（P．249　定理7．1の証明の補足）

$$\sum_{m\in k(\Delta'')} m_k v(K_m) \leqq \sum_{m\in k(\Delta'')} \int_{K_m} f(x\,,\,y)dy = F(x)$$

各 J_ℓ から 点 ξ_ℓ を選び、上の不等式で $x = \xi_\ell$ とすれば

$$\sum_{m\in k(\Delta'')} m_k v(K_m) \leqq \sum_{m\in k(\Delta'')} \int_{K_m} f(\xi_\ell\,,\,y)dy = F(\xi_\ell)$$

が成り立つ。また、それらに $v(J_\ell)$ を掛けて $\ell \in K(\Delta')$ について総和すれば

$$\sum_{\ell\in K(\Delta'),\, m\in k(\Delta'')} m_k v(K_m) v(J_\ell) \leqq \sum_{\ell\in K(\Delta')} F(\xi_\ell) v(J_\ell) = s(F\,;\,\Delta'\,;\,\xi)$$

$$\sum_{k\in K(\Delta)} m_k v(I_k) \leqq \sum_{\ell\in K(\Delta')} F(\xi_\ell) v(J_\ell) = s(F\,;\,\Delta'\,;\,\xi)$$

$$s_\Delta(f) \leqq s(F\,;\,\Delta'\,;\,\xi)$$

同様にして、I の任意の分割 $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ に対して次の（7．6）がいえる。

（7．6）　　　$s_\Delta(f) \leqq s(F\,;\,\Delta'\,;\,\xi) \leqq S_\Delta(f)$

ここでは、Δ は Δ'と Δ''から作られたと解釈した方がよい。なぜそのようにできるのかは、f が I で可積分であるからである。 あくまで、この証明の目標は、$F(x) = \int_K f(x,y)dy$ が J 上可積分であることを示すことである。

つまり、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$d(\Delta') < \dfrac{\delta}{2}$ となる J の任意の分割 Δ' を選ぶ。

このとき、$d(\Delta'') < \dfrac{\delta}{2}$ となるような K の分割 Δ'' を一つ取れば、$\Delta = \Delta' \times \Delta''$ となる I の分割 Δ を作ることができる。しかも

$d(\Delta) \leqq \sqrt{d(\Delta')^2 + d(\Delta'')^2} < \dfrac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ だから (7.6) から

$$|s(F\,;\,\Delta'\,;\,\xi) - \int_I f| \leqq |s(F\,;\,\Delta'\,;\,\xi) - s_\Delta| + |s_\Delta - \int_I f|$$

$$\leqq |S_\Delta - s_\Delta| + |s_\Delta - \int_I f|$$

$$= |S_\Delta - \int_I f - s_\Delta + \int_I f| + |s_\Delta - \int_I f|$$

$$\leqq |S_\Delta - \int_I f| + |s_\Delta - \int_I f| + |s_\Delta - \int_I f|$$

$$= |S_\Delta - \int_I f| + 2|s_\Delta - \int_I f| < \varepsilon$$

（P．253　例4）

（平均値の定理）

$a < b$ とする。$f : I = [\,a\,,\,b\,] \to R$ が、I で連続、$(\,a\,,\,b\,)$ で微分可能ならば

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

をみたす $c \in (\,a\,,\,b\,)$ が存在する。

Ⅳ章§3問題4）

$I = [\,a\,,\,b\,]$ で $F(x)$ が微分可能で、$f(x) = F'(x)$ は有界とするとき、I の任意の分割 Δ に対して

$s_\Delta(\,f\,) \leqq F(b) - F(a) \leqq S_\Delta(\,f\,)$

が成り立つことを示せ。また、特に f が I 上可積分ならば、これから

$\int_I f = F(b) - f(a)$

となることを証明せよ。

（証明）I の任意の分割

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

に対して、平均値の定理により、

$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\quad(\,1 \leqq k \leqq n\,)$

をみたす $\xi_k \in (\,x_{k-1}\,,\,x_k\,)$ が存在する。小区間 I_k における f の上限、下限を $M_k\,,\,m_k$ とすれば

$m_k \leqq f(\xi_k) \leqq M_k$

が成り立つ。この不等式に $v(\,I_k\,) = (\,x_k - x_{k-1}\,)\,,\,k \in K(\Delta)$ をかければ

$m_k(\,x_k - x_{k-1}\,) \leqq f(\xi_k)(\,x_k - x_{k-1}\,) \leqq M_k(\,x_k - x_{k-1}\,)$

この式を $k \in (\,1 \leqq k \leqq n\,)$ について総和すれば

$s_\Delta \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\,x_k - x_{k-1}\,) \leqq S_\Delta$

ここで、

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\,x_k - x_{k-1}\,) = \sum_{k=1}^{n}\{\,F(x_k) - F(x_{k-1})\,\}$

$= F(\,b\,) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(a) = F(b) - F(a)$

よって

$s_\Delta \leqq F(b) - F(a) \leqq S_\Delta$

を得る。この不等式は、Δ に無関係な一定値 $F(b)-F(a)$ なので、f が I 上可積分ならば、ダルブーの定理から、$\int_I f = F(b)-F(a)$ となる。

Ⅳ章§3問題5)

$I = [\ a\ ,\ b] \times [\ c\ ,\ d\ ]$ で定義された実数値関数 $F(x,y)$ に対し、偏導関数 $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ が I で存在して有界であるとする。このとき、I の任意の分割 Δ に対する f の不足和、過剰和 $s_\Delta = s_\Delta(\ f\ )\ ,\ S_\Delta = S_\Delta(\ f\ )$ は

$$s_\Delta \leqq F(\ b\ ,\ d\ )-F(\ b\ ,\ c\ )-F(\ a\ ,\ d\ )+F(\ a\ ,\ c\ ) \leqq S_\Delta$$

をみたすことを証明せよ。したがって、f が可積分のとき、

$$\iint_I f(x,y)dxdy = F(\ b\ ,\ d\ )-F(\ b\ ,\ c\ )-F(\ a\ ,\ d\ )+F(\ a\ ,\ c\ )$$ となる。

(証明)I の任意の分割 Δ を

$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$\Delta'' : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$

$\Delta = \Delta' \times \Delta''$ とする。小区間 $I_k = [\ x_i\ ,\ x_{i-1}\ ] \times [\ y_j\ ,\ y_{j-1}\ ]$ ($k = (\ i\ ,\ j\ ) \in K(\Delta) = K(\Delta') \times K(\Delta'')$) 上での $F(x,y)$ の上限、下限を $M_k\ ,\ m_k$ とする。

$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ が I で存在するので、平均値の定理により

$$F(\ x_i\ ,\ y_j\ )-F(\ x_{i-1}\ ,\ y_j\ )-F(\ x_i\ ,\ y_{j-1}\ )+F(\ x_{i-1}\ ,\ y_{j-1}\ )$$

$$= F(\ x_i\ ,\ y_j\ )-F(\ x_i\ ,\ y_{j-1}\ )-\{\ F(\ x_{i-1}\ ,\ y_j\ )-F(\ x_{i-1}\ ,\ y_{j-1}\ )\ \}$$

$$= \frac{\partial\{\ F(\ x_i\ ,\ \eta_j\ )-F(\ x_{i-1}\ ,\ \eta_j\ )\}}{\partial y}(\ y_j-y_{j-1}\ )$$

$$= \frac{\partial\{\ \dfrac{\partial F(\ \xi_i\ ,\ \eta_j\ )}{\partial x}(\ x_i-x_{i-1}\ )\}}{\partial y}(\ y_j-y_{j-1}\ )$$

$$= \frac{\partial^2 F(\ \xi_i\ ,\ \eta_j\ )}{\partial x \partial y}(\ x_i-x_{i-1}\ )(\ y_j-y_{j-1}\ )$$

$$= f(\ \xi_i\ ,\ \eta_j\ )(\ x_i-x_{i-1}\ )(\ y_j-y_{j-1}\ )$$

をみたす $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $\eta_j \in (y_{j-1}, y_j)$ が存在する。

$$m_k \leqq f(\xi_i, \eta_j) \leqq M_k$$

$$m_k(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leqq f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\leqq M_k(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad \cdots \text{①}$$

$(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = v(I_k)$ であることに注意したい。

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{k \in K(\Delta)} v(I_k)$$

①の不等式の両端は、それぞれ s_Δ, S_Δ となる。

$$s(f;\Delta;(\xi,\eta)) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\{F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1})\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\{F(x_1, y_j) - \boxed{F(a, y_j)} - F(x_1, y_{j-1}) + \boxed{F(a, y_{j-1})}$$

$$+ F(x_2, y_j) - F(x_1, y_j) - F(x_2, y_{j-1}) + F(x_1, y_{j-1})$$

$$+ F(x_3, y_j) - F(x_2, y_j) - F(x_3, y_{j-1}) + F(x_2, y_{j-1})$$

$$\vdots$$

$$+ F(x_{n-1}, y_j) - F(x_{n-2}, y_j) - F(x_{n-1}, y_{j-1}) + F(x_{n-2}, y_{j-1})$$

$$+ \boxed{F(b, y_j)} - F(x_{n-1}, y_j) - \boxed{F(b, y_{j-1})} + F(x_{n-1}, y_{j-1})\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\{F(b, y_j) - F(b, y_{j-1}) - F(a, y_j) + F(a, y_{j-1})\}$$

$$= F(b, y_1) - \boxed{F(b, c)} - F(a, y_1) + \boxed{F(a, c)}$$

$$+ F(b, y_2) - F(b, y_1) - F(a, y_2) + F(a, y_1)$$

$$+ F(b, y_3) - F(b, y_2) - F(a, y_3) + F(a, y_2)$$

$$\vdots$$

$$+ F(b, y_{m-1}) - F(b, y_{m-2}) - F(a, y_{m-1}) + F(a, y_{m-2})$$

$$+ \boxed{F(b, d)} - F(b, y_{m-1}) - \boxed{F(a, d)} + F(a, y_{m-1})$$

$$= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

$$s_\Delta \leqq F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \leqq S_\Delta \quad \cdots \text{②}$$

が成り立つ。

よって、②より、問題4)と同様に、$f(x\ ,\ y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ が I で可積分であれば

$\iint_I f(x,y)dxdy = F(\ b\ ,\ d\ )-F(\ b\ ,\ c\ )-F(\ a\ ,\ d\ )+F(\ a\ ,\ c\ )$ となる。

しかし、これを n 変数関数に拡張することは、私には容易とは思えない。

(P. 254　定義1について)

定義1　R_n の有界部分集合 A 上の**有界な実数値関数** f に対して、$A \subset I$ となる有界閉区間 I を一つ取る。そして、関数 $f^{※}: R^n \to R$ を

(8. 1)
$$f^{※}(x) = \begin{cases} f(x)\ ,\ x \in A \\ 0\ ,\ x \notin A \end{cases}$$

によって定義する。**関数 $f^{※}$ が I 上可積分であるとき、f は A 上可積分である**といい

(8. 2)
$$\int_A f = \int_I f^{※}$$

によって、f の A 上の積分 $\int_A f$ を定義する。

次に、定義関数 $\chi_A : R^n \to R$ もまた I で定義されている。

$$\chi_A = \begin{cases} 1\ ,\ x \in A \\ 0\ ,\ x \notin A \end{cases}$$

である。よって、(8. 5) $f^{※}(x) = f^{※}(x)\chi_A(x)$ となる。

さて、A 上の積分を I 上の積分に置き換えたことになるが、では実際 χ_A を作れと言われたら、こんな都合の良い関数ができるわけがない。つまり、後に続く定理の証明のためにあるとしかいえない。

(P. 256　例3　カントールの三進集合)

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset C$

A_n は長さ $\dfrac{1}{3^n}$ の区間

2^n 個の直和である。

$C \subset A_n \subset I$ なので、$0 \leqq \chi_C \leqq \chi_{A_n}$ ($x \in I$) という関係がある。

$$0 \leqq \underline{\int_I} \chi_C \leqq \overline{\int_I} \chi_C \leqq \overline{\int_I} \chi_{A_n} = v(\ A_n\ ) = (\frac{2}{3})^n \to 0\ (\ n \to \infty\ )$$

となり、C は体積確定で、$v(C) = s(\chi_C) = S(\chi_C) = 0$ となる。

（P．257　命題8．2　3)）

1) f が A 上可積分ならば、A を含む有界閉区間 I 上で $f^{※}$ が可積分であるので $f^{※}=f^{※}\chi_A$ は I 上可積分である。逆に、$f^{※}\chi_A$ が I で可積分ならば、$f^{※}$ は I 上可積分であり、f は A 上可積分となる。

2) B が体積確定ならば、B 上で定数 1 が可積分なので B を含む有界閉区間 I 上で $1^{※}$ が可積分である。$1^{※}=\chi_B$ なので、χ_B は I 上で可積分となる。

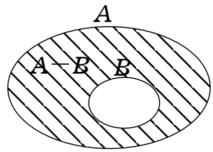
3) $A\supset B$ で f が B 上 0 に等しければ、$f^{※}=(f\,|\,A-B)^{※}$

なぜなら、$A-B\subset A\subset I$ となる有界閉区間 I をとると、$\forall x\in I$ に対し、

$$(f\,|\,A-B)^{※}(x)=\begin{cases}(f\,|\,A-B)(x) & ,\ x\in A-B\\ 0 & ,\ x\notin A-B\end{cases}=\begin{cases}f(x), & x\in A-B\\ 0\ , & x\notin A-B\end{cases}$$

$$f^{※}(x)=\begin{cases}f(x)\ , & x\in A\\ 0\ , & x\notin A\end{cases}=\begin{cases}f(x) & ,\ x\in A-B\\ f(x)=0 & ,\ x\in B\\ 0 & ,\ x\notin A\end{cases}=\begin{cases}f(x)\ , & x\in A-B\\ 0\ , & x\notin A-B\end{cases}$$

$x\in B$ または $x\notin A$ のとき $f(x)=0$ なので、$x\notin A-B$ のとき $f(x)=0$ となる。



したがって、$f^{※}(x)=(f\,|\,A-B)^{※}(x)$

$$\int_{A-B}(f\,|\,A-B)(x)=\int_I(f\,|\,A-B)^{※}(x)=\int_I f^{※}(x)=\int_A f(x)$$

（P．257　定理8．3）

3)（平行移動不変性）

$I\supset A$ となる有界閉区間 I をとる。$I+c$ も有界閉区間であり、$I+c\supset A+c$ である。仮定より、f は $A+c$ 上可積分なので、定理2．4から

$$\int_{A+c}f=\int_{I+c}f^{※}=\int_I f^{※}\circ T_c$$

ここで $f^{※}(x)=\begin{cases}f(x)\ ,\ x\in A+c\\ 0\qquad ,\ x\notin A+c\end{cases}$ である。よって

$$f^{※}\circ T_c=\begin{cases}f\circ T_c(x)\ , & T_c(x)\in A+c\\ 0 & ,\ T_c(x)\notin A+c\end{cases}=\begin{cases}f\circ T_c(x)\ , & x+c\in A+c\\ 0 & ,\ x+c\notin A+c\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f\circ T_c(x)\ , & x\in A\\ 0 & ,\ x\notin A\end{cases}=(f\circ T_c)^{※}(x)$$

したがって

$$\int_{A+c} f = \int_{I+c} f^{※} = \int_I f^{※} \circ T_c = \int_I (f \circ T_c)^{※} = \int_A f \circ T_c$$

また、$I \supset A$ となる有界閉区間 I をとる。$\chi_{A+c} \circ T_c = \chi_A$ $(\forall x \in I)$ である。

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_{A+c} \circ T_c(x) = \chi_{A+c}(x+c) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$v(A) = \int_I \chi_A = \int_I \chi_{A+c} \circ T_c = \int_{I+c} \chi_{A+c}$ である。$I+c$ は $A+c$ を含む有界閉区間であり、$A+c$ を含む他の有界閉区間 I' をとっても、命題8．1から、

$v(A+c) = \int_{I'} \chi_{A+c} = \int_{I+c} \chi_{A+c}$ であり、$v(A+c) = v(A)$ となる。

4)（三角不等式）

$$|f|^{※} = \begin{cases} |f(x)|, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$f^{※} = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \qquad \text{よって、} \qquad |f^{※}| = \begin{cases} |f(x)|, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

