5、ディリクレ積分)

(17.32) $\quad \lim_{t\to+\infty}\int_0^a f(x)\dfrac{\sin tx}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}f(+0) \quad (a > 0)$

f 有界変動関数なので有界である。また f は $[0\ ,\ a]$ で単調増加としたので P.54 例5 から、$f(+0)$ は存在し有限である。

次に、定理17．13 系 を使いたいのだが、

$\dfrac{\sin tx}{x}$ が $x=0$ で連続かということである。$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ から、

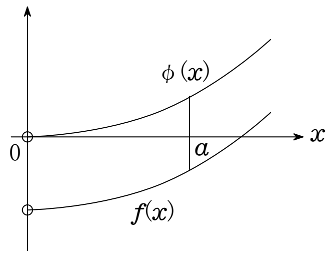
$\sin tx = tx - \dfrac{(tx)^3}{3!} + \dfrac{(tx)^5}{5!} - \cdots$ なので $\dfrac{\sin tx}{x} = t$ $(x=0)$ と定めれば連続となる。よって、$\dfrac{\sin tx}{x}$ は $[0\ ,\ a]$ 上で可積分である。また $z=tx$ とおけば

$$\int_0^a \frac{\sin tx}{x}dx = \int_0^{ta}\frac{\sin z}{\frac{z}{t}}\frac{1}{t}dz = \int_0^{ta}\frac{\sin z}{z}dz = \int_0^{ta}\frac{\sin x}{x}dx$$

となり、(17.32) は

$$(17.33)\qquad \lim_{t\to+\infty}\int_0^a [\,f(x)-f(+0)\,]\frac{\sin tx}{x}dx = 0$$

と書き直せる。$\phi(x)=f(x)-f(+0)$ とおけば ϕ は有界な単調増加である。



(17.34)　$x>0$ で $\phi(x) \geqq 0\ ,\ \phi(+0)=0$

であり、定理 が使えることになる。そこで

$$(17.45)\qquad \lim_{t\to+\infty}\int_0^a \phi(x)\frac{\sin tx}{x}dx = 0$$

を証明すればよいことになる。

(17.34) の $\phi(+0)=0$ から $\lim_{x\to0+0}\phi(x)=0$ だから、任意の $\varepsilon>0$ に対して、x を右から 0 に近づけていけば $0 \leqq \phi(x) < \varepsilon$ とすることができる。そのような x を c とおいて、

(17.36)　$0<c<a\ ,\ 0 \leqq \phi(c) < \varepsilon$

とすることができる。ここで、ϕ は有界な単調増加関数なので、定理3．4から可積分となる。また P.359の注意2（証明してないが）から、定理17．13 系 を無理して区間 $[0\ ,\ c]$ に使うと、ある $\xi \in [0\ ,\ c]$ が存在して

(17.37) $\displaystyle\int_0^c \phi(x)\frac{\sin tx}{x}dx = \phi(c)\int_\xi^c \frac{\sin tx}{x}dx = \phi(c)\int_{\xi t}^{ct}\frac{\sin x}{x}dx$

2番目の等号は $z = tx$ と置けば、$x = \xi \to z = \xi t$, $x = c \to z = ct$

$$\int_\xi^c \frac{\sin tx}{x}dx = \int_{\xi t}^{\xi c}\frac{\sin z}{z}dz$$

からである。

(17．36)の $2M$ について

$\displaystyle\left|\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx\right| \leqq M$ （$x\in[0,+\infty]$） なので

$$\left|\int_{\xi t}^{ct}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqq \left|\int_0^{\xi t}\frac{\sin x}{x}dx\right|+\left|\int_0^{ct}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqq 2M$$

よって

(17.38) $\displaystyle\left|\int_0^c \phi(x)\frac{\sin tx}{x}dx\right| \leqq 2M\phi(c) < 2M\varepsilon$

(17.40) については

P．292のコーシーの条件から、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は存在するので、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\ell \in I = [0, +\infty)$

が存在して、$\ell < t_0\eta < t_0 a < +\infty$ となる t_0 を一つ決めれば、$t_0 < t$ 対して、

$\displaystyle \ell < t\eta < ta < +\infty \to \left|\int_{t\eta}^{ta}\frac{\sin x}{x}dx\right| < \varepsilon$ とすることができる。

(P.362 命題1．1 空集合の上界)

$\overline{U}(\varnothing) = \overline{R}$ について

任意の $x \in \overline{R}$ に対し、$\varnothing \subset \{x\}$ なので I 章(1．11) から $U(\varnothing) \supset U(\{x\})$ となる。x はどんなに小さくしてもよいので、$\overline{U}(\varnothing) = \overline{R}$ と考えるしかない。(だまされたようだが)初めの二つは $\overline{U}(\varnothing) = \overline{R}$ だから $Min\ \overline{U}(A) = -\infty$ で後ろの二つは $Min\ \overline{U}(A) = +\infty$ である。(ここは読み方に注意)

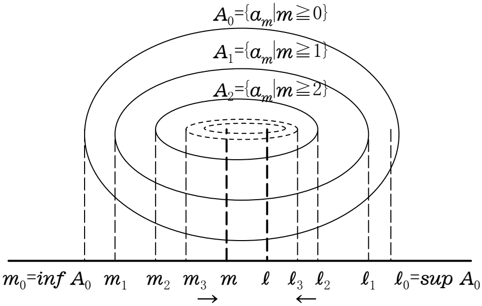
(P.364　定理1．4上極限)

$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n$ (上極限)

$= \lim_{n\to+\infty} sup\{a_m | m \geqq n\}$

$= inf\{\ell_n \mid n \in N\}$

命題 1．3 から任意の実数列に対して、**上極限、下極限はいつでも存在する**ことがわかる。($\overline{R}$ の中であるが)



(例)

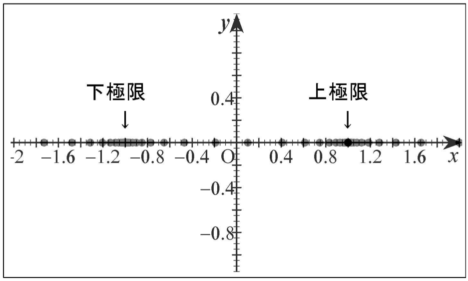
$a_n = \sqrt{2}\, sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}) + (-\frac{9}{10})^n$

上極限 =　1

下極限 = −1

n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , …

$sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2})$ = 1 , 1 , −1 , −1 , …



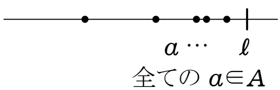
(上限、下限の性質)

$\ell \in \overline{R}$ が $A \subset \overline{R}$ の上限であることは、次のⅰ)、ⅱ)で特徴づけられる。

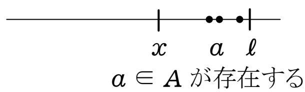
ⅰ) 任意の $a \in A$ に対し、$a \leqq \ell$

ⅱ) $x < \ell$ となる任意の $x \in \overline{R}$ に対し、$x < a$ となる $a \in A$ が存在する。

ⅰ)

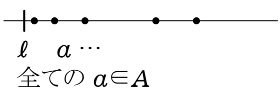


ⅱ)

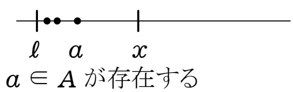


(下限については)

ⅰ)'

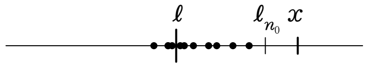


ⅱ)'



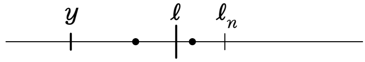
（証明を読む前の注意）

b）ⅰ）…十分大きなすべての $n∈N$ に対し $a_n < x$ …　正確には、ある $n_0∈N$ が存在し、$n > n_0$ ならば $a_n < x$ とすることができる。



$a_n < x$（$n \geqq n_0$）

ⅱ）の… $y < a_n$ となる $n∈N$ は無限に存在する。n を決めるたびに一つ以上あるので無限個あることになる。



$y < a_{m_n} \leqq \ell_n$（$m_n \geqq n$）は一つ以上ある。

証明）a)⇔b)だけにする。

a)⇒b)　ⅰ）$\ell < x$ ならば、$\ell = inf\{\ell_n \mid n∈N\}$ は単調減少列 ℓ_n の下限であるので $\ell_{n_0} < x$ となる $n_0∈N$ が存在し、このときすべての $n \geqq n_0$ に対し $\ell_{n_0} = sup\{a_m|m \geqq n_0\}$ なので　$a_n \leqq \ell_{n_0} < x$ である。

ⅱ）$y < \ell$ ならば、すべての $n∈N$ に対し、$y < \ell \leqq \ell_n = sup\{a_m|m \geqq n\}$ であるから ℓ_n は上限であり性質ⅱ）より、集合 $\{a_m|m \geqq n\}$ の なかで、$y < a_{m_n} \leqq \ell_n$　となる a_{m_n} $(m_n \geqq n)$ が一つは存在する。ここで、n は任意であるから、$y < a_m$ となる $m \in N$ は無限にある。($a_{m_n} = a_{m_{n'}}$ であっても、$m_n \neq m_{n'}$ であればよい。)

b)⇒a) いま $\ell' = \overline{\lim}_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} sup\{a_m|m \geqq n\} = \lim_{n \to +\infty} \ell_n$ とし、b) を満たす ℓ に対して $\ell' = \ell$ を示す。$\ell < x$ となる任意の $x∈\overline{R}$ に対し、b) ⅰ）から n_0 が存在して、$n \geqq n_0$ ならば $a_n < x$ となる。そこで、$\ell_{n_0} = sup\{a_m|m \geqq n_0\}$ なので、x を一つの上界と考えれば、$n \geqq n_0$ ならば、$\ell' \leqq \ell_{n_0} \leqq x$ となる。x は $\ell < x$ となる任意の元であるから、$\ell' \leqq \ell$ となる。(もし、$\ell < \ell'$ ならば、$\ell < x < \ell'$ となる x があるから、$\ell' \leqq \ell_{n_0} \leqq x$ に反する。)