混乱しやすいが、$|f|^{※} = |f^{※}|$ である。したがって、定理3．5から

$$\left|\int_A f\right| = \left|\int_I f^{※}\right| \leqq \int_I |f^{※}| = \int_I |f|^{※} = \int_A |f|$$

6)（第一平均値定理）

$A \subset I$ となる有界閉区間をとる。f が A で有界可積分関数であれば、I における値の上限 M、下限 m が存在する。このとき、任意の x に対して、

$m \leqq f(x) \leqq M$

だから、積分の単調性2)より

$$\int_I m \cdot \chi_A \leqq \int_I f^{※} = \int_A f \leqq \int_I M \cdot \chi_A$$

$$m \cdot v(A) \leqq \int_I f^{※} = \int_A f \leqq M \cdot v(A)$$

よって、$v(A) > 0$ なので、$\mu = \dfrac{1}{v(A)} \int_A f$ とすれば、$m \leqq \mu \leqq M$ とすることができる。

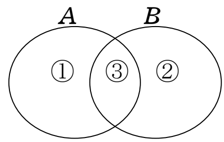
（P．258　定理8．5）

$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$ について、

$x\in A\cup B$ ならば次の3つのいずれかである。

①（$x\in A$, $x\notin B$, $x\notin A\cap B$）

$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=1+0-0=1$



②（$x\in B$, $x\notin A$, $x\notin A\cap B$）

$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=0+1-0=1$

③（$x\in A\cap B$）

$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=1+1-1=1$

$x\notin A\cup B\rightarrow x\notin A, B$ なので $x\notin A\cap B$ である。したがって

$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=0+0-0=0$

よって、$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=\chi_{A\cup B}$ となる。積分の線型性（定理2．1）より

$$\int_I f^{※}\cdot\chi_{A\cup B}=\int_I f^{※}\cdot(\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B})$$

$$=\int_I f^{※}\cdot\chi_A+\int_I f^{※}\cdot\chi_B-\int_I f^{※}\cdot\chi_{A\cap B}$$

命題8．4から

$$\int_{A\cup B}f=\int_I f^{※}\cdot\chi_{A\cup B}=\int_I f^{※}\cdot\chi_A+\int_I f^{※}\cdot\chi_B=\int_A f+\int_B f$$

を得る。

（P．259　定理8．6）

$A-B$ の定義関数が $\chi_A-\chi_{A\cap B}$ については

$A-B=A-(A\cap B)$ なので $x\in A-B$ ならば $x\in A$ かつ $x\notin A\cap B$ であるから、$\chi_A-\chi_{A\cap B}=1-0=1$

$x\notin A-B=A\cap B^c$ ならば $x\in(A\cap B^c)^c=A^c\cup B$ なので $x\notin A$ または $x\in B$

であるから、$x\notin A$ ならば当然 $x\notin A\cap B$ なので $\chi_A-\chi_{A\cap B}=0-0=0$

$x\in B$ ならば $x\in A\cap B$ と $x\notin A\cap B$ の可能性がある。

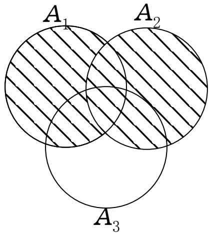
$x\in A\cap B$ ならば $x\in A$ なので $\chi_A-\chi_{A\cap B}=1-1=0$

$x\notin A\cap B$ ならば $x\in B$ なので $x\notin A$ であり $\chi_A-\chi_{A\cap B}=0-0=0$

よって、$x\notin A-B$ ならば $\chi_A-\chi_{A\cap B}=0$

(8．11)　$v\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} v(A_i) - \sum_{i=1}^{m-1} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k \cap A_{i+1}\right)$ について

わかりにくいので図にしてみると



$(m = 2)$

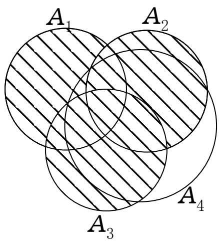
$v(A_1)+v(A_2) = v(A_1 \cup A_2) - v(A_1 \cap A_2)$

$(m = 3)$

$v(A_1)+v(A_2)+v(A_3)$

$= v(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - v(A_1 \cap A_2) - v\{(A_1 \cup A_2) \cap A_3)\}$

$= v\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) - \sum_{i=1}^{2} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k \cap A_{i+1}\right)$



$(m = 4)$

$v(A_1)+v(A_2)+v(A_3)+v(A_4)$

$= v(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) - v(A_1 \cap A_2) - v\{(A_1 \cup A_2) \cap A_3)\}$

$- v\{(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4\}$

$= v\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) - \sum_{i=1}^{3} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k \cap A_{i+1}\right)$

$(m = 5)$

$v(A_1)+v(A_2)+v(A_3)+v(A_4)+v(A_5) = v(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) - v(A_1 \cap A_2) - v\{(A_1 \cup A_2$
$) \cap A_3)\} - v\{(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4\} - v\{(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap A_5\}$

$= v\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) - \sum_{i=1}^{4} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k \cap A_{i+1}\right)$

m についての数学的帰納法による証明であるが、$m = 1$ のときは自明である。

$m > 2$ とし、$m-1$ のとき (8．11) が成り立つと仮定する。

このとき、$A = \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$, $B = A_m$ として、(8．9)を用いる。

$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$　なので

$$v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cup A_m\right) + v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cap A_m\right) = v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) + v(A_m)$$

帰納法の仮定から右辺は

$$v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cup A_m\right) + v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cap A_m\right) = \sum_{i=1}^{m-1} v(A_i) - \sum_{i=1}^{m-2} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k \cap A_{i+1}\right) + v(A_m)$$

$$v\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cap A_m\right) = \sum_{i=1}^{m} v(A_i) - \sum_{i=1}^{m-2} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k \cap A_{i+1}\right)$$

$$v\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} v(A_i)-\sum_{i=1}^{m-2} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k\cap A_{i+1}\right)-v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\cap A_m\right)$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{m-1} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k\cap A_{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{m-1} v((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i)\cap A_{i+1})$$

$$=v(A_1\cup A_2)+v((A_1\cup A_2)\cap A_3)+\cdots+v((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1})\cap A_m)$$

$$=v(A_1\cup A_2)+\cdots+v((A_1\cup\cdots\cup A_{m-2})\cap A_{m-1})+v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\cap A_m\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m-2} v\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k\cap A_{i+1}\right)+v\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\cap A_m\right)$$

よって、(8．11)を得る。また、集合の分配法則から他のことがいえる。

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1})\cap A_m=(A_1\cap A_m)\cup(A_2\cap A_m)\cup\cdots\cup(A_{m-1}\cap A_m)$$

（P．260　定理8．6　系2）

体積確定の有界集合 A , $B=\{x\in A\mid f(x)\neq g(x)\}$ は体積 0 である。命題8．4 から、有界関数は体積 0 の集合上で可積分なので、B 上で f , g は可積分である。そこで、$(A-B)\cup B=A$, $v((A-B)\cap B)=0$ から、定理8．5　2)より f が A 上可積分ならば、$A-B$, B はそれぞれ体積確定なので、f は$A-B$ 上で可積分となる。また、逆については、定理8．5　1)からわかる。$A-B$ 上では、$f=g$ なので、f , g が $A-B$ 上で可積分となることは同値である。したがって、g が A 上で可積分となることとも同値となる。

（確認） 定理8．6から A , B が体積確定ならば $A-B$ は体積確定である。よって $(A-B)\cap B$ も体積確定である。$(A-B)\cap B\subset B$ なので、定理8．3の2)から $v((A-B)\cap B)\leqq v(B)=0$, もしくは $v((A-B)\cap B)=v(\varnothing)=0$

（P．262　命題9．1）

a)→b)　　$\sum_{k=1}^{m} v(I_k)=S_\Delta(\chi_A)<\varepsilon$　について

$A\subset I$ となる有界閉区間 I をとり、I の分割を Δ とした場合とする。χ_A は I 上可積分で、$\int_I \chi_A=v(A)=0$ なので、任意の $\varepsilon>0$ に対し、十分 $d(\Delta)$ を小さくとれば、$S_\Delta(\chi_A)=\sum_{k\in K(\Delta)} M_k v(I_k)<\varepsilon$ が成り立つ。

ここで、I_k $(k\in K(\Delta))$のうちで $I_k\cap A\neq\varnothing$ となるものを、I_1 , $\cdots$, I_m とする。

このとき、$A = A \cap I = \bigcup_{k \in K(\Delta)} (A \cap I_k) \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ （他の $I_k \cap A = \varnothing$）であるから

$S_\Delta(\chi_A) = \sum_{k \in K(\Delta)} M_k v(I_k) = \sum_{k=1}^{m} v(I_k) < \varepsilon$ となる。

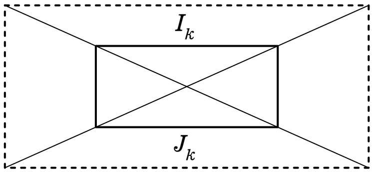
なぜなら、M_k は I_k での χ_A の上限であるが、$I_k \cap A \neq \varnothing$ ならば、$M_k = 1$ であり

$I_k \cap A = \varnothing$ ならば、$M_k = 0$ だからである。

b)→c) $n = 2$ であれば

$v(J_k) = 2^2\, v(I_k)$

一般には、$v(J_k) = 2^n\, v(I_k)$



b)→a) $I_1, \cdots, I_m$ は有界閉区間であるので体積確定である。よって、$\bigcup_{k=1}^{m} I_k$ も体積確定である。$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k \subset I$ に対し、$\chi_A \leqq \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}$ なので、命題3．1，5）によって

$$0 \leqq \int_I \chi_A \leqq S(\chi_A) = \overline{\int_I} \chi_A \leqq \overline{\int_I} \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k} = \sum_{k=1}^{m} v(I_k) < \varepsilon$$

ε は任意なので、$0 \leqq \int_I \chi_A \leqq S(\chi_A) = \overline{\int_I} \chi_A = 0$

ここで、注意したいことは、A が体積確定であるかわからないので上積分を使ったのである。

（P．263　注意1　ルベーグ外測度）

R^n の部分集合 A に対し、$A \subset \bigcup_{m \in N} I_m$ となるすべての有限閉区間の列 $(I_m)_{m \in N}$ に対する $\sum_{m=0}^{\infty} v(I_m)$ の値の下限を、A のルベーグ外測度といい、$\overline{m}(A)$ と記す。

「零集合とは外測度 $\overline{m}(A) = 0$ となる集合 A のことに他ならない。」について、

A が零集合ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$A \subset \bigcup_{m \in N} I_m$，$\sum_{m=0}^{\infty} v(I_m) < \varepsilon$ となる $(I_m)_{m \in N}$ が存在する。よって、その下限である $\overline{m}(A) < \varepsilon$ なので、$\overline{m}(A) = 0$ である。また、逆に、$\overline{m}(A) = 0$ ならば、$\overline{m}(A)$ は下限なのでⅠ章命題1．3から、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\sum_{m=0}^{\infty} v(I_m) < \varepsilon$ となる $(I_m)_{m \in N}$ が存在することになる。

（P．264　命題9．2　2）の証明について）

$\sum_{k=0}^{\infty} v(J_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v(I_{m,n}) < \varepsilon$ とあるが、最初の等号については明らかなことで

はない。P. 384命題5. 2を参照してもらいたい。二重級数だからである。しかし、その次の不等号については確かである。

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(I_{m,n}) = v(I_{m,0}) + v(I_{m,1}) + v(I_{m,2}) + \cdots < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v(I_{m,n}) < \frac{\varepsilon}{2^1} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \cdots = \varepsilon\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) = \varepsilon \times 1 = \varepsilon$$

P. 384命題5. 2を使えば、$\sum_{k=0}^{\infty} v(J_k) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v(I_{m,n}) < \varepsilon$ が証明できる。

(P. 264　定義2)

$$a(f, B) = \sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x) = \sup_{y,z \in B} |f(y) - f(z)|$$

なぜなら、右図からもわかるように

任意の $y, z \in B$ に対し $|f(z) - f(y)| \leqq \sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x)$ である。

よって、 $\sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x) \geqq \sup_{y,z \in B} |f(y) - f(z)|$　…　①

次に、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、上限、下限の定義から、

$\sup_{x \in B} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(a)$　となる $f(a), (a \in B)$ が存在する。また

$\inf_{x \in B} f(x) + \frac{\varepsilon}{2} > f(b)$　となる $f(b), (b \in B)$ が存在する。この不等式を移項し

加えると、 $-\inf_{x \in B} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < -f(b)$　なので

$$\sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x) - \varepsilon < f(a) - f(b)$$

すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x) - \varepsilon < f(a) - f(b)$ となる

$f(a) - f(b), (a, b \in B)$ が存在する。

$f(a) - f(b) \leqq \sup_{y,z \in B} |f(y) - f(z)|$ なので、

$$\sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x) - \varepsilon < \sup_{y,z \in B} |f(y) - f(z)|$$

つまり、①から $0 \leqq$ であり、次の不等式を得る。

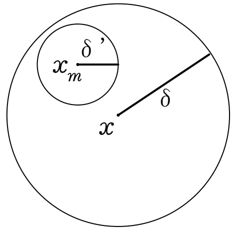
$$0 \leqq \sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x) - \sup_{y,z \in B} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

ε は任意だったので、 $\sup_{x\in B} f(x) - \inf_{x\in B} f(x) = \sup_{y,z\in B} |f(y)-f(z)|$ となる。

（P．265　命題9．3）

1）については、$\alpha(f, U(x, \delta)\cap A) = \sup_{y,z\in U(x,\delta)\cap A} |f(y)-f(z)| \geqq 0$ に注意

2）$x_m \in U(x, \delta)\cap A$ ならば



$x_m \in U(x, \delta)$ かつ $x_m \in A$

$U(x, \delta)$ は開集合なので、ある $0 < \delta' < \delta$ があって、$U(x_m, \delta') \subset U(x, \delta)$ とすることができる。よって、δの単調増加関数なので

$x_m \in U(x_m, \delta')\cap A \subset U(x, \delta)\cap A$ であり

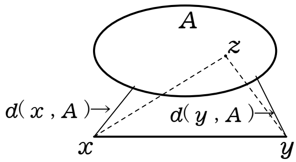
$\alpha(f, x_m) = \lim_{\delta'\to+0} \sup_{y,z\in U(x_m,\delta')\cap A} |f(y)-f(z)| \leqq \sup_{y,z\in U(x_m,\delta')\cap A} |f(y)-f(z)|$

$\leqq \sup_{y,z\in U(x,\delta)\cap A} |f(y)-f(z)| = \alpha(f, U(x, \delta)\cap A) < \varepsilon$

つまり、矛盾する。（例えば、$\delta' < \delta - |x_m - x|$ としておけばよい。）

（P．265　準備）

(9．1)　$|d(x, A) - d(y, A)| \leqq |x-y|$



任意の $z \in A$ に対し

$d(x, A) \leqq d(x, z) \leqq |x-y| + |y-z|$

$z \in A$ についての下限を取ると

$d(x, A) \leqq |x-y| + d(y, A)$ を得る。x と y の立場を入れ替えても不等式は成り立つので、$d(y, A) \leqq |x-y| + d(x, A)$ となる。よって

$d(x, A) - d(y, A) \leqq |x-y|$

$d(y, A) - d(x, A) \leqq |x-y|$

したがって、$|d(x, A) - d(y, A)| \leqq |x-y|$

次に、$f(x) = d(x, A)$ が連続関数であることを示す。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\delta = \varepsilon$ として取れば、$|x-y| < \delta$ となるすべての y に対し、$|d(x, A) - d(y, A)| \leqq |x-y| < \varepsilon$ とすることができる。

よって、$d(x, A)$ は x で連続である。

(9．2) $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow d(x\,,A) > 0$

$\Rightarrow d(x\,,A) = 0$ ならば 任意の $n \geqq 1$ に対し $d(x\,,z_n) < \dfrac{1}{n}$ となる A の点列 $(z_n)_{n\geqq 1}$ が存在することについては、$d(x\,,A) = \inf_{z\in A} |x-z|$ なので I 章命題1．3から、下限なのでその存在がわかる。

(9．3) f_i ($1\leqq i\leqq m$) が連続 $\Rightarrow$ $f(x) = Max\{f_1(x)\,,\cdots,f_m(x)\}$ も連続

における証明で、$Max\{a\,,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ について

$a > b$ ならば、$Max\{a\,,b\} = a$, $\dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+a-b}{2} = a$

$a = b$ ならば、$Max\{a\,,b\} = a = b$, $\dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{2a}{2} = \dfrac{2b}{2} = a = b$

$a < b$ ならば、$Max\{a\,,b\} = b$, $\dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{a+b-a+b}{2} = b$

よって、$Max\{a\,,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ を得る。

次に、f が a で連続ならば、$|f|$ も a で連続であることを示す。

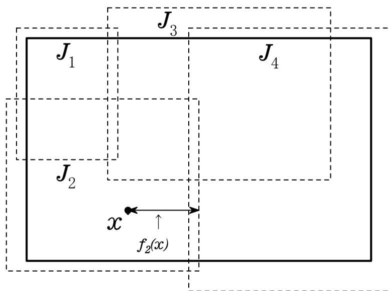
任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$|x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する。同じ $\delta > 0$ を取れば、$||f(x)|-|f(a)|| \leqq |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

となり、$||f(x)||$ は a で連続となる。

(P．266　命題9．4)

I は有界閉区間なので、連続関数である f は最小値をとる。また、$x \in J_i$ ならば $x \notin J_i^c = \overline{J_i^c}$ (J_i^c は閉集合) (9．2)から $d(x\,,J_i^c) > 0$ となる。

任意の $k \in K(\Delta)$ に対し I_k の点 x を取れば、$f(x) = Max\{f_1(x)\,,\cdots,f_m(x)\}$ なので、$f(x) = f_i(x)$ となる i があるから $d(x\,,J_i^c) = f_i(x) = f(x) \geqq r > d(I_k)$ となり、$I_k \subset U(x\,,r) \subset J_i$ となる。なぜなら $I_k \not\subset U(x\,,r)$ ならば、$y \in I_k$ でかつ $y \notin U(x\,,r)$ となる y が存在するはずで



($f_1(x) = d(x\,,J_1^c) = f_3(x) = f_4(x) = 0$)

ある。つまり、$|x-y| \geqq r$ となる。しかし、$x, y \in I_k$ なので、$d(I_k) < r$ に矛盾する。よって、$I_k \subset U(x, r)$ となる。

また、$U(x, r) \not\subset J_i$ とすれば、同様に $y \in U(x, r)$ でかつ $y \notin J_i$ である y が存在する。つまり、$|x-y| < r$ で $y \in J_i^c$ しかし、$d(x, J_i^c) \geqq r$ なので矛盾する。よって、$U(x, r) \subset J_i$

（P．266　定理9．5（ルベーグ））

R^nの有界閉区間 I 上の有界関数 $f : I \to R$ に対し、次のa)、b)は同値である。

a）f は I 上リーマン可積分である。

b）f の不連続点の集合 B は零集合である。

証明　a)→b）f を I 上可積分とする。各自然数 $m \geqq 1$ に対し、$B_m = \{x \in I \mid a(f, x) \geqq \frac{1}{m}\}$ とおくとき、不連続点の集合 $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ である。

なぜなら、$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \cdots$であり、（命題9．3、1）より、$x \in B$ ならば、不連続なので、$a(f, x) > 0$ であるから、$a(f, x) \geqq \frac{1}{m} > 0$ となる m が存在するので $x \in B_m$ となる。よって、$x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$となる。

逆に、任意の $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ に対し、$x \in B_m$ が存在するので、$a(f, x) \geqq \frac{1}{m}$ となり、x は f の不連続点となる。よって、$x \in B$

次に、各B_m（mを固定し）が零集合であることを示せばよい。（命題9．2．2）

いま、任意の $\varepsilon > 0$　に対し、I の分割Δを

$$S_\Delta - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{m}$$

となるように取る。（定理3．3, e)）　いま、$K_0 = \{k \in K(\Delta) \mid I_k^{\circ} \cap B_m \neq \varnothing\}$ とおくとき、K_0 は有限集合である。（$K(\Delta)$は有限であり、$B = \varnothing$ ならばこの定理の存在価値がないので、$B_m \neq \varnothing$ とする。$K(\Delta)$ は I の分割なので $K_0 \neq \varnothing$）

そして、$k \in K_0$ ならば、$x \in I_k^{\circ} \cap B_m$ となる x が存在し、x は内点なので、ある$\delta > 0$に対し、$U(x, \delta) \subset I_k^{\circ} \subset I_k$ であり

$$\frac{1}{m} \leqq a(f, x) \leqq a(f, U(x, \delta)) \leqq a(f, I_k)$$ となる。

したがって、$v(I_k)$ をかけて、K_0 で和をとれば、

$$\frac{1}{m}\sum_{k\in K_0} v(I_k) \leqq \sum_{k\in K_0} \mathrm{a}(f, I_k) v(I_k) \leqq \sum_{k\in K(\Delta)} \mathrm{a}(f, I_k) v(I_k)$$

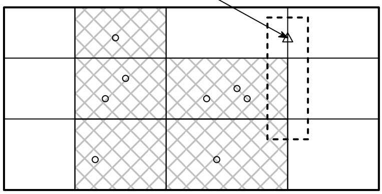
$$= S_\Delta - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{m}$$

だから、$\sum_{k\in K_0} v(I_k) < \varepsilon$ となる。

一方、Δによって生ずるすべての小区間の境界の合併 A は体積 0 である(P. 256の例2と定理8. 6系　1, 2)から、有界閉区間 $I_1', \cdots, I_n'$が存在して、P. 262の(A)「 $\forall\ \varepsilon > 0$ に対し、$A \subset \bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell'$ ， $\sum_{\ell=1}^{n} v(I_\ell') < \varepsilon$ 」をみたす。

そこで、B_m をある I_k $(k \in K(\Delta))$ の内部 I_k° に含まれる部分と I_k の境界に含まれる部分に分けて考えると、

（I'_ℓ に含まれるが、どの I_k° にも含まれない場合）



（注意）$I_k^{\circ} \cap B_m \neq \varnothing$ ($k \in K_0$) なので、図中の△のような点に関しては、($\bigcup_{k\in K_0} I_k$) で B_m を覆うことができない可能性がある。（図中の○、△の集まりを B_m としている。）

$$B_m \subset \left(\bigcup_{k\in K_0} I_k\right) \cup \left(\bigcup_{1\leqq \ell \leqq n} I_\ell'\right) \quad , \quad v(B_m) \leqq \sum_{k\in K_0} v(I_k) + \sum_{1\leqq \ell\leqq n} v(I_\ell') < 2\varepsilon$$

が成り立つ。そこで、B_m は命題9. 1の条件b)をみたし、体積 0 であり、

従って、零集合である。(命題9. 2, 3)

b)→a) 逆に B が零集合であるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、命題9. 2, 1)によって有界閉区間の列 $(J_m)_{m\in N}$ で

(9. 4)　$B \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} J_m^{\circ}$ 、$\sum_{m=0}^{\infty} v(J_m^{\circ}) = \sum_{m=0}^{\infty} v(J_m) < \varepsilon$

をみたすものが存在する。

一方任意の $x \in I-B$ を取ると $\mathrm{a}(f, x) = 0$ である(命題9. 3、1)から

$\delta > 0$ を十分小にとれば、$\mathrm{a}(f, \mathrm{U}(x, \delta)\cap I) < \varepsilon$ となる。そこで、x を含む n 次元開区間 L_x を $\mathrm{U}(x, \delta)$ に含まれるように取れば、

(9. 5)　$\mathrm{a}(f, L_x \cap I) < \varepsilon$

である。$(J_m^{\circ})_{m\in N}$ と $(L_x)_{x\in I-B}$ を合わせたものは、I の開被覆である。

なぜなら、$I-B \subset \bigcup (L_x)_{x\in I-B}$ で $B \subset \bigcup J_{m\in N}^{\circ}$ だからである。

I はコンパクトだから、その中の有限個で被覆できる。

この有限個の開区間を（J_m°の番号を適当に書き換え、かつ $L_{x_i} = L_i$ と略記して）

$J_1^{\circ}, \cdots, J_p^{\circ}$ 、 $L_1, \cdots, L_q$ であるとする。このとき補題9．4により、I の分割 Δ

であって任意の $k \in K(\Delta)$ に対し

イ） $I_k \subset J_i^{\circ}$ （$1 \leqq {}^{\exists}i \leqq p$）　　　ロ） $I_k \subset L_i$ （$1 \leqq {}^{\exists}i \leqq q$）

のどちらかが成立つようなものが存在する。

いま、イ)をみたす $k \in K(\Delta)$ の集合を P 、ロ)をみたす集合を Q とする。（$P \cap Q \neq \phi$ かもしれないが $P \cup Q = K(\Delta)$ であることは確かである。）

$\sup_{x \in I} |f(x)| = C$ と置けば、任意の $k \in K(\Delta)$ に対し、$\mathrm{a}(f, I_k) \leqq 2C$

（$+C-(-C) = 2C$） だから、(9．4)により次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{k \in P} \mathrm{a}(f, I_k)v(I_k) \leqq 2C\sum_{k \in P} v(I_k) = 2Cv(\bigcup_{k \in P} I_k) \leqq 2C\sum_{i=1}^{p} v(J_i)$$

$$\leqq 2C\sum_{i=1}^{m} v(J_i) < 2C\varepsilon$$

（I_k は小区間であり、$m \neq n$ 、$v(I_m \cap I_n) = 0$ $\rightarrow \sum_{k \in P} v(I_k) = v(\bigcup_{k \in P} I_k)$）

一方 $k \in Q$ ならば、(9．5)により $\mathrm{a}(f, I_k) \leqq \mathrm{a}(f, L_i \cap I) < \varepsilon$ で

$I_k \subset L_i \cap I$ だから

$$\sum_{k \in Q} \mathrm{a}(f, I_k)v(I_k) < \varepsilon \sum_{k \in Q} v(I_k) \leqq \varepsilon v(I)$$

となる。この二つの不等式から

$$0 \leqq S-s \leqq S_{\Delta}-s_{\Delta} = \sum_{k \in K(\Delta)} \mathrm{a}(f, I_k)v(I_k) \leqq (2C+v(I))\varepsilon$$

となる。C および $v(I)$ は ε に無関係な定数で $\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれるから

従って $S = s$ であり、f は I 上可積分である。（定理3．3）

（P．268　例3）

任意の $x \in I = [a, b]$ に対し、

$a(\chi_Q, U(x, \delta) \cap I) = \sup_{y,z \in U(x, \delta) \cap I} |\chi_Q(y) - \chi_Q(z)| = 1$ なぜなら、x のいくらでも近いところに有理数も無理数も点在するからである。

よって、$\lim_{\delta > 0, \delta \rightarrow 0} a(\chi_Q, U(x, \delta) \cap I) = a(\chi_Q, x) = 1$ であり、不連続点の集合は I となる。

（P. 268　例4）

ここでは、定理9．5から可積分であることがわかるので、$s = S$ なので ξ_k を無理数にしたのである。つまり、$s_\Delta \to 0$ から求めた。

（P. 269　なぜ $\bar{A} \cap A^e = \varnothing$ なのか？）

もし $\bar{A} \cap A^e \neq \varnothing$ ならば、$x \in \bar{A}$ かつ $x \in A^e$ となる x が存在する。つまりある $\varepsilon > 0$ が存在して、$U(x, \varepsilon) \subset A^c$ とすることができる。しかし、同時にその ε に対し、$U(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ となる。だが、そんなはずはない。

実際、$y \in U(x, \varepsilon) \cap A$ があったとすれば、$y \in U(x, \varepsilon)$ かつ $y \in A$

ところが、$y \in U(x, \varepsilon) \subset A^c$ であるので $y \in A$ に矛盾する。

（P. 269（9.8）$\bar{A} = A^\circ \dotplus A^b$）

$R^n = A^\circ \dotplus A^b \dotplus A^e$　なので、$(A^e)^c = A^\circ \dotplus A^b$　…　①

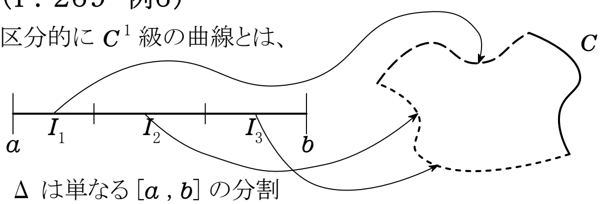
定義から、$A^\circ \subset \bar{A}$, $A^b \subset \bar{A}$　よって、$A^\circ \dotplus A^b \subset \bar{A}$　である。

$\bar{A} \cap A^e = \varnothing$　だったので、$(A^e)^c \supset \bar{A}$　　よって、①より、$A^\circ \dotplus A^b \supset \bar{A}$

となり、$\bar{A} = A^\circ \dotplus A^b$　となる。

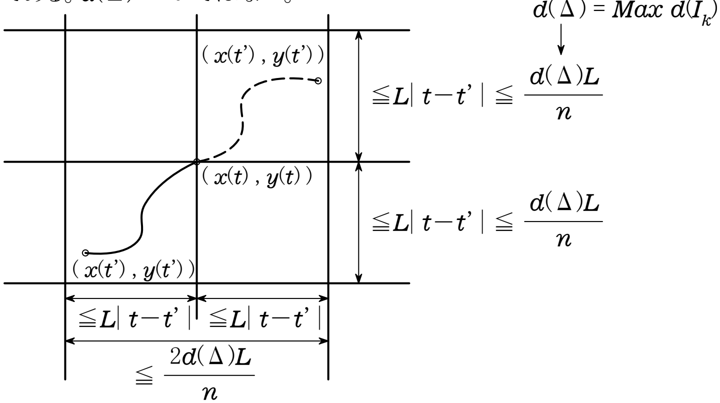
（P. 269　例6）

区分的に C^1 級の曲線とは、



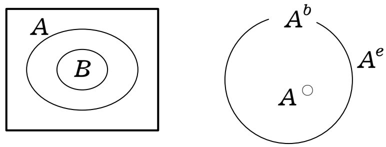
分点での扱いは P. 87 注意 1 と I 章定理7. 3 を参照せよ。

Δ は単なる $[a, b]$ の分割である。$d(\Delta) \to 0$ ではない。



したがって、I_k を n 等分した場合、その n 個の小区間に含まれる t に対応する曲線 C の弧は一辺の長さが $\dfrac{2d(\Delta)L}{n}$ の正方形に含まれる。あとは命題9．1の b) を使えばよい。

(P．270　$B \subset B^{※} \subset B \cup A^b$)



$x \in B \subset A$ ならば、$f(x) = f^{※}(x)$ なので、x は $f^{※}(x)$ の不連続点となる。

よって、$B \subset B^{※}$ である。

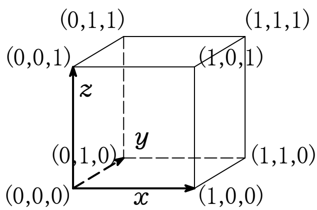
次に、$f^{※}(x)$ は $x \in A^e$ で常に 0 であり、連続であるから、不連続点があるとしたら、$(A^e)^c = A^{\circ} + A^b$ の中にあるとしか考えられない。従って、$B^{※} \subset A^{\circ} + A^b$

任意の $x \in B^{※}$ は $x \in A^{\circ} + A^b$ なので、直和であることから $x \in A^{\circ}$ であるか $x \in A^b$ であるかのどちらかである。$x \in A^{\circ}$ ならば、$f^{※}$ の不連続点は f と同じなので $x \in B$ となる。

以上をまとめると、 $x \in B^{※}$ ならば $x \in B$ であるか $x \in A^b$ のどちらかであることになるので、$B^{※} \subset B \cup A^b$ となる。