次に、$y < \ell$ となる任意の y をとると、b) ⅱ）から、$y < a_n \leqq \ell_n$ となる $n∈N$ が<u>無限に存在する</u>。これから、$y \leqq \ell'$ が導き出せる。(実際 $\ell' < y$ ならば、a)⇒b) ⅰ）により有限個の n を除き $y > a_n$ となり、$y \leqq a_n$ となる a_n は<u>有限個しかない</u>ので

上のことに反する。）y は $y < \ell$ となる任意の元なので、$\ell \leqq \ell'$となる。（もし $\ell >$ ℓ' ならば、$\ell > y > \ell'$ となる y をとれば $y \leqq \ell'$ に矛盾する。）以上で、$\ell = \ell'$が証明された。

定理1．4を下極限に置き換えると

実数列 $(a_n)_{n\in N}$ と $m \in \overline{R}$ に対し、次の $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ は互いに同値である。

$a)'$ $m = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$

$b)'$

ｉ）$m > x$ となる任意の $x \in \overline{R}$ を定めたとき、十分大きなすべての $n \in N$ に対し $a_n > x$ となる。

ⅱ）$y > m$ となる任意の $y \in \overline{R}$ に対し、$y > a_n$ となる $n \in N$ は無限に存在する。

$c)'$ m に収束する $(a_n)_{n\in N}$ の部分列が存在する。$x < m$ となる x に収束する (a_n) の部分列は存在しない。

$d)'$ m は数列 $(a_n)_{n\in N}$ の $\overline{R}$ における集積値の内最小のものである。

（P．365　命題1．5　$a)\Rightarrow b)$）

ℓ のかわりに b とする。（誤解しやすい）

$a)$ が成り立つとき Ｉ章（3．18）により、$(a_n)_{n\in N}$ の任意の部分列は すべて b に収束する。また、b より大きい値に、または、小さい値に収束する部分列は存在しないので、定理1．4 $c)$,$c)'$ により、$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = b = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$

（P.367　なぜ上極限が必要なのか）

定理2．1 は $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ として、$\overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n$ と考えればよい。ここで上極限を使う利点は b_n が収束しなくても上極限は存在するからである。定理2．2、定理2．3 も同ようである。例 1 では a_n は収束しない。しかし、上極限は 1 である。

（P．368　例2）

$(z-a)\sum_{n=1}^{k} na_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{k} na_n(z-a)^n$ から収束半径が有限ならば両者の収束半径は一致する。収束半径が ＋∞ であっても任意の $z < +\infty$ に対し、どちら

かが収束すればもう一方も収束する。つまり、収束半径は一致する。

$\dfrac{\ell og\ x}{x} \geqq 0$ （$x \geqq 1$）なので $e^{\frac{\ell og\ x}{x}} \geqq 1$ よって $1 \leqq e^{\frac{\ell og\ x}{x}} \to 1$ （$x \geqq 1$）

（P.368 $\sum \dfrac{1}{n^s}$ の収束発散の判定）

$a_n = \dfrac{1}{n^s}$ ， $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^s}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n}{n+1})^s = 1$ となり、< 1 ではなく、$= 1$ なので判定できない。つまり、定理2.1 は使えない。さらに、$s = 1$ の場合、収束しないことはすでに知っている。

（P. 369 例3）

最初の有限項を除いても判定には影響しないので、

$s = 0$ の場合は、$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ となり、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ が発散することから発散することがわかる。

また、$s < 0$ の場合は、$-a = s$ とすれば、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ell og\ n)^{-a}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ell og\ n)^a}{n}$$

ここで、$n = 2$ からとしているのは、$\ell og\ 1 = 0$ だからである。また、$n \geqq 3$ ならば、

$\ell og\ n > 1 \to (\ell og\ n)^a > 1$ となるので、

$n \geqq 3$ ならば、 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{(\ell og\ n)^a}{n}$ となる。したがって、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ が発散することから、I 章定理5．5，2)により発散することがわかる。

（$s \neq 1$ の場合）

$$\ell og\ x = t \to x = e^t \to \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\int \frac{1}{x(\ell og\ x)^s} dx = \int \frac{e^t}{e^t t^s} dt = \int \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{1-s} t^{1-s} = \frac{1}{1-s} (\ell og\ x)^{1-s}$$

（$s = 1$ の場合）

$$\int \frac{1}{x\ell og\ x} dx = \int \frac{e^t}{e^t t} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ell og\ t = \ell og(\ell og\ x)$$

また

$$\int \frac{1}{x\log x(\log \log x)^s}dx = \int \frac{e^t}{e^t t(\log t)^s}dt = \int \frac{1}{t(\log t)^s}dt$$

収束、発散について上と同様になる。

$\log\log n$ については、$n=2$ の場合、$\log 2 < 1$ となり、$\log\log n < 0$ となってしまうため n は 3 からとしている。

（P. 369　例4）

$$a_n - a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \log(n+1))$$

$$= \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} > 0$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{1}{k} - [\log x]_k^{k+1}\} + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \{\log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 + \cdots + \log n - \log(n-1)\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

（$\log_{10} a = x$ とすると $10^x = a$ だから $\log a = x\log 10 = \log 10 \log_{10} a$）

（P. 372　a^+, a^-）

$a^+ = Max\{a, 0\}$

$$\begin{cases} a \leqq 0 \text{ ならば } a^+ = 0 \\ a > 0 \text{ ならば } a^+ = a \end{cases} \Rightarrow 0 \leqq a^+ \leqq |a|$$

$a^- = Max\{-a, 0\}$

$$\begin{cases} a \geqq 0 \text{ ならば } a^- = 0 \\ a < 0 \text{ ならば } a^- = -a \end{cases} \Rightarrow 0 \leqq a^- \leqq |a|$$

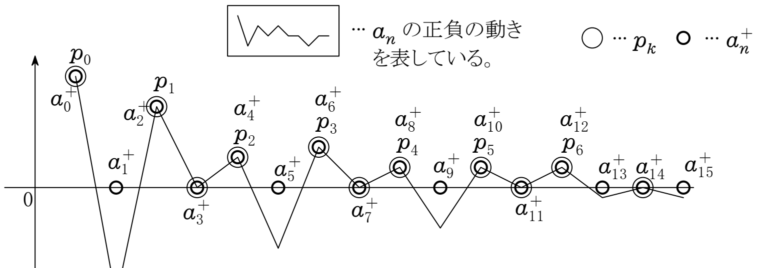
$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき } a^+ - a^- = 0 - (-a) = a \\ a = 0 \text{ のとき } a^+ - a^- = 0 - 0 = a \\ a > 0 \text{ のとき } a^+ - a^- = a - 0 = a \end{cases} \Rightarrow a = a^+ - a^-$$

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき } a^+ + a^- = 0 + (-a) = -a \\ a = 0 \text{ のとき } a^+ + a^- = 0 + 0 = a \\ a > 0 \text{ のとき } a^+ + a^- = a + 0 = a \end{cases} \Rightarrow |a| = a^+ - a^-$$

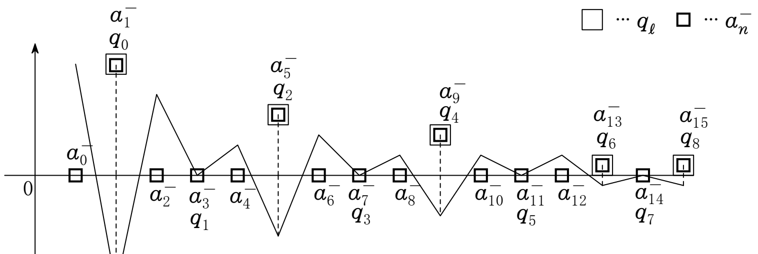
$$a^+ = \frac{|a|+a}{2} \quad , \quad a^- = \frac{|a|-a}{2}$$

よって $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = p - q$

(P. 373　定理 3. 4の準備)



$(a_0^+ + \cdots + a_{15}^+ = p_0 + \cdots + p_6)$



$(a_0^- + \cdots + a_{15}^- = q_1 + \cdots + q_8)$

$\sum a_n$ が条件収束するとは、$\sum a_n$ 自身は収束するが、$\sum |a_n|$ は発散することであったので、$|a_n| = 2a_n^+ - a_n$ から $\sum a_n^+ = +\infty$ であり、また同様に $|a_n| = 2a_n^- - a_n$ から $\sum a_n^- = +\infty$ である。また、0 の項がないだけなので $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ 同様に $\sum_{k=0}^{\infty} q_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty$ となる。

(P. 374　$s_n > m - \frac{1}{2}$ について)

$$\sum a_{k(n)} = \underbrace{p_0 + \cdots + p_{n_1}}_{>1} - q_0 + \underbrace{p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2}}_{>2} - q_1 + \underbrace{p_{n_2+1} + \cdots + p_{n_3}}_{>3} - q_2 + p_{n_3+1} + \cdots$$

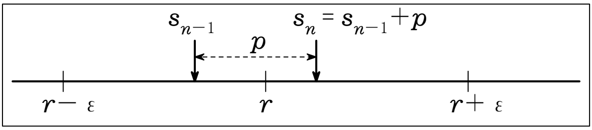
よって、任意のmに対し、$\exists n_0$, $n \geqq n_0$ ならば　$0 \leqq q_n < \dfrac{1}{2}$ なので、十分大きな n をとり $n > Max\{n_m, n_0\}$ とすれば、$s_n > m - \dfrac{1}{2}$ とすることができる。

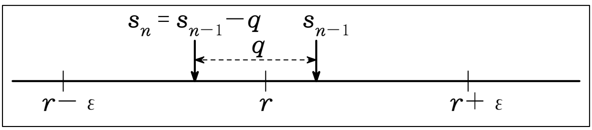
任意の実数rに収束させたい場合は

$$\sum a_{k(n)} = p_0 + \cdots + \underset{>r}{p_{n_1}} - q_0 \cdots - \underset{<r}{q_{m_1}} + p_{n_1+1} + \cdots + \underset{>r}{p_{n_2}} - q_{m_1+1} \cdots - \underset{<r}{q_{m_2}} + p_{n_2+1} + \cdots$$

任意の　$\varepsilon > 0$ に対して、$\exists n_0$, $n \geqq n_0$ ならば $0 \leqq q_n , p_n < \varepsilon$ なので、十分大きな n をとれば、　$r - \varepsilon < s_n < r + \varepsilon$ となり、s_n は r に収束する。

なぜなら、$n \geqq n_0$ に対し、s_{n-1} に p を加え、はじめて r を越えるとき、$r - \varepsilon < s_{n-1} < r < s_{n-1} + p = s_n < r + \varepsilon$ 、q を引いて、はじめて r より小さくなる場合は、　$r - \varepsilon < s_{n-1} - q = s_n < r < r + \varepsilon$ となるから、　$n \geqq n_0$ ならば、以後 s_n は $r - \varepsilon$ と　$r + \varepsilon$　の間に閉じ込められる。(p , $-q$ を無限に加え続けることはない。なぜなら、$\sum p$, $\sum q = \infty$ だからである。) 下図参照





(P．374　定理3．4系)

a)⇒*b*)　$\sum a_n = \sum(x_n + i\,y_n) = a = x + iy$ とする。$|x_n| \leqq |a_n|$, $|y_n| \leqq |a_n|$ なので $\sum x_n$, $\sum y_n$ はそれぞれ絶対収束する。そこで、項の順序を変えた級数を $\sum a_{k(n)} = \sum(x_{k(n)} + i\,y_{k(n)})$ としたとき、定理3．3より、$\sum x_{k(n)} + i \sum y_{k(n)}$ は収束し $x + i\,y$ に等しい。よって、どのように項の順序を変えても a に等しい。

b)⇒*a*) $\sum a_n$ はどんな順序 $k(n)$をとっても収束するので、$\sum x_{k(n)}$ 、$\sum y_{k(n)}$ も収束する。したがって、$\sum x_n$ 、$\sum y_n$ はどちらも絶対収束する。$|a_n| \leqq |x_n| + |y_n|$ から

$\sum a_n$ は絶対収束する。

（P．374　注意）

$\sum a_n^+ = \infty$ ならば、どんな順序 $k(n)$ をとっても、$\sum a_{k(n)}^+ = \infty$ である。なぜなら、もし、$\sum a_{k(n)}^+ = p$ となる順序 $k(n)$ があったとすれば、$\sum a_{k(n)}^+ = \sum |a_{k(n)}^+| = p$ なので定理3．3より、順序を変えた $\sum a_n^+ = p$ となり矛盾する。

同様にして、$\sum a_n^- = \infty$ ならば、どんな順序 $k(n)$ をとっても、$\sum a_{k(n)}^- = \infty$ である。

つまり、Ⅲ）ならば、$p = +\infty$, $q < +\infty$ なので、どんな順序をとっても、$\sum a_{k(n)} = \infty$ となる。また、Ⅳ）ならば、$p < +\infty$, $q = +\infty$ なので、どんな順序をとっても $\sum a_{k(n)} = -\infty$ となる。

（P．374　例1）

P．373例1（3．6）は収束するが絶対収束しない例である。

そこで、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$ になることを示す。

Ⅰ章P．45の例4を真似し、コーシーの条件がみたされないことを示す。

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ とする。　$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2k+1}$ なので、

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \cdots + \frac{1}{2(2n)+1} > \frac{n}{2(2n)+1} > \frac{n}{4n+n} = \frac{1}{5}$$

同様に、$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k}$ とする。　$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2k}$ なので、

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{2(n+1)} + \cdots + \frac{1}{4n} > \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$$

また $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ なので、Ⅰ章P．45の例4から絶対収束しない。しかし、Ⅰ章P．45の例5 から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots = \ell og\ 2$$

となる。つまり、条件収束する。

上の級数の項の順番を変更して、正の項を p 個、負の項を q 個ずつ交互に並べた級数の和を s とすれば、次の様になる。

$$s=\ell og\ 2+\frac{1}{2}\ell og(\frac{p}{q})$$

（証明）（小平邦彦　解析入門より）

P. 370（2. 4）から、オイラー定数 C を使えば

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=\ell og\ n+C+o(n)\quad (n\to+\infty)$$

と書ける。

$$P_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\quad (n\text{ 項ある})$$

$$Q_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\qquad (n\text{ 項ある})$$

とおけば

$$P_n+Q_n=\ell og\ (2n)+C+o(n)$$

$Q_n=\frac{1}{2}\ell og\ n+\frac{1}{2}C+o(n)$　なので

$$P_n=\ell og\ (2n)+C+o(n)-\frac{1}{2}\ell og\ n-\frac{1}{2}C-o(n)$$

$$=\ell og\ 2+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\ell og\ n+o(n)$$

したがって

$$P_{np}-Q_{nq}=\ell og\ 2+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\ell og\ np+o(n)-\frac{1}{2}\ell og\ nq-\frac{1}{2}C-o(n)$$

$$=\ell og\ 2+\frac{1}{2}\ell og(\frac{np}{nq})+o(n)$$

$$=\ell og\ 2+\frac{1}{2}\ell og(\frac{p}{q})+o(n)$$

となり、ゆえに、$\lim_{n\to+\infty}(P_{np}-Q_{nq})=\ell og\ 2+\frac{1}{2}\ell og(\frac{p}{q})$ となる。

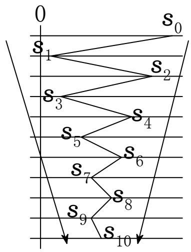
項の順番を変更して、正の項を p 個、負の項を q 個ずつ交互に並べた級数は

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\cdots$$

その和 s は、その $np+nq$ 項までの部分和 $s_{np+nq}=P_{np}-Q_{nq}$ となるので

$s = \ell og\ 2 + \frac{1}{2}\ell og(\frac{p}{q})$ となる。

（P．376　定理4．1）



$s_{2n+1} = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots + p_{2n-2} - p_{2n-1} + p_{2n} - p_{2n+1}$

$s_{2n-1} = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots + p_{2n-2} - p_{2n-1}$

$p_{2n} - p_{2n+1} > 0$ なので　$s_{2n+1} \geqq s_{2n-1}$

$s_{2n} = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots - p_{2n-3} + p_{2n-2} - p_{2n-1} + p_{2n}$

$= p_0 - (p_1 - p_2) - (p_3 - p_4) - \cdots - (p_{2n-3} - p_{2n-2}) - (p_{2n-1} - p_{2n})$

$s_{2n-2} = p_0 - (p_1 - p_2) - (p_3 - p_4) - \cdots - (p_{2n-3} - p_{2n-2})$

$p_{2n-1} - p_{2n} > 0$ なので　$s_{2n-2} \geqq s_{2n}$

（注意）$0 \leqq s - s_{2n} \leqq p_{2n+1}$、$0 \leqq s_{2n-1} - s \leqq p_{2n}$ なので、偶数であっても奇数であっても、任意の $n \in N$ に対し　$|s - s_n| \leqq p_{n+1}$ となる。

（P．376　例1）

$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n^2} + \cdots$　は定理4．1より収束するので、その和を s とおく。Ⅳ章P．315（13．29）と（13．30）から

$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$　，　$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$　それぞれ絶対収束するので項の順番を変えても和は変わらない。また、（13．30）から、$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots (-1)^n \frac{1}{n^2} + \cdots$ も絶対収束する。よって、項の順番を変えてもよいので次の等式が成り立つ

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = s + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

（P．377　アーベルの変形）

まずは練習（ $S(n,m) \neq p_{n+1}a_{n+1} + \cdots$ に注意、p_0 を消さないためである。）

$S(2,6) = p_2a_2 + p_3a_3 + p_4a_4 + p_5a_5 + p_6a_6$

$= (s_2 - s_1)p_2 + (s_3 - s_2)p_3 + (s_4 - s_3)p_4 + (s_5 - s_4)p_5 + (s_6 - s_5)p_6$

$= s_2p_2 - \boldsymbol{s_1p_2} + s_3p_3 - s_2p_3 + s_4p_4 - s_3p_4 + s_5p_5 - s_4p_5 + \boldsymbol{s_6p_6} - s_5p_6$