ここで、定理9．8に移る前の確認をする。それは、P．260の例4の内容で「$\bar{I}$ は I とその $2n$ 個の面の合併である。」の $2n$ 個の面と内点の確認をする。

簡単にするために一辺の長さ 1 の n 次元立方体で考えることにする。



$n = 3$ の場合、$\bar{I}$ は 体積 0 の $2\times3 = 6$ 面に囲まれている。これは、一つの軸に対して直交する面が 2 つあることからその 3 倍と考えればよい。

右の図の座標からわかるように各頂点の座標をつなげて表すと、000 ～ 111 までの 2^3 個の 2進数になっていることがわかる。

そこで、$n = 4$ の場合を考えてみることにする。

（各頂点の座標）　← 2^4 個の頂点がある。　x 軸は $\overrightarrow{AB}=(1,0,0,0)$ 方向である。

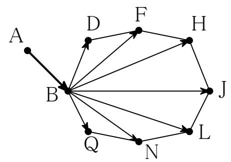
	x	y	z	w
A	0	0	0	0
B	1	0	0	0
C	0	1	0	0
D	1	1	0	0
E	0	0	1	0
F	1	0	1	0
G	0	1	1	0
H	1	1	1	0
I	0	0	0	1
J	1	0	0	1
K	0	1	0	1
L	1	1	0	1
M	0	0	1	1
N	1	0	1	1
P	0	1	1	1
Q	1	1	1	1

	x	y	z	w
B	1	0	0	0
D	1	1	0	0
F	1	0	1	0
H	1	1	1	0
J	1	0	0	1
L	1	1	0	1
N	1	0	1	1
Q	1	1	1	1

↑
(y,z,w) 座標だけをみると、$n=3$ のときの立方体の座標に等しい。

$\overrightarrow{BD}$	0	1	0	0	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD})=0$
$\overrightarrow{BF}$	0	0	1	0	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF})=0$
$\overrightarrow{BH}$	0	1	1	0	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH})=0$
$\overrightarrow{BJ}$	0	0	0	1	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BJ})=0$
$\overrightarrow{BL}$	0	1	0	1	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BL})=0$
$\overrightarrow{BN}$	0	0	1	1	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN})=0$
$\overrightarrow{BQ}$	0	1	1	1	$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ})=0$

超平面BDFHJLNQ は B を通り、x 軸に垂直な面であることが想像できる。



もう一面はA を通る超平面ACEGIKMPであり、x 軸に垂直な面は、計2面となる。

他の軸については、その座標の 0 と 1 にわければ2面となり、全体で 2×4 面に囲まれることになる。

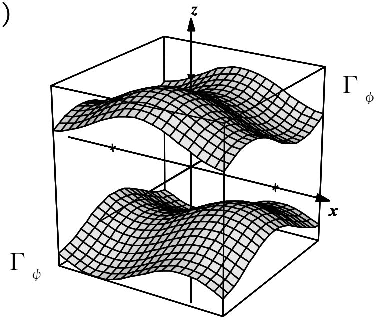
5 次元立方体についても 0 ～ 2^5-1 を2進数にして $wzyx \to xyzw$ の順にして並びかえてから確認すればよい。各面は 4 次元立方体の座標に等しい。

次に内点についてだが、$I=[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ の場合

$I^\circ=(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n)$ なので、$\forall x\in(x_1,\cdots,x_n)\in I^\circ$ となるためには

$a_i<x_i<b_i$ （$1\leqq i\leqq n$）でなければならない。したがって、上の超平面には内点が存在しないことになる。

（P．271　定理9．8　縦線集合）



$x \in I$,

$\phi(x) \leqq y \leqq \phi(x)$

となる $(x, y) \in R^{n+1}$ の

集合 A は $n=2$ の場合、右図

のようになる。

$B = A^b$ について

$\Gamma_\phi \subset A^b$, $\Gamma_\phi \subset A^b$, $S \subset A^b$ よって、$B = \Gamma_\phi \cup \Gamma_\phi \cup S \subset A^b$

$B = A^b$ と最初から言い切りたいところだが、まだ境界点があるかもしれないので

$B \subset A^b$ としたのだと思う。

次に $A - B \subset A^\circ$ についてだが、$(x, y) \in A$ かつ $(x, y) \notin B$ ならば、Γ_ϕ,

Γ_ϕ, S の定義から $x \in I^\circ$ であり $\phi(x) < y < \phi(x)$ となるので

$(x, y) \in A^\circ$ よって、$A - B \subset A^\circ$

$B \subsetneqq A^b$ とすれば、$x \in A^b$ かつ $x \notin B$ となる x が存在することになる。つまり、

$x \in A - B \subset A^\circ$ となり、$A^b \cap A^\circ = \varnothing$（直和）に矛盾する。よって、$A^b = B$

区間に関する積分の加法性（定理3．8）から

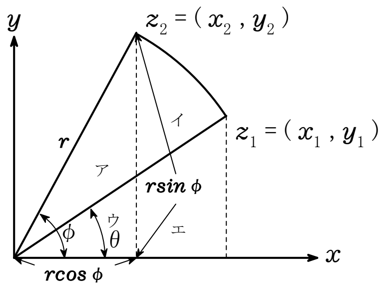
$$\int_m^M f^{※x} = \int_m^{\phi(x)} f^{※x} + \int_{\phi(x)}^{\phi(x)} f^{※x} + \int_{\phi(x)}^M f^{※x} = \int_{\phi(x)}^{\phi(x)} f$$

命題8．2から、f が A 上可積分ならば $f^※$ は $J = I \times [m, M]$ 上可積分であり、

$f^{※x}$ は $[m, M]$ 上可積分なので、定理7．1より

$$\int_A f = \int_J f^※ = \int_I \left\{ \int_m^M f^{※x}(x, y)dy \right\} dx = \int_I \left\{ \int_{\phi(x)}^{\phi(x)} f(x, y)dy \right\} dx$$

（P．272　例7）



$v = $（ア＋ウ）－（ウ＋エ）＋（イ＋エ）

$= \dfrac{r^2}{2} \cos\phi \sin\phi - \dfrac{r^2}{2} \cos\theta \sin\theta$

$+ \displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

$= \dfrac{r^2}{4}(\sin 2\phi - \sin 2\theta) - r^2 \displaystyle\int_\phi^\theta \sin^2 t\, dt$

$$(x = r\cos t \to \frac{dx}{dt} = -r\sin t\ ,\ x_1 = r\cos\theta\ ,\ x_2 = r\cos\phi)$$

$$= \frac{r^2}{4}(\sin 2\phi - \sin 2\theta) + r^2\int_\theta^\phi \sin^2 t\, dt$$

ここで、$\int_\theta^\phi \sin^2 t\, dt = [-\cos t \sin t]_\theta^\phi - \int_\theta^\phi -\cos^2 t\, dt$

($\int f'g = fg - \int fg'$ なので、$f = -\cos t$, $g = \sin t$ とした。)

$$= -\frac{1}{2}[\sin 2t]_\theta^\phi + \int_\theta^\phi (1-\sin^2 t)dt = -\frac{1}{2}[\sin 2t]_\theta^\phi + \int_\theta^\phi dt - \int_\theta^\phi \sin^2 t\, dt$$

よって、$\int_\theta^\phi \sin^2 t\, dt = -\frac{1}{4}[\sin 2t]_\theta^\phi + \frac{1}{2}(\phi - \theta)$ となる。これを代入して

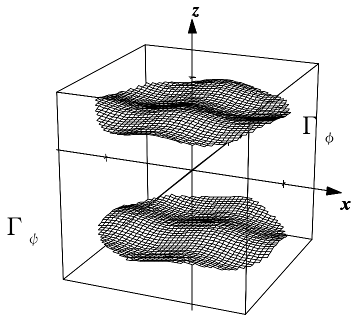
$$v = \frac{r^2}{4}(\sin 2\phi - \sin 2\theta) - \frac{r^2}{4}(\sin 2\phi - \sin 2\theta) + \frac{r^2}{2}(\phi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2}r^2\alpha\ (\ \alpha = \phi - \theta\ )$$

(P. 273　定理9. 8系2)

$A = \{ (x , y) \in R^{n+1} \mid , x \in D ,$
$\phi(x) \leqq y \leqq \phi(x) \}$

$S = \{ (x , y) \in R^{n+1} \mid , x \in D^b ,$
$\phi(x) \leqq y \leqq \phi(x) \}$



$f : A \to R$ が A 上可積分であるを仮定にする。

$v_{n+1}(S) = 0$ について

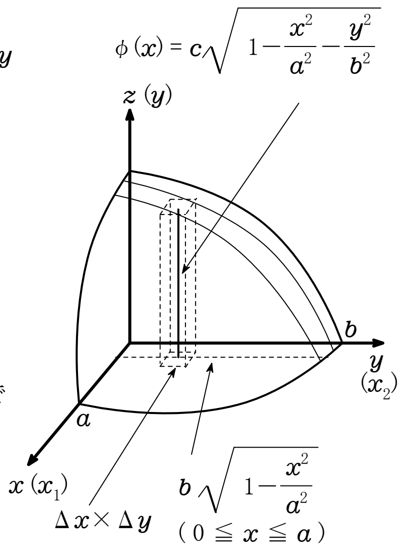
D は体積確定なので、定理9. 6から D^b は零集合となる。したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$D^b \subset \bigcup_{k=1}^m I_k$, $\sum_{k=1}^m v(I_k) = 0$ となる有界閉区間 I_k が存在する。

$S \subset D^b \times [\ c , d\ ] \subset \bigcup_{k=1}^m I_k \times [\ c , d\ ]$ よって

$$v_{n+1}(S) \leqq v_{n+1}(\bigcup_{k=1}^m I_k \times [\ c , d\ ]) = v_{n+1}(\bigcup_{k=1}^m (I_k \times [\ c , d\ ])$$

$$\leqq \sum_{k=1}^m v_{n+1}(I_k \times [\ c , d\ ]) = | d - c | \sum_{k=1}^m v_{n+1}(I_k) < | d - c | \varepsilon$$

（P. 273　例8　楕円体）



ここでは、定理9. 8系2の x_1 を x 、x_2 を y

y を z として計算している。

$x = at$, $y = bw$ という変数変換をすれば

$$\frac{dx}{dt} = a \quad , \quad dx = adt \qquad (\,0 \leqq t \leqq 1\,)$$

$$\frac{dy}{dw} = b \quad , \quad dy = bdw$$

$$0 \leqq y = bw \leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = b\sqrt{1-t^2}$$

よって、$0 \leqq w \leqq \sqrt{1-t^2}$ となる。ここまで

を準備しておいて

$$V = 8\int_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

$$= 8c\int_0^a \{ \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy \}\,dx$$

$$= 8abc\int_0^1 \{ \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \sqrt{1-t^2-w^2}\,dw \}\,dt = 8abc\int_0^1 \{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \}\,dx$$

（本文P. 238例6）

$\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\{ x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 Arcsin\frac{x}{a} \}$, $(\,|\,x\,| \leqq a\,)$ を利用して

$$= 8abc\int_0^1 \{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(\,1-x^2\,)-y^2}\,dy \}\,dx$$

$(\,1-x^2\,) = a^2$ と考え、$a = \sqrt{1-x^2}$ となるので

$$= 8abc\int_0^1 (\,[\,\frac{1}{2}\{ y\sqrt{(\,1-x^2-y^2} + (\,1-x^2\,)Arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\ ]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,)\,dx$$

$$= 4abc\int_0^1 (\,\sqrt{1-x^2}\sqrt{0} + (\,1-x^2\,)Arcsin\,1 - (\,1-x^2\,)Arcsin\,0\,)\,dx$$

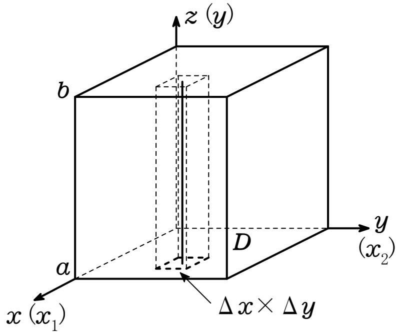
$$= 4abc\int_0^1 (\,\frac{\pi}{2}(\,1-x^2\,)\,)\,dx = 2abc\,\pi\int_0^1 (\,1-x^2\,)\,dx$$

$$= 2abc\,\pi\,[\,x-\frac{x^3}{3}\,]_0^1 = 2abc\,\pi \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi\,abc$$

（P．274　例9）

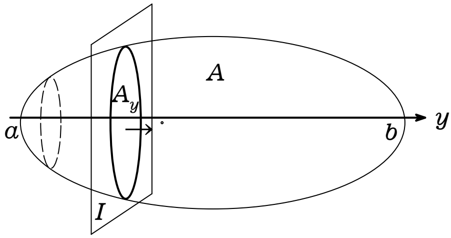
$\phi(x) = b$, $\phi(x) = a$ として

$V = \int_D (b-a)\,dx = S(b-a) = Sh$



（P．274　定理9．9）

定理をイメージすると右図のようになる。

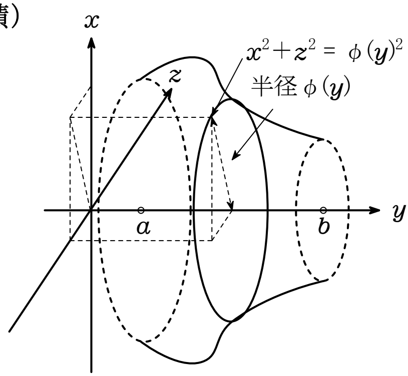


（P．275　例10　回転体の体積）

$A = \{ (x, y, z) \mid x^2+z^2 \leqq \phi(y)^2,$

$a \leqq y \leqq b \}$

y における切り口 A_y は、半径 $\phi(y)$ の円板となる。



（P．276　定理9．10（一般リーマン和））

(9.18)　$\displaystyle\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f;\Delta;\xi) = \int_A f(x)dx$

この右辺は小区間の分割（リーマン和）によって求めた積分値である。その値に等しくなるという定理である。

(9.19)　$\displaystyle s_\Delta = \sum_{k\in K(\Delta)} m_k v(A_k) \leqq \int_A f \leqq \sum_{k\in K(\Delta)} M_k v(A_k) = S_\Delta$

について、$M_k = \sup_{x \in A_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x \in A_k} f(x)$ であり、積分の単調性から

$m_k \leqq f(\xi) \leqq M_k$ なので、$\int_{A_k} m_k = m_k v(A_k) \leqq \int_{A_k} f \leqq M_k v(A_k) = \int_{A_k} M_k$

A_k は体積確定集合であり、$v(A_k \cap A_\ell) = 0$ ($k \neq \ell$) から、定理8．5(積分範囲に関する加法性から (9.19) を得る。

$\left| \int_A f - s(f\,;\Delta\,;\xi) \right| \leqq S_\Delta - s_\Delta$ についてだが

$s_\Delta \leqq a \leqq S_\Delta$, $s_\Delta \leqq b \leqq S_\Delta$ $\to$ $|b-a| \leqq S_\Delta - s_\Delta$ である。

右図を見れば明らかだが

$$\begin{cases} a < b \to b-a \leqq b-s_\Delta \leqq S_\Delta - s_\Delta \\ a > b \to a-b \leqq a-s_\Delta \leqq S_\Delta - s_\Delta \\ a = b \to 0 = a-b \leqq S_\Delta - s_\Delta \end{cases} \to \ |b-a| \leqq S_\Delta - s_\Delta$$

I_k に含まれる A_i に関する和について $\sum(M_i - m_i)\,v(A_i) \leqq a(f^※, I_k)\,v(I_k)$

とあるが、この場合、$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$ であり

$a(f^※, I_k) = \sup_{x \in I_k} f^※(x) - \inf_{x \in I_k} f^※(x)$ である。$A_i \subset I_k$ なので

$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) = \sup_{x \in A_i} f^※(x) \leqq \sup_{x \in I_k} f^※(x)$

$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) = \inf_{x \in A_i} f^※(x) \geqq \inf_{x \in I_k} f^※(x)$

したがって、任意の i に対し、 $a(f^※, I_k) \geqq M_i - m_i$ となる。

次に、任意の i に対し、$A_i \subset I_k$ なので、$v(A_i) \leqq v(I_k)$

$A_i \subset I_k$, $A_\ell \subset I_k$ ならば、$A_i \cup A_\ell \subset I_k$, $v(A_i \cap A_\ell) = 0$ なので、定理8．6から $v(A_i \cup A_\ell) = v(A_i) + v(A_\ell) \leqq v(I_k)$ よって、

$(M_i - m_i)\,v(A_i) + (M_\ell - m_\ell)\,v(A_\ell) \leqq a(f^※, I_k)v(A_i) + a(f^※, I_k)v(A_\ell)$

$= a(f^※, I_k)(v(A_i) + v(A_\ell)) \leqq a(f^※, I_k)\,v(I_k)$

したがって、$\sum(M_i - m_i)\,v(A_i) \leqq a(f^※, I_k)\,v(I_k)$ が成り立つ。

この証明における M と L についてだが、図で表すと次のようになる。

右図で

$i, j, k \in M$

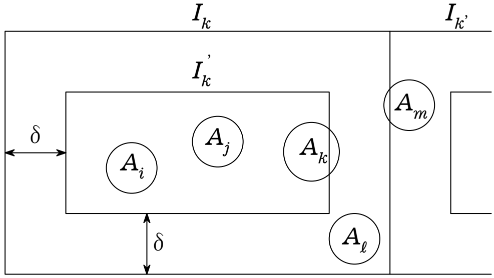
$\ell, m \in L$

である。

定義から $M \cap L = \varnothing$

$L \cup M \subset K(\Delta)$

$L \cup M = K(\Delta)$ である。



もし、ある $i \in K(\Delta)$ で $i \notin L \cup M$ となるものが存在したとすれば、i は L の元でもなく M の元でもないので、$\forall\ k \in K(D)$ に対し $A_i \cap I_k = \varnothing$ かつ $\exists\ k \in K(D)$ $A_i \cap I_k \neq \varnothing$ とならなければならない。このようなことがあるはずがない。

A_m については、

$A_m \subset (I_k - I_k') \cup (I_{k'} - I_{k'}')$

$\subset \bigcup_{k \in K(D)} (I_k - I_k')$

$I_k' \subset I_k$ ならば $v(I_k - I_k') = v(I_k) - v(I_k')$ なので (9. 23) が得られる。

(P. 278　定理9. 11)

R^n の有界な体積確定集合 A の一般分割全体の集合 $\mathfrak{D}$ **<u>の部分集合</u>** $\mathfrak{D}_0$ が次の (9. 27) を満たすものとする。（注 一つの部分集合でよい。）

(9. 27) 任意の $\delta > 0$ に対し、$d(\Delta) < \delta$ となる $\Delta \in \mathfrak{D}_0$ が存在する。このとき、f が A 上の有界関数で、代表元 ξ のとり方によらず一定の極限

(9. 28) $\displaystyle \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}_0,\ \underline{d(\Delta) \to 0}} s(f;\delta;\xi) = J$

が存在すれば、f は A 上可積分で、$J = \int_A f$ が成立つ。

証明　A の一般分割 (9. 16) を Δ として、S_Δ、s_Δ を (9. 19) のように定義すれば、仮定 (9. 27) から

$\displaystyle \lim_{\Delta \in \mathfrak{D}_0,\ d(\Delta) \to 0} (S_\Delta - s_\Delta) = 0$　となる。

なぜならば、$\forall\ \varepsilon > 0$ に対して、$\exists\ \delta > 0$、$d(\Delta) < \delta$ となる $\Delta \in \mathfrak{D}_0$ をとれば、(9.28)より

$J-\dfrac{\varepsilon}{2} < s(f;\Delta;\xi) < J+\dfrac{\varepsilon}{2}$

とすることができる。また、A_k での f_k の上限 M_k 、下限 m_k とすれば

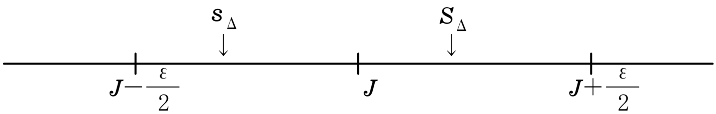
$m_k = \inf\limits_{x\in A_k} f(x) \leqq f(\xi) \leqq \sup\limits_{x\in A_k} f(x) = M_k$

から、$s(f;\Delta;\xi)=\sum\limits_{k\in K(\Delta)} f(\xi_k)v(A_k)$　なので、$J-\dfrac{\varepsilon}{2}$ は下界

$J+\dfrac{\varepsilon}{2}$ は上界であることから

$J-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqq s_\Delta \leqq s(f;\Delta;\xi) \leqq S_\Delta \leqq J+\dfrac{\varepsilon}{2}$

となる。



$(S_\Delta - s_\Delta) \leqq \varepsilon$　となる。

従って、定義２より、$\alpha(f,A_k) = \sup\limits_{x\in A_k} f(x) - \inf\limits_{x\in A_k} f(x) = M_k - m_k$ なので

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $D \in \mathfrak{D}_0$ が存在して、

(9.29)　$\sum\limits_{k\in K(D)} \alpha(f,A_k)v(A_k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

が成り立つ。いま、$B = \bigcup\limits_{k\in K(D)} A_k^b$　と置くとき、集合 A_k は体積確定だから

B は体積 0 である。（定理９．６、定理８．６系１）

そこで、$C = \sup\limits_{x\in A} |f(x)|$（上に有界な集合の上限）とおくと有限個の有界閉区間 $J_1, \cdots, J_r$ が存在して

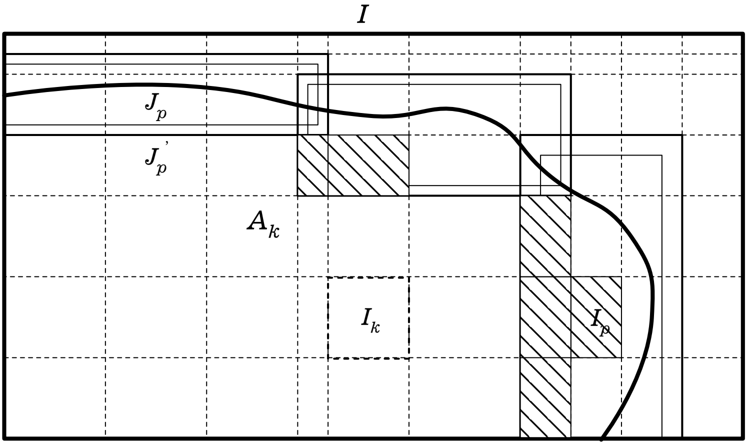
(9.30)　$B \subset \bigcup\limits_{p=1}^{r} J_p$　，$\sum\limits_{p=1}^{r} v(J_p) < \dfrac{\varepsilon}{4(C+1)}$

とすることができる。また、J_p を重心を中心に相似拡大した J_p' を作り

(9.31)　$\sum\limits_{p=1}^{r} v(J_p) < \dfrac{\varepsilon}{4(C+1)}$，$J_p \subset J_p'$

とすることができる。

いま、A および、すべての J_p' を含む有界閉区間 I の分割Δで各 J_p' のどの面もいくつかの I_k $(k\in K(\Delta))$ の面の合併になるようなものを作る。

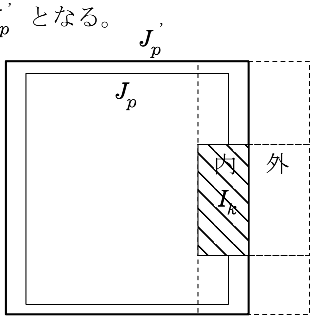


斜線部は K_1 と K_2 の共通部分　「-------」が分割Δ

このとき、任意の $k \in K(\Delta)$ に対し、次の 1)，2)，3) のいずれかが成り立つ。

1) $I_k \subset A_\ell^\circ$ $(\exists \ell \in K(D))$　　2) $I_k \subset \bigcup_{p=1}^{r} J_p'$　　3) $I_k \cap \overline{A} = \varnothing$

実際 3) でなければ、I_k は $\overline{A} = \bigcup_{\ell \in K(D)} \overline{A_\ell}$ と交わるから、ある $\overline{A_\ell} = A_\ell^\circ + A_\ell^b$ と交わる。そこで、1) でなければ、$I_k \cap A_\ell^b \neq \varnothing$ だから (9.30), (9.31) によって、$A_\ell^b \subset B = \bigcup_{k \in K(D)} A_k^b \subset \bigcup_{p=1}^{r} J_p$ ，$J_p \subset J_p'$ なので、ある p に対し、$I_k \cap J_p \neq \varnothing$, $I_k \cap J_p' \neq \varnothing$ となる。したがって、分割Δの作り方から、I_k は J_p' の境界面で交わっているので、その内か外で交わっていなければならない。しかし、$I_k \cap J_p \neq \varnothing$ なので、内であり、$I_k \subset J_p'$ となる。



$$\begin{aligned} I_k \cap J_p' &\neq \varnothing \\ I_k \cap J_p &\neq \varnothing \end{aligned} \quad \rightarrow \quad I_k \subset J_p'$$

いま、1），2），3）をみたす $k \in K(\Delta)$ の集合を K_1，K_2，K_3 とすれば、上に示したことから

$K(\Delta) = K_1 \cup K_2 \cup K_3$

である。ただし、K_1 と K_2 は共通部分があり得る。(図参照)

次に、(8.1) により f を $f^{※}$ に拡張しておくと

(9.32) $\displaystyle\sum_{k \in K(\Delta)} a(f^{※}, I_k) v(I_k) \leqq S_1 + S_2 + S_3$

となる。ただし

$S_1 = \displaystyle\sum_{k \in K_1} a(f^{※}, I_k) v(I_k)$ ， $S_2 = \displaystyle\sum_{k \in K_2} a(f^{※}, I_k) v(I_k)$

$S_3 = \displaystyle\sum_{k \in K_3} a(f^{※}, I_k) v(I_k)$

である。このとき、(9.29)によって

$S_1 = \displaystyle\sum_{k \in K_1} a(f^{※}, I_k) v(I_k) \leqq \sum_{k \in K(D)} a(f^{※}, A_k) v(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$

となる。

(9.31)により、$\forall k \in K_2$ ならば、$I_k \subset \displaystyle\bigcup_{p=1}^{r} J_p'$ なので $\displaystyle\bigcup_{k \in K_2} I_k \subset \bigcup_{p=1}^{r} J_p'$

$v\left(\displaystyle\bigcup_{k \in K_2} I_k\right) = \sum_{k \in K_2} v(I_k) \leqq v\left(\bigcup_{p=1}^{r} J_p'\right) \leqq \sum_{p=1}^{r} v(J_p')$

また、$a(f^{※}, I_k) \leqq a(f^{※}, A) = a(f, A) < 2C \quad (-C < f < C)$

であり、(9.31)から

$S_2 = \displaystyle\sum_{k \in K_2} a(f^{※}, I_k) v(I_k) \leqq a(f^{※}, A) \sum_{k \in K_2} v(I_k)$

$\leqq a(f^{※}, A) \displaystyle\sum_{p=1}^{r} v(J_p') < 2C \frac{\varepsilon}{4(C+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$

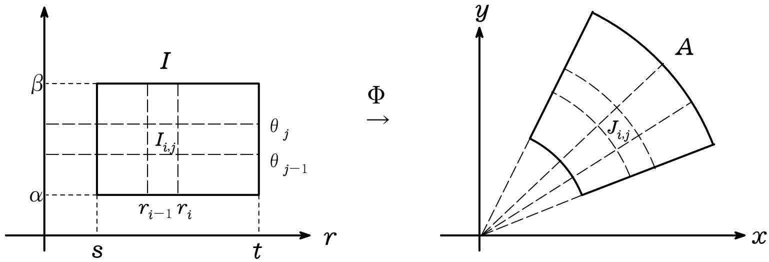
また、$k \in K_3$ に対しては、I_k 上で $f^{※} = 0$ だから、$a(f^{※}, I_k) = 0$ であり

$S_3 = 0$ である。したがって、(9.32)の右辺は $< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} + 0 < \varepsilon$

となる。そこで、定理３．３の e) がみたされる Δ が存在するので $f^{※}$ は I 上可積分となる。よって、f は A 上可積分となる。

よって、定理９．１０により、$J = \displaystyle\int_A f$ が成り立つ。

(P．281　定理10．1(平面極座標への変換公式))



Φは有界閉区間で連続関数なので、I 上一様連続となる。したがって、$d(\Delta)\to 0$ のとき、$d(\Delta')\to 0$　についてだが、それは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在し、$|x-y| < \delta$ をみたすすべての $x, y \in I$ に対し、$|\Phi(x)-\Phi(y)| < \varepsilon$ とすることができるからである。したがって、

(10.4)　$$\lim_{d(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)v(J_{i,j})$$

の $d(\Delta)$ が $d(\Delta')$ であっても問題ないことになる。

次に、(10.7) についてだが、十分小さな $\delta > 0$ のかわりに $d(\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{1+Cv(I)}$ とおけば　$\rho_i = \rho_i - r_i' + r_i'$　から　$|\rho_i| \leqq |\rho_i - r_i'| + |r_i'|$　なので

$$|J-\sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)\rho_i v(I_{i,j})|$$

$$=|J-\sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)(\rho_i - r_i' + r_i')v(I_{i,j})|$$

$$=|J-\sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)r_i' v(I_{i,j}) + \sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)(r_i' - \rho_i)v(I_{i,j})|$$

$$\leqq |J-\sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)r_i' v(I_{i,j})|$$

$$+|\sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)||r_i' - \rho_i|v(I_{i,j})$$

$$< \varepsilon + Cv(I)d(\Delta) < \varepsilon + \frac{Cv(I)\varepsilon}{1+Cv(I)} < 2\varepsilon$$

となる。そこで、$(f\circ\Phi)(r, \theta)r$ は I 上可積分で (10.2) が成り立つ。

また、逆に、ρ_i と r_i' の立場を入れかえると、 $r_i' = r_i' - \rho_i + \rho_i$　として

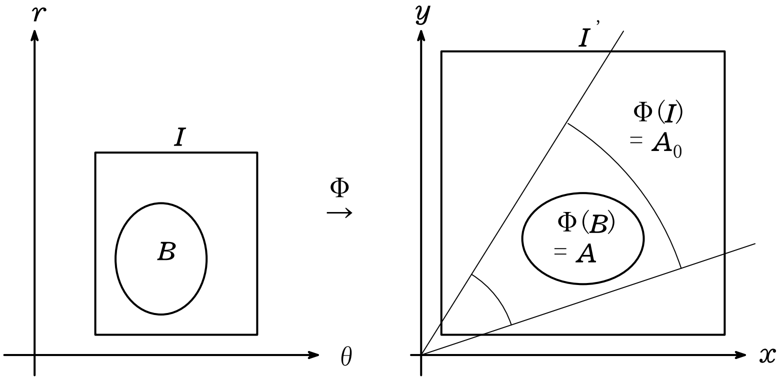
$|r_i'| \leqq |r_i' - \rho_i| + |\rho_i|$ なので、$(f\circ\Phi)(r,\theta)r$ が I 上可積分ならば

$$|J - \sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j) r_i' v(I_{i,j})|$$
$$= |J - \sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)(r_i' - \rho_i + \rho_i) v(I_{i,j})|$$
$$= |J - \sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)\rho_i v(I_{i,j}) + \sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)(\rho_i - r_i') v(I_{i,j})|$$
$$\leqq |J - \sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)\rho_i v(I_{i,j})|$$
$$+ |\sum_{i,j}(f\circ\Phi)(\rho_i, \phi_j)||\rho_i - r_i'| v(I_{i,j})$$
$$< \varepsilon + Cv(I)d(\Delta) < \varepsilon + \frac{Cv(I)\varepsilon}{1+Cv(I)} < 2\varepsilon$$

となるので、(10.5) の極限も J である。

最後に、(10.4) の左辺の極限が存在して、任意の (ξ_i, η_i) に対し、I° で Φ は一対一であるので、(ρ_i, ϕ_i) は確定する。仮定より、$(f\circ\Phi)(r,\theta)r$ は I 上可積分なので、(ρ_i, ϕ_i) のとり方に関係しない一定の極限が存在する。つまり、その値が J ということになる。また、J_{ij} は作り方からいくらでも細分化できるので定理9．11の条件 (9.27) をみたす。よって、定理9．11を使えることになる。