$= s_2(p_2 - p_3) + s_3(p_3 - p_4) + s_4(p_4 - p_5) + s_5(p_5 - p_6) - \boldsymbol{s_1p_2} + \boldsymbol{s_6p_6}$

本番

$S(n,m) = p_na_n + p_{n+1}a_{n+1} + \cdots + p_{m-1}a_{m-1} + p_ma_m$

$= (s_n - s_{n-1})p_n + (s_{n+1} - s_n)p_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})p_{n+2} + \cdots + (s_m - s_{m-1})p_m$

$= s_np_n - \boldsymbol{s_{n-1}p_n} + s_{n+1}p_{n+1} - s_np_{n+1} + s_{n+2}p_{n+2} - s_{n+1}p_{n+2} + \cdots + \boldsymbol{s_mp_m}$

$- s_{m-1}p_m$

$= s_n(p_n - p_{n+1}) + s_{n+1}(p_{n+1} - p_{n+2}) + s_{n+2}(p_{n+2} - p_{n+3}) + \cdots + s_{m-1}(p_{m-1} - p_m)$

$- \boldsymbol{s_{n-1}p_n} + \boldsymbol{s_mp_m}$

特に

$S(0,m) = p_0a_0 + p_1a_1 + \cdots + p_{m-1}a_{m-1} + p_ma_m$

$= \boldsymbol{a_0}p_0 + (s_1 - s_0)p_1 + (s_2 - s_1)p_2 + \cdots + (s_{m-1} - s_{m-2})p_{m-1} + (s_m - s_{m-1})p_m$

$= \boldsymbol{s_0}p_0 + s_1p_1 - s_0p_1 + s_2p_2 - s_1p_2 + s_3p_3 - s_2p_3 + \cdots + s_{m-1}p_{m-1} - s_{m-2}p_{m-1}$

$+ s_mp_m - s_{m-1}p_m$

$= s_0(p_0 - p_1) + s_1(p_1 - p_2) + s_2(p_2 - p_3) + \cdots + s_{m-1}(p_{m-1} - p_m) + s_mp_m$

(P．377　定理4．3)

(準備) $T = N$ のとき、$b = +\infty$ とし、$+\infty$ の T 近傍とは $(n_0, +\infty) \cap N$ であるのでP．308定理13．4(一様コーシー条件)のb)は次の様になる。

b)任意の $\varepsilon > 0$ に対し $n_0 \in N$ が存在し $m \geqq n \geqq n_0$ ならば

$\| S(n,m) \| < \varepsilon$ となる。(P．44 定理5．1 , b) と少し違うが問題ない。)

(証明)

$S(n,m) = s_n(p_n - p_{n+1}) + s_{n+1}(p_{n+1} - p_{n+2}) + s_{n+2}(p_{n+2} - p_{n+3}) + \cdots + s_{m-1}($

$p_{m-1} - p_m) - \boldsymbol{s_{n-1}p_n} + \boldsymbol{s_mp_m}$

なので、仮定(i)から

$| S(n,m) | \leqq 2C | p_n |$　　($\forall n, m \in N, m \geqq n, \forall x \in A$)

よって、$\| f \|_A = \sup_{x \in A} | f(x) |$ なので、上限の定義(最小上界)から

$\| S(n,m) \| \leqq 2C | p_n | \leqq 2C \| p_n \|$ となる。

したがって、仮定a)が成り立つとき、$(p_n)_{n\in N}$ は A 上一様に 0 に収束するので一様コーシー条件のb)から、任意の $\dfrac{\varepsilon}{2C} > 0$ に対し $n_0 > 0$ が存在し、$n \geqq n_0$ ならば $\| p_n \| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$ とすることができる。

したがって、$m \geqq n \geqq n_0$ ならば、$\| S(n,m) \| < \varepsilon$ とすることができる。よって一様コーシー条件のa)から $\sum p_n a_n$ は A 上一様収束することがわかる。

仮定b)がみたされるときは、一様コーシー条件より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $n_0 \in N$ が存在し、$m \geqq n \geqq n_0$ のとき、次の不等式が成り立つ。

(4.6) $\quad \| \sum_{k=n}^{m} a_k \| < \varepsilon$

いま、$\sigma_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} a_k(x)$ とおけば、(4．6)より $\| \sigma_n(x) \| < \| \sum_{k=n_0}^{n} a_k(x) \| < \varepsilon$ ($\forall n \geqq n_0$) だから $a_k(x) = \sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)$ を用いてアーベルの変形を行うことにより $m \geqq n > n_0$ のとき(後に、アーベルの変形で $\sigma_{n-1}(x)$ が出てくるので $\| \sigma_{n-1}(x) \| < \varepsilon$ とするために $n-1 \geqq n_0$ とするためである)

$$| \sum_{k=n}^{m} p_k(x) a_k(x) | = | p_n(x)a_n(x) + p_{n+1}(x)a_{n+1}(x) + \cdots + p_{m-1}(x)a_{m-1}(x) + p_m(x) a_m(x) |$$

$$= | \{\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)\} p_n(x) + \{\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)\} p_{n+1}(x) + \{\sigma_{n+2}(x) - \sigma_{n+1}(x)\} p_{n+2}(x) + \cdots + \{\sigma_m(x) - \sigma_{m-1}(x)\} p_m(x) |$$

$$= | \sigma_n(x)p_n(x) - \boldsymbol{\sigma_{n-1}(x)p_n(x)} + \sigma_{n+1}(x)p_{n+1}(x) - \sigma_n(x)p_{n+1}(x) + \sigma_{n+2}(x) p_{n+2}(x) - \sigma_{n+1}(x)p_{n+2}(x) + \cdots + \boldsymbol{\sigma_m(x)p_m(x)} - \sigma_{m-1}(x)p_m(x) |$$

$$= | \{p_n(x) - p_{n+1}(x)\} \sigma_n(x) + \{p_{n+1}(x) - p_{n+2}(x)\} \sigma_{n+1}(x) + \{p_{n+2}(x) - p_{n+3}(x)\} \sigma_{n+2}(x) + \cdots + \{p_{m-1}(x) - p_m(x)\} \sigma_{m-1}(x) - \boldsymbol{\sigma_{n-1}(x)p_n(x)} + \boldsymbol{\sigma_m(x)p_m(x)} |$$

$$= | \sum_{k=n}^{m-1} \{p_k(x) - p_{k+1}(x)\} \sigma_k(x) - \boldsymbol{\sigma_{n-1}(x)p_n(x)} + \boldsymbol{\sigma_m(x)p_m(x)} |$$

仮定(ⅱ)から、単調減少の非負数列であるので

$\leqq \sum_{k=n}^{m-1}\{p_k(x)-p_{k+1}(x)\}\varepsilon+|p_n(x)|\varepsilon+|p_m(x)|\varepsilon \quad (m\geqq n>n-1\geqq n_0)$

$=\{p_n(x)-p_{n+1}(x)+p_{n+1}(x)-p_{n+2}(x)+p_{n+2}(x)-p_{n+3}(x)+\cdots+p_{m-1}(x)-p_m(x)+p_n(x)+p_m(x)\}\varepsilon=2\varepsilon|p_n(x)|\leqq 2\varepsilon|p_0(x)|$

がすべての $x\in A$ に対し成り立つ。

したがって

$m\geqq n>n_0 \Rightarrow \|S(n,m)\|\leqq 2\varepsilon\|p_0(x)\|$ であり、ε は任意だからやはり $\sum p_n a_n$ は一様コーシー条件a)をみたし、前半の証明と同様にして、A 上一様収束する。

(P. 378　例2)

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ は $I=(0,2\pi)$ で各点収束し、任意の $\pi>\delta>0$ に対し $(\delta,2\pi-\delta)=I_\delta$ で一様収束する。

(証明) $p_n=\dfrac{1}{n}$ とすれば、定理4．3の仮定ⅱ)とa)をみたす。よって、仮定ｉ)が成り立つことを示せばよい。オイラーの公式により

(4．7)　　$\sum_{m=1}^{n}\cos mx+i\sum_{m=1}^{n}\sin mx=\sum_{m=1}^{n}e^{imx}$

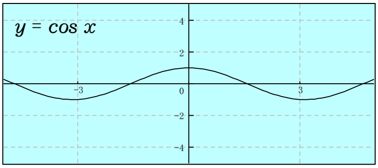
だから、この式の右辺が任意の $\pi>\delta>0$ に対し、$(\delta,2\pi-\delta)=I_\delta$ 上で一様有界であることを示す。

ここで、$\sum_{m=1}^{n}a^m=\dfrac{a^{n+1}-a}{a-1}$ なので、$\left|\sum_{m=1}^{n}e^{imx}\right|=\left|\dfrac{e^{ix(n+1)}-e^{ix}}{e^{ix}-1}\right|$

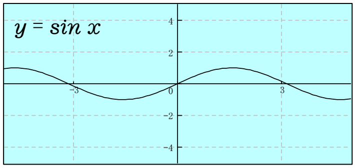
$$=\left|\frac{e^{ix}e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{\frac{inx}{2}}-\dfrac{1}{e^{\frac{inx}{2}}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-\dfrac{1}{e^{\frac{ix}{2}}}\right)}\right|=\left|\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}\right| \qquad (|e^{ix}|=1 \text{ だから})$$

また、$e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}=\cos\dfrac{nx}{2}+i\sin\dfrac{nx}{2}-\cos\left(-\dfrac{nx}{2}\right)-i\sin\left(-\dfrac{nx}{2}\right)$

$=2i\sin\dfrac{nx}{2}$　　同様にして、$e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}=2i\sin\dfrac{x}{2}$ なので