（P．283　定理10．1　系1）



この証明は難しくはないが、ややこしいので、よく使う定理をまとめておく。

命題8．2　3) $A\supset B$ で f が B 上 0 に等しければ、

「f が A 上可積分 ⇔ f が $A-B$ 上可積分」 であり、$\int_A f = \int_{A-B} f$ である。

定理8．5　$v(A\cap B)=0$ であるとし、$f:A\cup B\to R$ は有界とする。

1) f が A , B 上可積分ならば、$A\cup B$ 上で可積分である。

2) f が $A\cup B$ 上可積分で、A , B が体積確定ならば、f は A , B 上可積分である。

(証明) (8.1) から、 $\begin{cases} x\in\Phi(B)=A \ \to\ f^{※}=f \\ x\notin\Phi(B)=A \ \to\ f^{※}=0 \end{cases}$ とする。

① f が A 上可積分 $\Rightarrow$

$f^{※}$ は I' 上可積分($A\subset I'$ となる有界閉区間)、$A\subset A_0$ なので、$I'-A_0$ 上で $f^{※}=0$　よって、(8.2.3) より $f^{※}$ は $(I'-(I'-A_0))=A_0$ 上可積分となる。

$\Leftarrow f^{※}$ が $A_0=\Phi(I)$ 上可積分

$A\subset A_0$ なので A_0-A 上で $f^{※}=0$ 、よって、(8.2.3) より $f^{※}$ は $A_0-(A_0-A))=A$ 上で可積分となる。A 上では、$f=f^{※}$ なので、f は A 上可積分となる。

② $f^{※}$ が $A_0=\Phi(I)$ 上可積分 $\Leftrightarrow (f^{※}\circ\Phi)r$ は I 上可積分(定理10．1)より同値

③ $(f^{※}\circ\Phi)r$ は I 上可積分 $\Rightarrow$

I は有界閉区間なので体積確定であり、定理9．6より、$\overline{I}=I=I^{\circ}+I^{b}$ なので $v(I-I^{\circ})=v(I^{b})=0$ 命題8．4より、$(f^{※}\circ\Phi)r$ は I^{b} 上可積分となる。

また、$P=I-I^{\circ}$, $Q=I^{\circ}$ とすれば、$v(P)=0$, $v(Q)=v(I^{\circ})=v(I)$, $I=P\cup Q$

$v(P\cap Q)=0$ から、定理8．5．2より $Q=I^{\circ}$ 上可積分となる。

$\Leftarrow (f^{※}\circ\Phi)r$ は I° 上可積分

$v(P)=v(I-I^{\circ})=v(I^{b})=0$　P 上可積分となり、$Q=I^{\circ}$ とすれば、定理8．5．1より $I=P\cup Q$ 上可積分となる。

④' $(I^{\circ}-B)+(I^{\circ}\cap B)=I^{\circ}$

なぜなら、任意の $x\in(I^{\circ}-B)\cup(I^{\circ}\cap B)$

$\to\ x\in(I^{\circ}-B)$ または $x\in(I^{\circ}\cap B)\to x\in I^{\circ}$

逆に、任意の $x\in I^{\circ}$ に対し

$x \in B$ ならば $x \in I^{\circ} \cap B$, $x \notin B$ ならば $x \in I^{\circ} - B$

$x \in B$, $x \notin B$ どちらであっても $x \in (I^{\circ} - B) \cup (I^{\circ} \cap B)$

よって、 $(I^{\circ} - B) \cup (I^{\circ} \cap B) = I^{\circ}$ となる。

最後に、$(I^{\circ} - B) \cap (I^{\circ} \cap B) = \varnothing$ なので直和となる。

④ $(f^{※} \circ \Phi) r$ が I° 上可積分 ⇒

$(I^{\circ} - B) \cup (I^{\circ} \cap B) = I^{\circ}$ であり、$I^{\circ} - B$ 上で $(f^{※} \circ \Phi) r = 0$ なので、

命題8．2．3より $(f^{※} \circ \Phi) r$ は $I^{\circ} \cap B = I^{\circ} - (I^{\circ} - B)$ 上で可積分となり、$I^{\circ} \cap B$ 上で $(f^{※} \circ \Phi) r = (f \circ \Phi) r$ なので $(f \circ \Phi) r$ は $I^{\circ} \cap B$ 上で可積分となる。

⇐ $(f \circ \Phi) r$ が $I^{\circ} \cap B$ 上可積分

$I^{\circ} \cap B$ 上で $(f^{※} \circ \Phi) r = (f \circ \Phi) r$ なので、$(f^{※} \circ \Phi) r$ も $I^{\circ} \cap B$ 上可積分となる。また、$I^{\circ} - B$ 上で $(f^{※} \circ \Phi) r = 0$ なので、命題8．2．3より I° 上で可積分となる。

⑤' $B = (I^{\circ} \cap B) + (I^{b} \cap B)$

$(I^{\circ} \cap B) \cap (I^{b} \cap B) = \varnothing$ （$I^{\circ} \cap I^{b} = \varnothing$, $I = I^{\circ} + I^{b}$ から明らか）

$(I^{\circ} \cap B) \subset B$, $(I^{b} \cap B) \subset B$ なので $(I^{\circ} \cap B) \cup (I^{b} \cap B) \subset B$

任意の $x \in B$ に対し、$B \subset I$ なので、$x \in I^{\circ}$ か $x \in I^{b}$ のどちらかである。

よって、いずれにしても $x \in (I^{\circ} \cap B) \cup (I^{b} \cap B)$ よって、

$(I^{\circ} \cap B) \cup (I^{b} \cap B) \supset B$ つまり、上の等式を得る。

⑤ $(f \circ \Phi) r$ は $I^{\circ} \cap B$ 上可積分 ⇒

$B - (I^{\circ} \cap B) = I^{b} \cap B \subset I^{b}$ なので、$v(B - (I^{\circ} \cap B)) = 0$

$B = (B - (I^{\circ} \cap B)) \cup (I^{\circ} \cap B)$, $v\{(B - (I^{\circ} \cap B)) \cap (I^{\circ} \cap B)\} = 0$ より、命題8．4と定理8．5．1より B 上可積分となる。

⇐ $(f \circ \Phi) r$ が B 上可積分

$((f \circ \Phi) r)^{※}$ は I 上可積分である。I は体積確定で $v(I^{b}) = 0$ なので

$I - (I^{b}) = I^{\circ}$ も定理8．6から体積確定である。したがって、命題8．2．2より

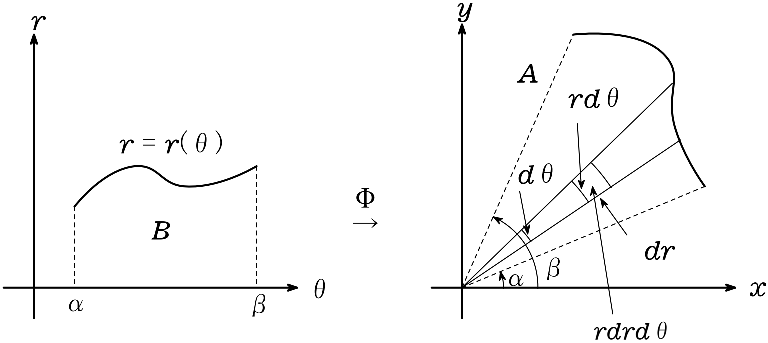
$(f\circ\Phi)r$ は I° 上可積分である。また、$I^{\circ}=(I^{\circ}-B)+(I^{\circ}\cap B)$ から

$((f\circ\Phi)r)^{※}$ は $I^{\circ}-B$ で 0 なので、命題8．2．3より、$((f\circ\Phi)r)^{※}$ は

$I^{\circ}-(I^{\circ}-B)=I^{\circ}\cap B$ で可積分となる。また、$((f\circ\Phi)r)^{※}$ は $I^{\circ}\cap B$ で

$(f\circ\Phi)r$ に等しいので、よって、$(f\circ\Phi)r$ は $I^{\circ}\cap B$ 上可積分となる。

（P．284　例2）



$r(\theta)$ は $[\alpha,\beta]$ で連続なので、B は面積確定

$$v(A)=\iint_B r\,dr\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\int_0^{r(\theta)} r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r(\theta)^2d\theta$$

（P．285　例4）

動径の掃く面積 A とは、自動車のワイパーをイメージすれば理解できる。また、θ も t の関数であり、よって、r も t の関数として扱う。

次に、離心率 e について

点 P から定直線 m までの距離と

$OP=r$ の比率を e とするので

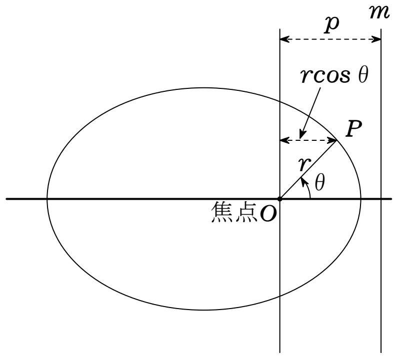
$$e=\frac{r}{p-r\cos\theta}$$

$ep=\ell$ と置けば

$$ep-er\cos\theta=r$$

$$r(1+e\cos\theta)=ep=\ell$$

$$r=\frac{\ell}{1+e\cos\theta}$$



ここで、u を次のようにおく

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\theta}{\ell}$$

(10.13) から　$\theta'=\frac{1}{r^2}c=cu^2$　だから、

$$r'=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{u^2}\cdot\left(-\frac{e\sin\theta}{\ell}\right)\cdot\theta'=-\frac{1}{u^2}\cdot\left(-\frac{e\sin\theta}{\ell}\right)\cdot cu^2$$

$=\frac{ce}{\ell}\sin\theta$　（$\frac{ce}{\ell}$ は定数である）

$$r''=\frac{ce}{\ell}\cos\theta\times\theta'=\frac{ce}{\ell}\cos\theta\times cu^2=\frac{ec^2u^2}{\ell}\cos\theta$$

ここで、$r\theta'^2=r\cdot c^2u^4=\frac{1}{u}\cdot c^2u^4=c^2u^3$

したがって、加速度の r 成分 $a_r=r''-r\theta'^2$ なので、

$$a_r=\frac{ec^2u^2}{\ell}\cos\theta-c^2u^3=\left(\frac{e}{\ell}\cos\theta-u\right)c^2u^2=\left(\frac{e\cos\theta}{\ell}-\frac{1+e\cos\theta}{\ell}\right)c^2u^2$$

$$=-\frac{c^2}{\ell}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$a_\theta=0$ だから、加速度 a は O 方向に向かい、その大きさは $\frac{1}{r^2}$ に比例する。

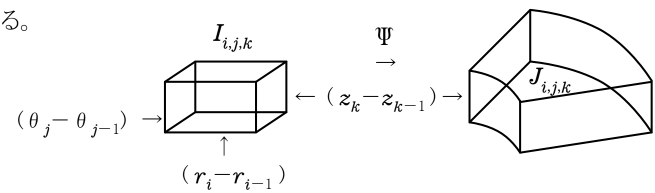
（P. 286　定理10．2の証明の補足）

B が区間 $I=[\rho,R]\times[\alpha,\beta]\times[a,b]$ の場合

$I_{i,j,k}=[r_{i-1},r_i]\times[\theta_{j-1},\theta_j]\times[z_{k-1},z_k]$ $(1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n,1\leqq k\leqq\ell)$

と置く。$\Psi(I_{i,j,k})=J_{i,j,k}$ は

右図の様になる。



$$v(J_{i,j,k})=\frac{1}{2}(r_i^2-r_{i-1}^2)(\theta_j-\theta_{j-1})(z_k-z_{k-1})$$

$$=\frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1})(\theta_j-\theta_{j-1})(z_k-z_{k-1})$$

$$=\frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})v(I_{i,j,k})$$

$J_{i,j,k}$ は A の一般分割 Δ' であり、定理10．1の証明同様 $d(\Delta)\to 0$ と $d(\Delta')\to 0$ は同値なので、小区間 $I_{i,j,k}$ の点（ρ_i, ϕ_j, z_k）を任意に代表点として選んだとき $\Psi(\rho_i, \phi_j, z_k) = (\xi_i, \eta_j, z_k)$ と置けば、f が A 上可積分であるとき定理9．10によって

(10.4)' $$\lim_{d(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} f(\xi_i, \eta_j, z_k)\, v(J_{i,j,k}) = \iiint_A f(x, y, z)\,dxdydz$$

$r_i' = \dfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$ とおけば、この式の左辺は

(10.5)' $$\lim_{d(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} (f\circ\Psi)(\rho_i, \phi_j, z_k)\, r_i'\, v(I_{i,j,k})$$

に等しい。(10.7) と同様に、$\rho_i = \rho_i - r' + r' \to |\rho_i| \leqq |\rho_i - r'| + |r'|$

(10.7)'

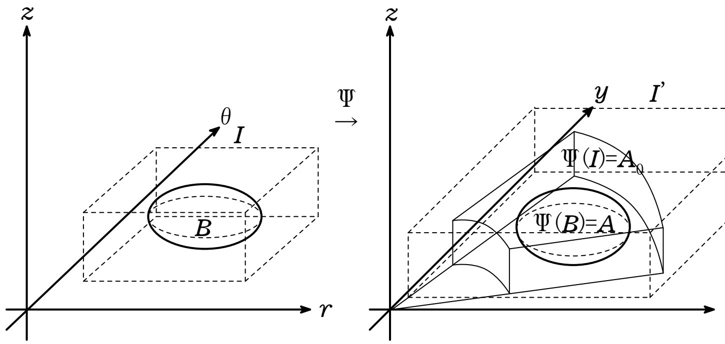
$$\left|J - \sum_{i,j,k}(f\circ\Psi)(\rho_i, \phi_j, z_k)\,\rho_i\, v(I_{i,j,k})\right|$$

$$\leqq \left|J - \sum_{i,j,k}(f\circ\Psi)(\rho_i, \phi_j, z_k)\, r_i'\, v(I_{i,j,k})\right|$$

$$+ \left|\sum_{i,j,k}(f\circ\Psi)(\rho_i, \phi_j, z_k)\right| |r_i' - \rho_i|\, v(I_{i,j,k})$$

$< \varepsilon + Cv(I)d(\Delta) < 2\varepsilon$　　以下同様に証明できる。

B が（r, θ, z）空間の有界集合の場合



証明は、Φ を Ψ として、定理10．1　系1をなぞっていけば同様にできる。

（P．287　例5）

$B : x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$

半径 $\dfrac{a}{2}$ の円柱 $C : (x - \dfrac{a}{2})^2 + y^2 \leqq (\dfrac{a}{2})^2$

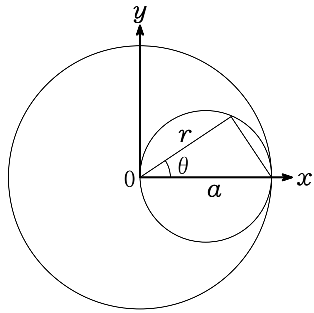
B , C の共通部分を D とする。

D の体積を V とおく。

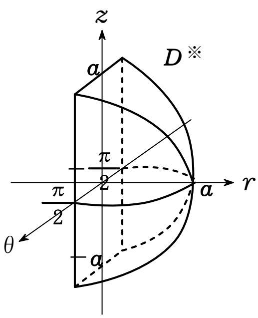
D に対応する(r , θ , Z)空間の集合 $D^{※}$ は

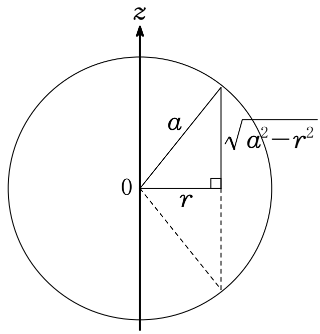
$D^{※}: 0 \leqq r \leqq a\cos\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

, $-\sqrt{a^2-r^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-r^2}$



これは(r , θ)平面において区分的に C^1 級な曲線を境界とする閉領域上の縦線集合であるから体積確定である。





(P. 287 定理10. 3の証明の補足)

空間極座標

(10.20) $\quad \Phi(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$

$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

$\rho = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $\phi = \phi$ とおくと

$(r, \theta, \phi) \to (r\cos\theta, r\sin\theta, \phi) = (z, \rho, \phi)$

$\to (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$

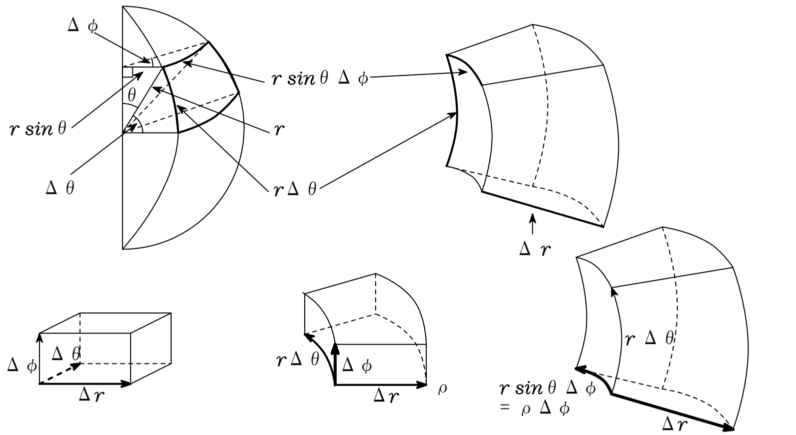
$= (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, z) = (x, y, z)$

とすれば、円柱座標を定義する写像を二回合成していると考えることができる。

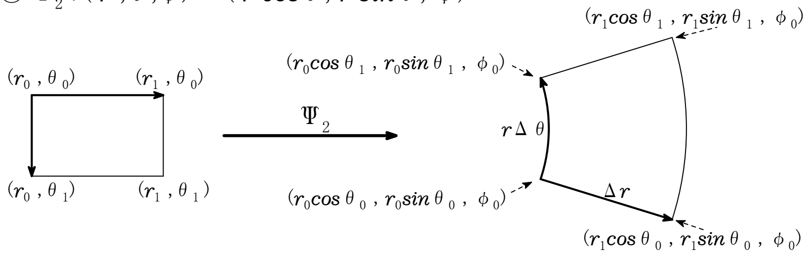
したがって、定理10. 2から定理10. 3が得られる。要点は、

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z \to dxdydz \Rightarrow rdrd\theta dz$ を二回利用する。

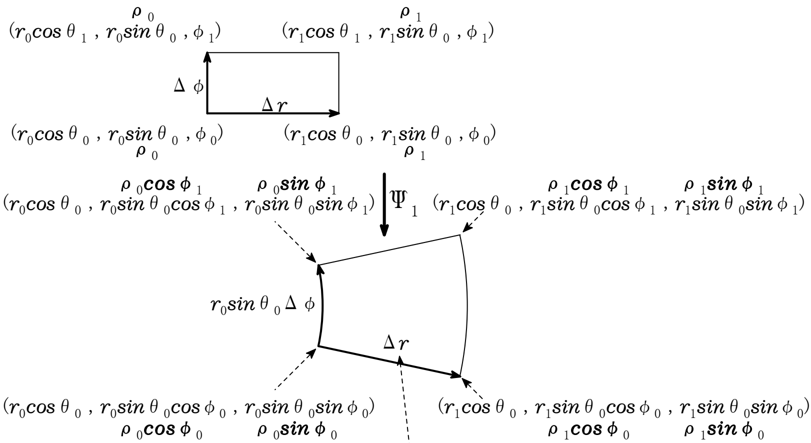
(直感的には)



① $\Psi_2 : (r, \theta, \phi) \to (\overset{z}{r\cos\theta}, \overset{\rho}{r\sin\theta}, \phi)$



② $\Psi_1 : (r\cos\theta, \boldsymbol{r\sin\theta}, \boldsymbol{\phi}) = (z, \rho, \phi) \to (x, y, z)$



$(\Delta r)^2 = (r_1 - r_0)^2\cos^2\theta_0 + (r_1 - r_0)^2\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0 + (r_1 - r_0)^2\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0 = (r_1 - r_0)^2$

①、② の写像を順に施すと、定理10．2から

$$(x, y, z) \overset{\Psi_1}{\longleftarrow} (\rho, \phi, z) \overset{\Psi_2}{\longleftarrow} (r, \theta, \phi)$$

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \qquad & z &= r\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi \qquad & \rho &= r\sin\theta \end{aligned}$$

$$f(x, y, z)dxdydz = (f\circ\Psi_1)(\rho, \phi, z)\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \rho(f\circ\Psi_1)(\rho, \phi, z)d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \rho(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2)(r, \theta, \phi)\, rdrd\theta\, d\phi$$

$$= (f\circ\Psi_1\circ\Psi_2)(r, \theta, \phi)\, \rho\, rdrd\theta\, d\phi$$

$$= (f\circ\Psi_1\circ\Psi_2)(r, \theta, \phi)\, r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\phi$$

（P．288　n 次元極座標）

(10.23)　　$\Phi_n = (r,\ \theta_1, \cdots,\ \theta_{n-1}) = (x_1, \cdots, x_n)$

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$\vdots$

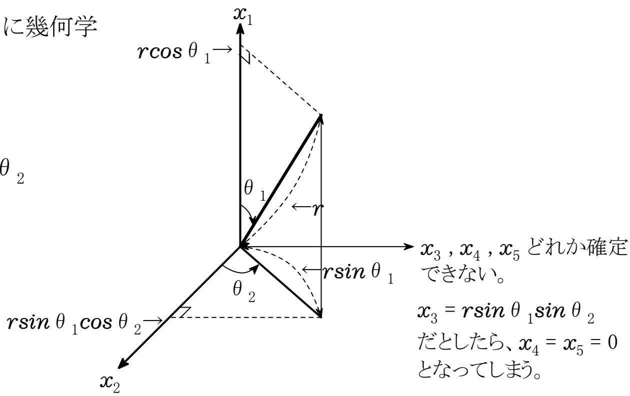
$x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}$

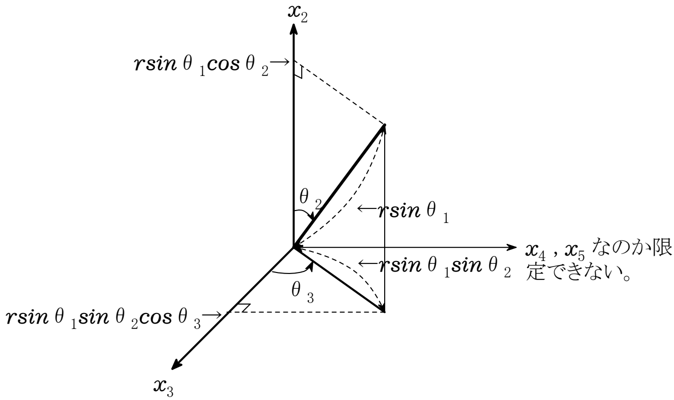
$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}$

$n = 5$ の場合を例に幾何学的意味を示す。

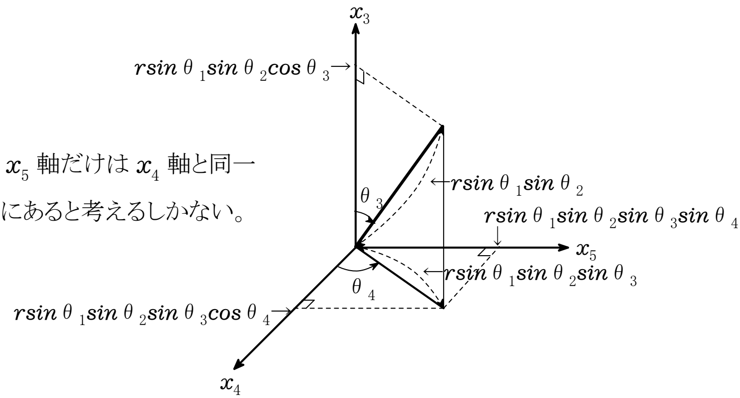
$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$





最後の x_5 軸だけは x_4 軸と同一平面上にあると考えるしかない。



（例）$n = 3$ の場合

$P = (1, 1, 1) \in R^3$

$r = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$x_1 = 1$ なので $x_1 = \sqrt{3}\cos\theta_1 \rightarrow \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta_1 = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x_2 = 1$ なので $x_2 = \sqrt{3}\sin\theta_1\cos\theta_2 = \sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\cos\theta_2 \rightarrow \cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow \theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$

P の極座標 $= \left(\sqrt{3}, \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

（P．288　命題10．4）

任意の $x=(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1}$ に対し、$r=|x|>0$ として、

$|x_1| \leqq |x| = r$ だから、$x_1 = r\cos\theta_1$ となる $\theta_1 \in [0, \pi]$ は存在し、一意的に定まる。このとき

$$x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{n+1}^2$$
$$= r^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots$$
$$+r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}\boldsymbol{\cos^2\theta_n} + r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}\boldsymbol{\sin^2\theta_n}$$
$$= r^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots$$
$$+r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}$$

$$= r^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots$$
$$+r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}\boldsymbol{\cos^2\theta_{n-1}} + r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}\boldsymbol{\sin^2\theta_{n-1}}$$
$$= r^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots$$
$$+r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}$$
$$=\cdots = r^2\sin^2\theta_1$$

ここで、$r\sin\theta_1 = R$ とすれば、

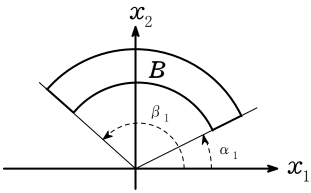
$$x_2 = R\cos\theta_2$$
$$x_3 = R\sin\theta_2\cos\theta_3$$
$$x_4 = R\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$$
$$\vdots$$
$$x_n = R\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_n$$
$$x_{n+1} = R\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_n$$

$(R, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n) = (\rho', \theta'_1, \theta'_2, \cdots, \theta'_{n-1})$ とみなせば、帰納法の仮定により

$(\rho', \theta'_1, \theta'_2, \cdots, \theta'_{n-1}) \in [0, \pi]\times[0, \pi]\times\cdots\times[0, \pi]\times[0, 2\pi]$ $= J$ の内部 J° で一対一なので、I の内部 I° で一対一が示されたことになる。

（P. 289　定理10. 5）

$I = [s, t] \times [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n] = [s, t] \times [\alpha_1, \beta_1] \times K$

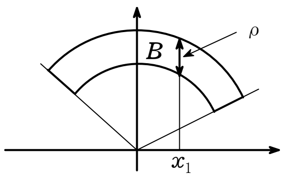
$\Theta(I) =$  $\times K$

$= B \times K$ とおく。

ここで、B は有界閉区間ではなく、有界集合（体積確定集合）である。

Θ は（$\theta_2, \cdots, \theta_n$）を固定し（$r$, θ_1）については、2次元極座標の変換をする。また、Ψ は $x_1 = r\cos\theta_1$ を固定し、$\rho = r\sin\theta_1$ とする。（注　x_1 を固定しても r, θ_1 は固定されないので、ρ は固定されない）

ρ は閉区間を動くことになる。



定理7を使う前に、P. 251に、仮定の $a)$ だけで $b)$ は必要ないとある。なぜなら、f が $I = J \times K$ で可積分ならば、f の I における不連続点の集合をBとした場合、定理9. 7から B は零集合である。よって、x を任意に決め、それを x_0 とする関数 $f^{x_0}(x_0, y)$ の不連続点の集合を E とすれば、任意の$(x_0, y) \in E$ は $f(x, y)$ の不連続点になるので$(x_0, y) \in B$ よって、$E \subset B$ となる。零集合の部分集合は零集合（命題9. 2, 6)）になる。故に、定理9. 7から可積分となる。よって、定理7. 1 系1も仮定 $a)$ だけでよい。

$\int_A f(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+1}$

$\Psi \circ \Theta(I) = A$ なので、Ψ、Θは全単写であることから、$I = \Theta^{-1}(\Psi^{-1}(A))$ である。$r\sin\theta_1 = \rho$ とすれば、

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 = \rho\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 = \rho\sin\theta_2\cos\theta_3$

$x_4 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 = \rho\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$

$x_5 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5 = \rho\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5$

$\vdots$

$x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n = \rho\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n$

$x_{n+1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n = \rho\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n$

$\int\cdots\int_A f(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})dx_1dx_2\cdots dx_{n+1}$ ←①

Ψは x_1 を全く変えない写像なので x_1 を固定したとしてもよい、しかし、上図に示したように、ρ はある閉区間の中を動くことになる。したがって、帰納法の仮定から可積分となり

$= \int\cdots\int_{\Psi^{-1}(A)}(f\circ\Psi)(x_1, \rho, \theta_2, \cdots, \theta_n)\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}dx_1d\rho d\theta_2 \cdots d\theta_n$ ←②

$= \int\cdots\int_{\Theta(I)}(f\circ\Psi)(x_1, \rho, \theta_2, \cdots, \theta_n)\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}dx_1d\rho d\theta_2 \cdots d\theta_n$

$= \int\cdots\int_{K\times B}(f\circ\Psi)(x_1, \rho, \theta_2, \cdots, \theta_n)\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}dx_1d\rho d\theta_2 \cdots d\theta_n$ ←③

$= \int_K\{\int_B(f\circ\Psi)(x_1, \rho, \theta_2, \cdots, \theta_n)\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}dx_1d\rho\}d\theta_2 \cdots d\theta_n$ ←④

次に、$x_1 = r\cos\theta_1$, $\rho = r\sin\theta_1$ とする写像Θを施す。Θは($\theta_2, \cdots, \theta_n$)を固定し、x_1, ρ だけを変換する写像なので、定理10．1と定理7．1から

$= \int_K\{\int_{[s,t]\times[\alpha_1, \beta_1]}(f\circ\Psi\circ\Theta)(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\, rd\, rd\theta_1\}d\theta_2 \quad \cdots d\theta_n$

$= \int\cdots\int_{K\times[s,t]\times[\alpha_1, \beta_1]}(f\circ\Psi\circ\Theta)(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\, rdrd\theta_1 d\rho\ d\theta_2 \quad \cdots d\theta_n$

$= \int\cdots\int_I(f\circ\Psi\circ\Theta)(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)(r\sin\theta_1)^{n-1}\sin^{n-2}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}rdrd\theta_1 d\theta_2 \quad \cdots d\theta_n$

$= \int \cdots \int_I (f \circ \Phi_{n+1})(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) r^n sin^{n-1}\theta_1 sin^{n-2}\theta_2 \cdots sin\theta_{n-1} drd\theta_1$

$d\theta_2 \quad \cdots d\theta_n$

という流れの証明であると思われるが、① から ② がつながらない。また、③ から ④ については、第Ⅱ巻のP．79 命題1．9 が必要であると思う。

そこで、定理10．2 を拡張して、（自信がないので字を小さくする。）

(10.17)'　$\Psi(r, \theta, x_3, \cdots, x_k) = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$

$x_1 = rcos\theta$, $x_2 = rsin\theta$, $x_3 = x_3, \cdots, x_k = x_k$

で定義される写像 Ψ を用意する。B が $(r, \theta, x_3, \cdots, x_k)$ 空間の有界集合とし、$B \subset I$ となる 有界閉区間 I で、Ψ が I° で一対一となるものが存在するものと仮定する。このとき、$A = \Psi(B)$ としたとき

$\int \cdots \int_A f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k) dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_k$

$= \int \cdots \int_B f(rcos\theta, rsin\theta, x_3, \cdots, x_k) rdrd\theta dx_3 \cdots dx_k$

証明は、半径 r 、中心角 θ の扇形を底面とする高さ $x_3, \cdots, x_k$ の k 次元柱体の超体積を $\frac{1}{2} r^2 \theta x_3 \cdots x_k$ として証明できると思う。(一般分割については自信がない。)