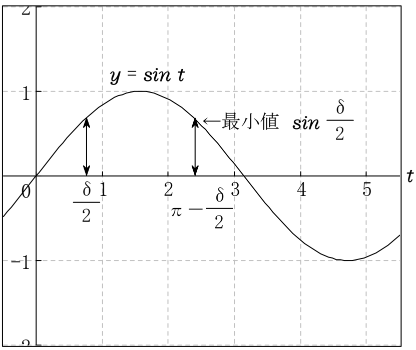
($\cos x = \cos(-x)$)



($\sin(-x) = -\sin x$)

$$\left|\sum_{m=1}^{n} e^{imx}\right| = \frac{\left|\sin\frac{nx}{2}\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \qquad (\forall x \in (\delta, 2\pi-\delta),\ \forall n \in \boldsymbol{N})$$

なぜなら、$x \in (\delta, 2\pi - \delta)$ ならば、$t = \dfrac{x}{2} \in \left(\dfrac{\delta}{2},\ \pi - \dfrac{\delta}{2}\right)$ なので



$$\left(\sin\frac{\delta}{2} \leqq \sin\frac{x}{2}\right)$$

(4. 7) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \cos mx + i \sum_{m=1}^{n} \sin mx = \sum_{m=1}^{n} e^{imx}$ から

$\displaystyle\left|\sum_{m=1}^{n} \cos mx + i \sum_{m=1}^{n} \sin mx\right| = \left|\sum_{m=1}^{n} e^{imx}\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$ となる。

ここで、$|a| < |a+ib|$, $|b| < |a+ib|$ なので

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \cos mx\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\ ,\quad \left|\sum_{m=1}^{n} \sin mx\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

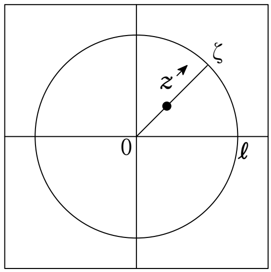
$$\left\|\sum_{m=1}^{n} \cos mx\right\| \leqq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\ ,\quad \left\|\sum_{m=1}^{n} \sin mx\right\| \leqq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \qquad (\forall n \in \boldsymbol{N})$$

であり、I_δ 上一様有界となる。$\delta>0$ は任意だから、δ を限りなく小さくすれば、任意の x に対して、$x\in I_\delta\subset(0,2\pi)$ とすることができるので、P．305命題13．2より各点収束する。

（P．378　定理4．4の拡張（アーベルの連続性定理））

収束半径が $\ell>0$ であるような整級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ と収束円周上の点 ζ（$|\zeta|=\ell$）に対して、$\rho=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ が収束すると仮定する。このとき、原点と ζ とを結ぶ半径に沿って、$z\to\zeta$ とすると $f(z)\to\rho$ が成り立つ。

（証明）$z=\zeta t$（$t\in I=[0,1]$）とおくと、$g(t)=f(\zeta t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n t^n$ は t に関する級数とみて $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ が収束する。$a_n\zeta^n$ は複素数でもよいので、アーベルの定理より右辺は $0\leqq t\leqq 1$ において一様収束し、$t\to 1-0$ のとき $g(t)\to\rho$ となる。定理4．4系は原点 0 を a にずらしただけである。



（P．379　例3）

例2の級数の和　$c=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n}$　,　$s=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}$　を求める。

いま z の整級数

（4．8）　$$c(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}z^n\quad,\quad s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}z^n$$

を考えると、$\theta\in(0,2\pi)$ ならば例2により、これらの級数は $z=1$ で収束する。したがって、Ⅲ章定理2．1より、これらの収束半径は共に $\geqq 1$ である。

そこで、$|z|<1$ で（4．8）は収束し、Ⅲ章（4．18）の $-Log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ から

$$c(z)+i\,s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}z^n+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{in\theta}}{n}z^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{i\theta}z)^n}{n}$$

$$=-Log(1-e^{i\theta}z)$$

となる。そこで特に、$z=x\in(-1,1)$ のとき、Ⅲ章定義2（4．13）$Log\,z=\ell og\,|z|$

$+i\theta'$ より （注意　$1-e^{i\theta}z \notin \{z\in R \mid z\leqq 0\}$ 下図参照）

$$c(x)+i\,s(x) = -\ell og\,|1-xe^{i\theta}|-i\,Arctan(\frac{x\sin\theta}{x\cos\theta-1})$$

となるから

$$c(x) = -\frac{1}{2}\ell og(1-2x\cos\theta+x^2)$$

$$s(x) = Arctan(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}) \quad (-1<x<1\,,\,0<\theta<2\pi)$$

を得る。なぜなら

$$1-xe^{i\theta} = 1-x\cos\theta-i\,x\sin\theta$$

$$|1-xe^{i\theta}|^2 = (1-x\cos\theta)^2+x^2\sin^2\theta = 1-2x\cos\theta+x^2$$

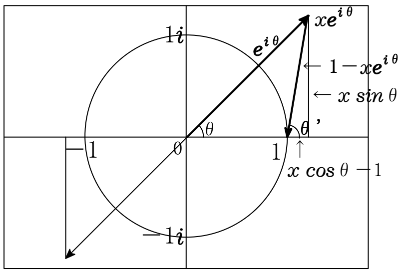
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -x$$

$$-\tan(-\theta) = \tan\theta$$

$$Arctan(-x) = -Arctan\,x$$

$$\tan(\pi+\theta') = \tan\theta'$$



$$-Arctan(\frac{x\sin\theta}{x\cos\theta-1}) = Arctan(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}) = \theta'$$ であるからである。

さて、例2により、$0<\theta<2\pi$ のとき、アーベルの連続性定理が $c(x)$、$s(x)$ に適用できるから

$$(4.9)\quad c = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = \lim_{x\to 1-0}c(x) = -\frac{1}{2}\ell og\{2(1-\cos\theta)\} = -\ell og(2\sin\frac{\theta}{2})$$

$$(4.10)\ s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = \lim_{x\to 1-0}s(x) = Arctan(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}) = \frac{\pi-\theta}{2}$$

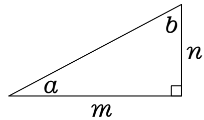
$$0<\theta<2\pi \to -2\pi<-\theta<0 \to -\pi<\pi-\theta<\pi \to (-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi-\theta}{2}<\frac{\pi}{2})$$

ここで、三角関数の復習

$$1-\cos\theta = 1-\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}) = 1-(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

また、$\sin\theta = \sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$　なので

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$



となるからである。 ($\tan b=\dfrac{m}{n}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\cot a$)

$\theta=0$, 2π のとき c は $\sum\dfrac{1}{n}$ なので発散し、s は各項が0だから、和は0である。

また $s(x)=Arctan\left(\dfrac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)$ は $\theta=0$, 2π で連続でないから $[0\,,2\pi]$ で

収束はするが一様収束はしない。

(P. 380　例4の補足)

① $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\ell$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|a_n|=|\ell|$ である。

(証明)仮定から、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある $n_0\in N$ が存在し、$n>n_0$ ならば

$||a_n|-|\ell||\leqq|a_n-\ell|<\varepsilon$ (P. 4　命題1. 2に追加)参照

②2つの正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ に対し、$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ であるとき、つまり、$a_n\sim b_n$

ならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ は同時に収束、発散する。

(証明) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ なので、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある $n_0\in N$ が存在し、$n>n_0$

ならば $\left|\dfrac{a_n}{b_n}-1\right|<\varepsilon$ とすることができる。

つまり、$1-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}<1+\varepsilon\ \to\ (1-\varepsilon)b_n<a_n<(1+\varepsilon)b_n$ となる。

よって、正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が収束すれば $a_n<(1+\varepsilon)b_n$ なので、P. 46定理5. 5(

比較定理)から、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ も収束し、$(1-\varepsilon)b_n<a_n$ から発散することもわかる。

a_n , b_n の立場を入れかえれば、「同時に」がわかる。

③ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ であるとき、つまり、$a_n\sim b_n$ のとき、$b_n\neq0$ ($n\to+\infty$) ならば

$a_n\neq0$ ($n\to+\infty$) である。

(証明) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ なので、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある $n_0\in N$ が存在し、$n>n_0$

ならば $\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|<\varepsilon$ とすることができる。

つまり、$1-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<1+\varepsilon \rightarrow (1-\varepsilon)b_n<a_n<(1+\varepsilon)b_n$ か $(1-\varepsilon)b_n>a_n>(1+\varepsilon)b_n$ なので、いずれにしても $a_n\neq 0$ である。

（P. 380　例4）

(4.11) $F(a,b;c;z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}\frac{z^n}{n!}$

は、a または b が負の整数$(-m\leqq 0)$ のとき m 次多項式である。

$$F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}$$

$$+\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)b(b+1)(b+2)(b+3)}{c(c+1)(c+2)(c+3)}\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

（例）$a=-3$ とすれば、$(a+3)=0$ となり

$$F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{6}$$

c が負の整数$(-m\leqq 0)$ のとき分母が0となり、$z^n(n>m)$ の係数が定義できない。

これら以外の場合の z^n の係数を a_n とおく。

(4.12) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$=\left|\frac{a\cdots(a+n)b\cdots(b+n)}{c\cdots(c+n)}\frac{1}{(n+1)!}\frac{c\cdots(c+n-1)}{a\cdots(a+n-1)b\cdots(b+n-1)}\frac{n!}{1}\right|$$

$$=\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}\right|\rightarrow 1\ (n\rightarrow+\infty)$$

であるから収束半径は1（P. 169Ⅲ章定理2. 2）である。また、$a,b,c\in R$ のとき

P. 332命題15. 3から

$\Gamma(a+n)=(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\Gamma(a)$ なので

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a$$

また、P. 296定理12. 2から $\Gamma(n+1)=n!$ なので

$$a_n = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)\Gamma(n)n}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{1}{n}$$

ここで、P. 340例3から、$\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)} \sim n^x \ (n\to+\infty)$ なので

$a_n \sim \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1} \ (n\to+\infty)$ となる。

そこで

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1}\right) z^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} n^{a+b-c-1} z^n$$

なる整級数を考える。

ｉ)$a+b-c<0$ ならば $a+b-c-1<-1$ なので (4.11) は単位円周 U 上のすべての点 z で絶対収束する。なぜなら、P. 369定理2. 5から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s>1$ のとき収束し、(上の補足①)より

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1}} = 1 \quad \text{なので} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{\left|\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1}\right|} = 1$$

である。よって、(上の補足②)より、

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ なので絶対収束する。

ⅱ)$a+b-c\geqq 1$ ならば $a+b-c-1\geqq 0$ なので、単位円周 U 上のすべての点 z で (4. 11)は(上の補足③)から $b_n = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1} \to 0 \ (n\to+\infty)$ とならないので、P. 45定理5. 1系より発散する。

ⅲ)$1>a+b-c\geqq 0$ のとき、(4. 11)は $z=1$ 以外の単位円周 U 上の点で収束し、$z=1$ で発散する。なぜなら、$z=1$ ならば $0>a+b-c-1\geqq -1$ なので P. 369定理2. 5から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は発散し、(補足②)より発散することがわかる。また $z\neq 1$, $|z|=1$ ならば $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N} z^N\right| = \left|\dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}\right| \leqq \dfrac{2}{|1-z|}$ は有界($z=i$, $N+1$ が偶数の場合に分子は2)である。また

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}=\frac{n^2+an+bn+ab}{n^2+nc+n+1}=\frac{n+a+b+\dfrac{ab}{n}}{n+c+1+\dfrac{1}{n}}$$ だから

$1>a+b-c\geqq 0\ \rightarrow c+1>a+b$ なので、ある $n_0\in N$ が存在して、$n\geqq n_0$ となるすべての n に対して　（$c+1-(a+b)>\dfrac{ab-1}{n_0}$ となるように n_0 をとればよい。）

$0<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

が成り立つ。そこで、$n\geqq n_0$ のとき a_n の符号は一定で (a_n) または $(-a_n)$ が単調減少の正数列となる。そして、$0>a+b-c-1$ なので、(4. 13)より $a_n\rightarrow 0$ $(n\rightarrow+\infty)$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 、$-\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ に対しアーベルの定理(定理4. 2)が適用され、収束することがわかる。

(P. 383　例1(アイゼンシュタン級数))

$N_0^2=N^2-\{(0,0)\}$ を添字集合とする。アイゼンシュタン級数

(5.7)　　$\displaystyle\sum_{(m,n)\neq 0}\frac{1}{(m^2+n^2)^s}$

は、$s>1$ のとき収束、$s\leqq 1$ のとき発散する。

(証明)N_0^2 の F 近似列として

$F_k=\{(m,n)\in N_0^2\mid 0\leqq m\leqq k,\ 0\leqq n\leqq k,\ (m,n)\neq(0,0)\}$ をとる。

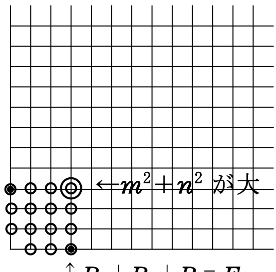
F_k の元の個数は $(k+1)^2-1$ であるから

$B_k=F_k-F_{k-1}$ の元の個数は

$(k+1)^2-1-(k^2-1)$

$=2k+1$

である。



また、任意の $n\geqq 1$ に対し

(5.8)　$\displaystyle\underset{(k^2+k^2\text{ が最大})}{\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{(2k^2)^s}}\leqq s_{F_n}=\sum_{k=1}^{n}s_{B_k}\leqq\underset{(k^2+0^2\text{ が最小})}{\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^{2s}}}$

である。したがって、$s>1$ ならば $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は収束するので、$2s-1>1$ に注意すれば

$$s_{F_n} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^{2s}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k^{2s}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2s}}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2s-1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2s}}$$

$$\leqq 2\zeta(2s-1)+\zeta(2s)$$

となり、$2s>2>1$ なので、数列 $(s_{F_n})_{n\in N}$ は上に有界だから $n\to+\infty$ のとき有限の極限が存在する。

よって、定理5．1から(5．7)は $s>1$ のとき収束する。

また、$s\leqq1$ ならば、$2s-1\leqq1$ だから、(5．8)の左の不等式によって

$$\frac{1}{2^{s-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq\frac{1}{2^{s-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2s-1}} \quad \{x^a\leqq x,(x\geqq1,a\leqq1)\}$$

$$=\frac{2}{2^s}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^{2s}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k^2)^s}<2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k^2)^s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k^2)^s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{(2k^2)^s}\leqq s_{F_n}$$

を得るから、$s_{F_n}\to+\infty$ $(n\to+\infty)$ である。そこでまた、定理5．1より、$s\leqq1$ ならば(5．7)は発散することがわかる。

(P．384　命題5．2)

この命題は定理5．1の特別な例である。このような級数を他書では累次級数と呼んでいる。定理5．1は上限で定義していたものを単調増加列 $(s_{F_n})_{n\in N}$ の極限に置き換えているところに利点がある。また

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q}a_{m,n}\leqq s$$

「ここで $q\to\infty$ とした後、$p\to\infty$ として、」とあるが、p を止めておいて q を先に増加させるのであるが、$a_{m,n}\geqq0$ であるので q についての単調増加列になり、有界なので $\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}$ の存在が保証される点に注意したい。

(P．385　命題5．3)

(証明)このとき、$\sum a_{m,n}^{\pm}$ が収束するので、N^2 の任意の F 近似列 $(F_n)_{n\in N}$ に対す

る部分和を $s_{F_n}^{\pm}$ とすれば、定理5．1によって

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}^{\pm} = \lim_{n\to+\infty} s_{F_n}^{\pm}$$

が成り立つ。

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}{}^{+} - \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}{}^{-} = \lim_{n\to+\infty} s_{F_n}^{+} - \lim_{n\to+\infty} s_{F_n}^{-} = \lim_{n\to+\infty} s_{F_n}$$

（P．385　定理5．4）

次の三つの級数

(5.15)　$\displaystyle \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \ ,\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \ ,\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}|$

のうち一つが有限ならば、他の二つも有限で

(5.16)　$\displaystyle \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$　（注　$a_{m,n} \geqq 0$とは限らないので命題5．2は使えない）

が成り立つ。

（証明）前半は、$|a_{m,n}| \geqq 0$ なので命題5．2から明らかである。

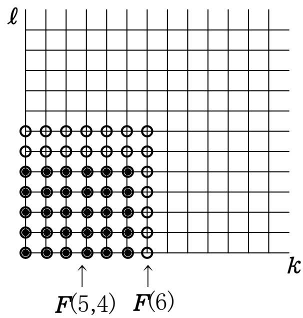
$F(k,\ell) = [0,k]\times[0,\ell] \cap N^2$, $F(k,k) = [0,k]\times[0,k] \cap N^2$

$= F(k)$ (F 近似列) とし、$k > p$, $k > q$ となるように $k \in N$ をとれば

$$\left| \sum_{(m,n)\in F(k)} a_{m,n} - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} a_{m,n} \right| \leqq \left| \sum_{(m,n)\in F(k)-F(p,q)} |a_{m,n}| \right|$$

$$\leqq \sum_{m>p \text{ または } n>q} |a_{m,n}|$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{m,n}| - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} |a_{m,n}|$$



ここで、命題5．3より、$\displaystyle \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ が収束すれば $k\to+\infty$ とすれば $s_{F_k} \to s$ だから

$$\left| \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} a_{m,n} \right| = \left| s - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} a_{m,n} \right|$$

$$\leqq \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{m,n}| - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} |a_{m,n}|$$

$q\to+\infty$ とした後に $p\to+\infty$ とすれば、命題5．2から右辺は $\to 0$ となるから（5．16）のはじめの等式が証明された。同様に、$p\to+\infty$ とした後に $q\to+\infty$ として、第二の等式も証明される。

（P. 386　例2）

$|x|<1$，$|y|<1$ ならば $\sum x^m y^n$ は絶対収束し

$$(5.17)\qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

となる。

（証明）定理5．4より、$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|x^m||y^n|$ が収束し

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|x^m||y^n| = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x^m|}{1-|y|} = \frac{1}{(1-|x|)(1-|y|)}$ となるから、（5．17）は絶対収束し、$\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x^m y^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{1-y} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$　となる。

（P. 386　例3）

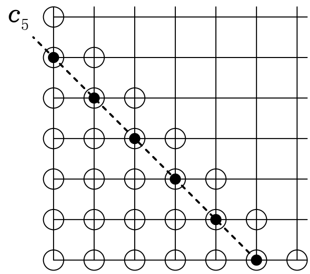
$$c_k = \sum_{m+n=k} a_m b_n$$

$$c_0 = a_0 b_0$$

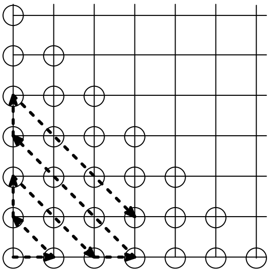
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

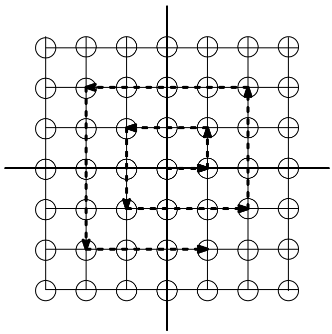
$$\vdots$$

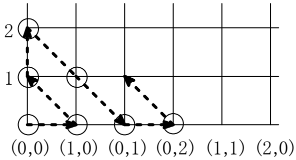
$$c_5 = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0$$



（P. 386　一列化の例）







◎ k 重級数になっても、順に一列化していけばできるはずである。

（P．387　定理5．5　$F(k) = \phi([0, k]\cap N^2)$ は N^2 の F 近似列）

ⅰ）$[0,0]\subset[0,1]\subset[0,2]\subset\cdots\subset[0,k]$ なので明らかである。

ⅱ）任意の F に対し、ϕ が全単射であることから任意の $(m, n)\in F$ に対し $(m, n) = \phi(k)$ となる $k\in N$ が存在する。また、F は有限部分集合なので、そのような k のなかで最大なものがある。それをつかえば ⅰ）が成り立つので $F\in F(k)$ とすることができる。

（P．389　定理6．1）

① なぜ $|p_n| > M > 0$ となる M が存在するか。

すべての n で $a_n \neq 0$ なので、$|p_n| \neq 0$ よって、そのような M が存在する。

② $|p_m - p_n| < \varepsilon M$ を $|p_n|$ で割ると

$$|a_{n+1}\cdots a_m - 1| = \left|\frac{p_m}{p_n} - 1\right| = \left|\frac{p_m - p_n}{p_n}\right| = \frac{|p_m - p_n|}{|p_n|} < \frac{\varepsilon M}{|p_n|} < \frac{\varepsilon M}{M} = \varepsilon$$

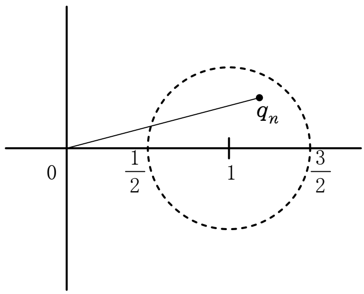
③ なぜ $\frac{1}{2} < |q_n| < \frac{3}{2}$ となるのか。

$||a| - |b|| < |a - b|$ なので

$$||q_n| - 1| = ||q_n| - |-1||$$
$$= ||q_n| - 1| \leqq |q_n - 1| < \frac{1}{2}$$

だからである。

q_n が複素数であることに注意したい。



④ $\left|\frac{q_m}{q_n} - 1\right| < \varepsilon \rightarrow |q_n|\left|\frac{q_m}{q_n} - 1\right| = |q_m - q_n| < \varepsilon|q_n|$

（P．389　例1）

$\ell og\, t$ は連続関数なので、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\exists \delta > 0$

$|t - 1| < \delta \rightarrow |\ell og\, t - \ell og(1)| < \varepsilon$

とすることができる。

$\prod_{n=0}^{\infty} e^{a_n}$ が収束すれば、$\forall \delta > 0$ に対し、コーシーの収束条件より n_0 が存在し

$m > n \geqq n_0$ ならば $|e^{a_{n+1}} e^{a_{n+2}} \cdots e^{a_m} - 1| < \delta$ とすることができる。

$e^{a_{n+1}} e^{a_{n+2}} \cdots e^{a_m} = t$ とおけば

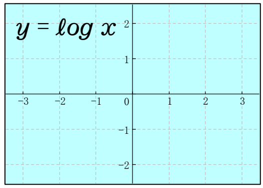
$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon$ となる。

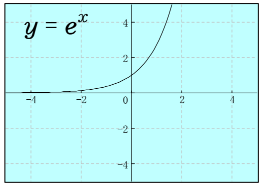
よって、$\sum a_n$ はコーシーの収束条件をみたす。

逆に $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m-0|<\delta$ となる n_0 が存在するので、e^t は $t=0$ で連続だから $\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists\delta>0$ 、$|t-0|<\delta$ ならば、$|e^t-e^0|<\varepsilon$ とすることができる。つまり $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m=t$ とすれば

$|e^{a_{n+1}}e^{a_{n+2}}\cdots e^{a_m}-1|<\varepsilon$

とすることができ、コーシーの収束条件をみたす。





（P．389　定理6．1系）

コーシーの条件から、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある n_0 が存在し、$m>n>n_0$ ならば つまり、$n+1>n>n_0$ ならば $\left|\dfrac{p_{n+1}}{p_n}-1\right|=|a_{n+1}-1|<\varepsilon$ とすることができるからである。

（P．389　定理6．2　$s_n<p_n$ について）

$n=0$ のとき $s_0=a_0<1+a_0=p_0$ よって、$s_n<p_n$ と仮定し帰納法で証明する。

$a_{n+1}>0$ としてもかまわないので（もし、$a_{n+1}=0$ ならば、$s_{n+1}=s_n$, $p_{n+1}=p_n$ なので除外して考えればよい。）$p_n\geqq 1$ であるから

$p_{n+1}=p_n(1+a_{n+1})=p_n+a_{n+1}p_n>s_n+a_{n+1}=s_{n+1}$ となり、証明された。

（P．389　定理6．3　三角不等式の使い方）

$|1+a_{n+1}|\leqq|1|+|a_{n+1}|$ をそれぞれに使う。

（P．390　定理6．4）

$\sum_{n=0}^{\infty}M_n$ は収束するので、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$n_0\in\boldsymbol{N}$ が存在し、$m\geqq n_0$ となるすべての $m\in\boldsymbol{N}$ に対し

(6.6)　　$\sum_{n>m}^{\infty}M_n<\varepsilon$

となる。なぜならば、$\sum_{n=0}^{\infty}M_n$ は収束するので、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$n_0\in\boldsymbol{N}$ が存在

し、$m \geqq n_0$ となるすべての $m \in N$ に対し $\left| \sum_{n=0}^{\infty} M_n - \sum_{n=0}^{m} M_n \right| < \varepsilon$ 、$\sum M_n$ は正項級数で単調増加するので、書き換えると(6．6)になる。したがって

(6.5) $\| p_n - p_{n-1} \| = \| p_{n-1}(1+a_n) - p_{n-1} \| = \| p_{n-1} a_n \| \leqq M_n e^M$

から、$m \geqq n_0$ のとき

$\sum_{n>m}^{\infty} \| p_n - p_{n-1} \| < \sum_{n>m}^{\infty} M_n e^M < e^M \varepsilon$

となり、$\sum_{n=1}^{\infty} \| p_n - p_{n-1} \| = \sum_{n=1}^{m} \| p_n - p_{n-1} \| + \sum_{n>m}^{\infty} \| p_n - p_{n-1} \|$

右辺の2番目の和が収束するので左辺が収束することがわかる。

また、関数項の級数

$p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_n - p_{n-1}) + \cdots$ は、$f_n = p_n - p_{n-1}$ としたとき

$= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

となる。したがって、P．309定理13．5(ワイヤストラスのM テスト)によって

ｉ) すべての $n \in N$ で $\| f_n \| < M_n e^M$ をみたし

ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n e^M$ は収束するので、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様収束する。

以上のことから

$p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_n - p_{n-1}) + \cdots$ は一様収束する。

そこで、この級数の第 n 部分和は p_n なので、関数列として見れば、関数列 $(p_n)_{n \in N}$ が A 上一様収束することになる。

連続については、a_n が A 上連続ならば $1+a_n$ も連続であり、部分積 p_n も連続である。よって、Ⅳ章 定理13．3 から連続となる。

(P．391　例3)

$s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in R$) と置くとき、$|n^s| = |exp[\log(n) \times (\sigma + it)]|$

$= |e^{\sigma \log(n)} \times e^{it \log(n)}| = |e^{\sigma \log(n)}| \times 1 = n^{\sigma}$ だから、$\sigma = Re\, s > 1$ のとき

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は絶対収束する。(定理2．5)　そこで複素変数 s の関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

が $Re\ s>1$ で定義できる。これをリーマンのゼータ関数という。この関数を最初に（実変数で）考えたのはオイラーで、彼は次のようにすべての素数 p の上にわたる無限積で $\zeta(s)$ が与えられることを示した。

（6．7） オイラーの積公式　　$\zeta(s)=\prod_{p=\text{素数}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$　（$Re\ s>1$）

ここで、右辺の無限積は素数 p を小さい方から大きさの順に並べて $p_1=2$, $p_2=3$, … としたときの $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^{\ s}}\right)^{-1}$ であるとする。（実は因子の順序には積は関係しない。）

このとき、$\sigma>1$ ならば $2\leqq p_n^{\sigma}$ → $0\leqq p_n^{\sigma}-2$ → $p_n^{\sigma}\leqq 2p_n^{\sigma}-2$ $=2(p_n^{\sigma}-1)$ だから $p_n^{\sigma}\leqq 2(p_n^{\sigma}-1)$

$$|a_n|=\left|\left(1-\frac{1}{p_n^{\ s}}\right)^{-1}-1\right|=\left|\frac{p_n^{\ s}}{p_n^{\ s}-1}-1\right|=\left|\frac{p_n^{\ s}-p_n^{\ s}+1}{p_n^{\ s}-1}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{p_n^{\ s}-1}\right|=\frac{1}{|p_n^{\ s}-1|}\leqq\frac{1}{|p_n^{\ s}|-1}=\frac{1}{p_n^{\sigma}-1}\leqq\frac{2}{p_n^{\sigma}}$$

最後の不等号は

$$\frac{p_n^{\sigma}}{2}\leqq p_n^{\sigma}-1 \rightarrow \quad \frac{2}{p_n^{\sigma}}\geqq\frac{1}{p_n^{\sigma}-1}$$ だからである。

つまり、$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{p_n^{\sigma}}\leqq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}$ （$\sigma>1$）　となり、P369 定理2．5より $\sum a_n$ は絶対収束し、定理6．2から （6．7）の右辺は絶対収束する。

ここで、 $1+\frac{1}{p_n^s}+\frac{1}{p_n^{2s}}+\frac{1}{p_n^{3s}}+\frac{1}{p_n^{4s}}\cdots$ という数列を考える。

$p_n^{\sigma}\geqq 2$ なので、この数列は絶対収束（s が複素数に注意、また、$s=1$ でもよい）する。 なぜならば、m 項までの絶対値の部分和を S_m とすれば

$$S_m=1+\frac{1}{|p_n^s|}+\frac{1}{|p_n^{2s}|}+\cdots+\frac{1}{|p_n^{(m-1)s}|}$$

$$=1+\frac{1}{p_n^{\sigma}}+\frac{1}{p_n^{2\sigma}}+\cdots+\frac{1}{p_n^{(m-1)\sigma}}\leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<2$$

であり、両辺を p_n^σ 倍して、上の式から引くと

$$p_n^\sigma S_m = p_n^\sigma + 1 + \frac{1}{p_n^\sigma} + \frac{1}{p_n^{2\sigma}} + \cdots + \frac{1}{p_n^{(m-2)\sigma}}$$

$$S_m(1 - p_n^\sigma) = \frac{1}{p_n^{(m-1)\sigma}} - p_n^\sigma$$

$$S_m = \frac{\dfrac{1}{p_n^{(m-1)\sigma}} - p_n^\sigma}{1 - p_n^\sigma} \to \frac{-p_n^\sigma}{1 - p_n^\sigma} = \frac{p_n^\sigma}{p_n^\sigma - 1} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_n^\sigma}} \quad (m \to \infty)$$

そして次の等式が得られる。

(6．8) $$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_n^s}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n^s} + \frac{1}{p_n^{2s}} + \cdots\right)$$

ここで、(6．8)の右辺を展開することを考える。

$Re\ s = \sigma > 1$ であるから $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{ks}}$ は絶対収束する。したがってそれらの積は

P. 386 例3 により

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{ks}}\right) \times \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{p_m^{\ell s}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{p_n^s} + \frac{1}{p_n^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{p_m^s} + \frac{1}{p_m^{2s}} + \cdots\right) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(p_n^k p_m^\ell)^s}$$

$n \neq m$ のとき、右辺は絶対収束するので、P.374定理3．4系から、どのように項の順序を変えても和は変わらないので、項の順序は大きさの順になっているとしてもよい。また、右辺の $p_n^k p_m^\ell$ は p_n と p_m のみを素因数とするすべての自然数 $n \geqq 1$ の上にわたる $\frac{1}{n^s}$ の和となる。

例えば、$p_1 = 2$, $p_3 = 3$ とすれば

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k 3^\ell)^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{(2^2)^s} + \frac{1}{(2 \times 3)^s} + \frac{1}{(3^2)^s} + \frac{1}{(2^3)^s} + \frac{1}{(2^2 \times 3)^s} + \frac{1}{(2 \times 3^2)^s} + \frac{1}{(3^3)^s} + \frac{1}{(2^2 \times 3^2)^s} + \cdots$$

$$= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{12^s}+\frac{1}{18^s}+\frac{1}{27^s}+\frac{1}{36^s}+\cdots$$

同じことを m 個の積について考えると、P.385例3、定理3．4系を繰り返し使うことにより

$$\prod_{n=1}^{m}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \sum_{k_1,k_2,\cdots k_m=0}^{\infty}\frac{1}{(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})^s} = \sum{}'\frac{1}{n^s}$$

となる。ここで右辺は $p_1,\cdots,p_m$ のみを素因数とするすべての自然数 $n \geqq 1$ の上にわたる $\frac{1}{n^s}$ の和（素因数分解の一意性から重複はない）となる。このような自然数には $n \leqq p_m$ となるすべての自然数が含まれているから（$n \leqq p_m$ となる自然数の集合を A とすると、$1, p_1, \cdots, p_m \in A$ である。また、n が合成数ならば p_m より小さい素因数の積で表すことができるので $n \in A$ となる。）

$$(6.10) \qquad \prod_{n=1}^{m}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \sum{}'\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s} + \sum{}''\frac{1}{n^s}$$

の形となる。ここで、$\sum{}''\frac{1}{n^s}$ は、$p_1,\cdots,p_m$ のみを素因数とし、$n > p_m$ である自然数 n に関する和である。いま、$Re\ s > 1$ で $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は絶対収束するから、

$\sum_{n>p_m}\frac{1}{|n^s|} \to 0\ (m\to\infty)$ である。したがって

$$\left|\sum{}''\frac{1}{n^s}\right| \leqq \sum{}''\frac{1}{|n^s|} \leqq \sum_{n>p_m}\frac{1}{|n^s|} \to 0\ (m\to\infty)$$

↑

（$p_1,\cdots,p_m$ のみを素因数とし、$n > p_m$ である自然数 n）

が成り立つ。そこで、(6．10) で $m\to\infty$ つまり $p_m \to \infty$ で (6．7) を得る。

オイラーの積公式は、リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ が素数の分布に密接に関係していることを示す。例えば (6．10) からオイラーは素数が無限にあること、さらに強く素数の逆数が作る級数は発散することを示した。

まず素数が無限個あることを示す。

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^k}$ は絶対収束するから $Re\ s = \sigma > 1$ に関係なく (6．10) は $s = 1$ でも成

り立つ。

したがって、(6．10)の左辺を $p_m(s)=\prod_{n=1}^{m}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^s}}$ とおくと

$$p_m(1)=\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n}+\sum{}''\frac{1}{n}$$

↑

($p_1,\cdots,p_m$ のみを素因数とし、$n>p_m$ である自然数 n)

ここで、任意の自然数 $n\geqq1$ は一意的に素数の冪の積として表されるから、もし最大の素数を p_r とすれば、$\sum''\dfrac{1}{n}$ の n は p_r より大きいすべての自然数にまで及ぶはずなので

$$p_r(1)=\sum_{n=1}^{p_r}\frac{1}{n}+\sum{}''\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ となり、

右辺は発散するが、$p_r(1)$ は有限の値であり矛盾する。よって、素数が無限個あることがわかる。次に、素数の逆数が作る級数の発散についてだが、

(6．11) $$\sum_{p=素数}\frac{1}{p}=+\infty$$

実際(6．10)の左辺に $s=1$ を 代入すると

$$P_m(1)=\prod_{n=1}^{m}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}}=\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n}+\sum{}''\frac{1}{n}\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad(m\to+\infty)$$

である。級数 $\sum\dfrac{1}{n}$ は発散するから、$p_m(1)\to\infty\ (m\to\infty)$ であり、

$$\prod_{p=素数}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\quad(s=1)$$

は $s=1$ のとき$+\infty$に発散する。したがって、逆数の第 m 因子までの部分積は,

$$\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=\prod_{n=1}^{m}\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n}+\sum{}''\frac{1}{n}}\to0\ (m\to\infty)$$

つまり、

(6．12) $$\prod_{p=素数}\left(1-\frac{1}{p}\right)=0$$ となる。

したがって、$\displaystyle\sum_{p=素数}\frac{1}{p}$ が収束するとすれば、定理6．2より、$\displaystyle\prod_{p=素数}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ が収束し

$$\prod_{p=\text{素数}}\left(1+\left|-\frac{1}{p}\right|\right)=\prod_{p=\text{素数}}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

なので、定理6．3から、$\prod_{p=\text{素数}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ も収束する。つまり、0 でない値に収束するはずであるが、これは、(6．12)に反する。

（参考　Wikipedia－オイラー積）

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\cdots\quad(Re\ s>1)$$

ここで両辺に最小の素数2の $(-s)$ 乗 $\frac{1}{2^s}$ をかけると

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s)=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{12^s}+\frac{1}{14^s}+\frac{1}{16^s}+\cdots$$

となり、上の式から引くと

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{15^s}+\cdots$$

となり、次に2の次の素数3の $(-s)$ 乗 $\frac{1}{3^s}$ をかけると

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{27^s}+\frac{1}{33^s}+\frac{1}{39^s}+\frac{1}{45^s}+\cdots$$

となり、再びすぐ上の式から引くと

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\cdots$$

以上同様にして次々と素数の $(-s)$ 乗をかけて前の式から引いていくという操作を続けると右辺の $\frac{1}{1^s}$ 以外の項は（素因数分解の一意性によって）消えるので

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\cdots\zeta(s)=\frac{1}{1^s}=1$$

したがって、ゼータ関数は以下の形で表現される。

$$\zeta(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\cdots}$$

この方法は昔中学校で習った、エラトステネスのふるいと原理は同じである。

これで第 I 巻は終わった。