この定理が認められれば、例えば、$k = 5$ のとき、定理10．3 の証明と同様に次の等式が成り立つはずである。

$\int \cdots \int_A f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5$

$= \int \cdots \int_B (f \circ \Phi_5)(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) r^4 sin^3\theta_1 sin^2\theta_2 sin\theta_3 drd\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$

（証明）5次元極座標は次のようにする。

$x_1 = rcos\theta_1$

$x_2 = rsin\theta_1 cos\theta_2 = \rho cos\theta_2$

$x_3 = rsin\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3 = \rho sin\theta_2 cos\theta_3 = \tau cos\theta_3$

$x_4 = rsin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 cos\theta_4 = \rho sin\theta_2 sin\theta_3 cos\theta_4 = \tau sin\theta_3 cos\theta_4 = \xi cos\theta_4$

$x_5 = rsin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 sin\theta_4 = \rho sin\theta_2 sin\theta_3 sin\theta_4 = \tau sin\theta_3 sin\theta_4 = \xi sin\theta_4$

写像 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ を次のように定める。

$$\Psi_4 : (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta_1}, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \quad \to \quad (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{\rho}, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$$

$$x_1 = r\cos\theta_1$$
$$\rho = r\sin\theta_1$$

$$\Psi_3 : (x_1, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta_2}, \theta_3, \theta_4) \quad \to \quad (x_1, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{\tau}, \theta_3, \theta_4)$$

$$x_2 = \rho\cos\theta_2$$
$$\tau = \rho\sin\theta_2$$

$$\Psi_2 : (x_1, x_2, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta_3}, \theta_4) \quad \to \quad (x_1, x_2, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{\xi}, \theta_4)$$

$$x_3 = \tau\cos\theta_3$$
$$\xi = \tau\sin\theta_3$$

$$\Psi_1 : (x_1, x_2, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{\xi}, \theta_4) \quad \to \quad (x_1, x_2, x_3, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5})$$

$$x_4 = \xi\cos\theta_4$$
$$x_5 = \xi\sin\theta_4$$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\, dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5$

$= (f\circ\Psi_1)(x_1, x_2, x_3, \xi, \theta_4)\,\xi\, d\xi\, d\theta_4 dx_1dx_2dx_3$

$= \xi\,(f\circ\Psi_1)(x_1, x_2, x_3, \xi, \theta_4)\, d\xi\, d\theta_4 dx_1dx_2dx_3$

$= \xi\,(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2)(x_1, x_2, \tau, \theta_3, \theta_4)\,\tau\, d\tau\, d\theta_3 d\theta_4 dx_1dx_2$

$= \tau\,\xi\,(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2)(x_1, x_2, \tau, \theta_3, \theta_4)\, d\tau\, d\theta_3 d\theta_4 dx_1dx_2$

$= \tau\,\xi\,(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3)(x_1, \rho, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\,\rho\, d\rho\, d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 dx_1$

$= \rho\,\tau\,\xi\,(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3)(x_1, \rho, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, d\rho\, d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 dx_1$

$= \rho\,\tau\,\xi\,(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3\circ\Psi_4)(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, rdrd\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$

$= r\,\rho\,\tau\,\xi\,(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3\circ\Psi_4)(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, drd\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$

$= r\times r\sin\theta_1\times r\sin\theta_1\sin\theta_2\times r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\times(f\circ\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3\circ\Psi_4)(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, drd\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$

$= (f\circ\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3\circ\Psi_4)(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, r^4\sin^3\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3 drd\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$

$\Phi_5(B) = (\Psi_1\circ\Psi_2\circ\Psi_3\circ\Psi_4)(B) = A$ なので、

$\int\cdots\int_A f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\, dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5$

$= \int\cdots\int_B (f\circ\Phi_5)(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\, r^4\sin^3\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3 drd\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$

これと同じ手順で行えば、(10.24) を得ることができるはずである。多少強引だが、累次積分で {} の中を変数変換しても {} を簡単にはずせないのでこの方法ならすっきりする。しかも B は

有界集合である。いずれにせよ、第Ⅱ巻に変数変換についての記述があるので、それに期待したい。

(P. 291　7行目　f が I 上可積分なら広義可積分)

ここで、$I=[a\ ,b)$ であったが、f が I 上可積分の I は $[a\ ,b]$ であって、命題5. 2 から、$F(t)=\int_a^t f(x)dx$ は $[a\ ,b]$ で連続であるから

$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx=\lim_{t\to b-0}\{F(t)-F(a)\}=F(b)-F(a)$$

となって、$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ と一致する。

(P. 291　例3)

$\lim_{x\to 0} x\log x=0$ である。なぜなら、$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\log\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0=-\lim_{x\to 0}x\log x$　よって、$\lim_{x\to 0}x\log x=0$

(次の準備のためにP. 290　定義 1, 1) について確認)

有界閉区間 $I=[a\ ,u]$ で f は<u>有界</u>で可積分とあるが、P. 211 問題 2) から、可積分というだけでよいことになる。(ただし、$a\neq u$ とする。)

(証明) 可積分性から、任意の $\varepsilon>0$ (ここでは、1 とする。) に対し、$\delta>0$ が存在して、$d(\Delta)<\delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 ξ_k の取り方によらず

$\left|s(f\,;\Delta\,;\xi)-\int_I f\right|<1$　…　①

が成り立つ。

$k\in K(\Delta)$ を任意に一つ決め、$k\neq m\in K(\Delta)$ に対し $\xi_m\in I_m$ を一つ固定して　$B=\sum_{m\in K(\Delta),m\neq k}f(\xi_m)v(I_m)$, $\int_I f=J$ とおくと、任意の $\xi_k\in I_k$ に対して

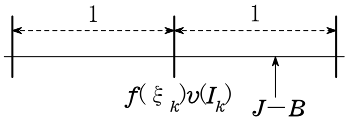
(k と ξ_m は固定されているが、ξ_k は I_k の中を自由に動ける。)

$s(f\,;\Delta\,;\xi)=B+f(\xi_k)v(I_k)$ なので、①と分点の約束から $v(I_k)>0$ なので

$|B+f(\xi_k)v(I_k)-J|<1$　→　$|f(\xi_k)v(I_k)-(J-B)|<1$

$J-B-1 < f(\xi_k)v(I_k) < J-B+1$

$\dfrac{1}{v(I_k)}(J-B-1) < f(\xi_k) < \dfrac{1}{v(I_k)}(J-B+1)$



が成り立つ。J , B は確定した値なので、f は I_k 上有界、$k \in K(\Delta)$ は任意だから f は I 上有界となる。

有界という条件の必要性が、定理がないためか、それとも念を押すためなのかわからない。ここでは、必要とみなして進める。

(P. 292　命題11. 1(コーシーの条件))

Ⅰ章 定理6. 10(コーシーの条件) $B \subset A$ を $\overline{R}$ の部分集合とし、a を $\overline{R}$ における B の触点とする。このとき、関数 $f : A \to R$ に対し次の条件 a) , b) は同値である。

a) $\displaystyle\lim_{x \to a, x \in B} f(x) \in R$ が存在する。

b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、a の近傍 U が存在して、x , $y \in U \cap B$ ならば $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ となる。

この定理を広義積分に適用する。

$A = B = [a , b)$ として、b を $\overline{R}$ における B の触点と考えればよい。

$F(u) = \displaystyle\int_a^u f(x)dx$

とおけば、a) は $\displaystyle\lim_{x \to b-0} F(u) = J \in R$ となる。

b) は、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$b-c = \delta > 0$ として、b の近傍 $U(b, \delta)$ をとれば u , $v \in U(b, \delta) \cap [a , b)$ ならば、$c < u < v < b$ なので

$|F(u)-F(v)| = \left|\displaystyle\int_a^u f(x)dx - \int_a^v f(x)dx\right| = \left|\displaystyle\int_v^u f(x)dx\right| < \varepsilon$ となり、Ⅰ章定理6. 10と同様にできる。

(P. 292　命題11. 2)

$a \leqq v < u < b$ の a の後ろの不等号 $\leqq$ は、定義 1 の条件 1 と定理3.5 によるものである。

任意の $u \in [a , b)$ に対し

$\left| \int_a^u f(x)dx \right| \leqq \int_a^u |f(x)|dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つので、$u \to b-0$ として

$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ となる。

（P. 293　例5）

$\int f'g = fg - \int fg'$ ここで、$f = -\cos x$, $g = \dfrac{1}{x}$ とおけば

$f' = \sin x$, $g' = -\dfrac{1}{x^2}$ となり

$$\left| \int_v^u \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_v^u - \int_v^u \frac{\cos x}{x^2} dx \right|$$

$$= \left| -\frac{\cos u}{u} + \frac{\cos v}{v} \right| + \left| \int_v^u \frac{\cos x}{x^2} dx \right|$$

$$\leqq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \int_v^u \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \left[-\frac{1}{x} \right]_v^u = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{2}{v} \to 0$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} dt$$

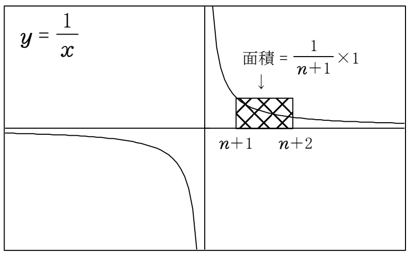
（$t = x + n\pi$, $\dfrac{dt}{dx} = 1$ また、$[\,0\,,\,\pi\,]$ では、$\sin x \geqq 0$）

$= \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t+n\pi} \cdot \sin t\, dt$　　ここで、$\dfrac{1}{t+n\pi} > \dfrac{1}{(n+1)\pi}$　（$0 \leqq t \leqq \pi$）から

$$> \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} [\,-\cos t\,]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{(n+1)\pi} > \frac{2}{\pi} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\, dx$$



よって

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

$$> \frac{2}{\pi} \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx + \frac{2}{\pi} \int_2^3 \frac{1}{x}\, dx + \cdots + \frac{2}{\pi} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{2}{\pi}\ell og(x)\right]_1^{n+1} = \frac{2}{\pi}\ell og(n+1) \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

(P. 293　定理11. 3)

定義1の1)には、有界で可積分とあるが、この定理では可積分のみである。

1) については、$f(x) = O(\frac{1}{x^{\alpha}})$ ($x \to +\infty$) で $\alpha > 1$ なので

$$\frac{|f(x)|}{|\frac{1}{x^{\alpha}}|} \leqq C \ (x \to +\infty) \to |f(x)| \leqq C\frac{1}{x^{\alpha}} \quad (x \to +\infty)$$

よって、$g(x) = \frac{C}{x^{\alpha}}$ ($\alpha > 1$) とすればよい。

2) についても同様で

$$\frac{|f(x)|}{|(b-x)^{\beta}|} = \frac{|f(x)|}{(b-x)^{\beta}} \leqq C \ (x \to b-0)$$ なので $|f(x)| \leqq C(b-x)^{\beta}$

よって、$g(x) = C(b-x)^{\beta}$ ($\beta > -1$) とすればよい。

注意 1 にあるように、ある区間 $[c , b)$ で $|f(x)| \leqq g(x)$ となる。また、どちらの場合も、$g(x)$ は任意の $t \in [c , b)$ に対し、$[c , t]$上連続関数なので可積分であり、$[c , t]$ は有界閉区間なので最大値が存在することから有界である。したがって定義 1 の条件 1) をみたす。

(P. 294　例6)

まずは次の定理が必要である。

(定理)　$f(x)$は開区間$(a , b]$で連続な x の関数、$\phi(t)$は$(\alpha , \beta]$で微分可能で狭義単調関数であり、$\alpha < t \leqq \beta$　のとき　$a < \phi(t) \leqq b$　、$a = \lim_{t\to\alpha+0}\phi(t)$、$\phi(\beta) = b$ であると仮定する。この仮定のもとで、広義積分$\int_{a+}^{b} f(x)dx$ が収束するための必要十分条件は、広義積分　$\int_{\to\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$　が収束することであって、収束するときには等式:

$$\int_{\to a}^{b} f(x)dx = \int_{\to\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt \qquad \cdots ①$$

が成り立つ。

（証明）

$\alpha < \rho \leqq \beta$、$r = \phi(\rho)$ とすれば、Ⅳ章　定理5．6により

$$\int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\rho^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad \cdots \ ②$$

仮定により、広義積分

$$\int_{\to a}^b f(x)dx = \lim_{r\to a+0}\int_r^b f(x)dx$$

が収束するから、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta_1 > 0$ が存在し、$r-a < \delta_1$ ならば

$$\left| \int_{\to a}^b f(x)dx - \int_r^b f(x)dx \right| < \varepsilon \quad \cdots \ ③$$

とすることができる。

また、$a = \lim_{t\to\alpha+0}\phi(t)$ から、上の δ_1 に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、$\rho - \alpha < \delta$ ならば、$\phi(\rho) = r$ なので $r-a < \delta_1$ とすることができる。

よって、③ に ② を代入すれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して

$\rho - \alpha < \delta$ ならば、$\left| \int_{\to a}^b f(x)dx - \int_\rho^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt \right| < \varepsilon$

したがって、$\lim_{\rho\to\alpha+0}\int_\rho^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\to a}^b f(x)dx$

すなわち広義積分 $\int_{\to\alpha}^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ も収束して等式 ① が成立する。

逆に広義積分 $\int_{\to\alpha}^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ が収束すると仮定する。

極限 $\lim_{r\to a+0}\int_r^b f(x)dx$ が存在することを証明するためには、Ｉ章　定理6．2系により $a < r_n \leqq b$、$\lim_{n\to\infty} r_n = a$ となる任意の数列 $\{r_n\}$ に対して

極限 $\lim_{n\to\infty}\int_{r_n}^b f(x)dx$ が収束することをいえばよい。

仮定により、$a = \lim_{t\to\alpha+0}\phi(t)$ であるから、Ｉ章　定理8．1系3 中間値の定理によって、各 r_n に対して

$r_n = \phi(\rho_n)$ となる ρ_n（$\alpha < \rho_n \leqq \beta$）が存在する。

数列 $\{\rho_n\}$ が α に収束することを確かめるために、$\{\rho_n\}$ が α に収束しないと仮定すれば、ある $\varepsilon > 0$ に対して、$\alpha + \varepsilon \leqq \rho_n \leqq \beta$ となる項 ρ_n が無限に存在する

ことになる。I 章　定理3．4により収束する部分列が存在するので、その極限を

$\omega = \lim_{m\to\infty} \rho_{n_m}$ とすれば、

$\alpha + \varepsilon \leqq \rho_{n_m} \leqq \beta$ であるから、$\alpha + \varepsilon \leqq \omega \leqq \beta$ であるが、

$\omega = \beta$ ならば、$\lim_{m\to\infty} \phi(\rho_{n_m}) = b > a$

$\omega < \beta$ ならば、$\lim_{m\to\infty} \phi(\rho_{n_m}) = \phi(\omega) > a$

いずれにせよ、I 章（3．18)から $\lim_{m\to\infty} \phi(\rho_{n_m}) = \lim_{m\to\infty} r_{n_m} = \lim_{n\to\infty} r_n = a$ なので矛盾する。ゆえに、$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \alpha$ である。よって

$$\lim_{n\to\infty}\int_{r_n}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\to\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

すなわち、広義積分 $\int_{\to a}^{b} f(x)dx$ は収束して等式 ① は成り立つ。

$\alpha \leqq t < \beta$　のとき　$a < \phi(t) \leqq b$　、$a = \lim_{t\to\beta-0} \phi(t)$ 、$\phi(\alpha) = b$ となる場合もある。そのような場合は、定理5．6 の内容をもう少し詳しく調べる必要がある。

Ⅳ章　定理5．6の仮定は、i）f は $I = [a, b]$ で連続、ii）$\phi(t)$ は $J = [\alpha, \beta]$ で微分可能、iii）$\phi'(t)$ は J で有界可積分、iv）$\phi(J) \subset I$，$\phi(\alpha) = a$，$\phi(\beta) = b$ であって、このとき

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

となる。

この定理を補足すると、$\alpha < \beta$ を J に属する 2 点とし、$a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$ であって、a, b が I に含まれていればよい。したがって、$\phi(\alpha) > \phi(\beta)$ という場合もありうるわけである。

したがって、この場合は、$a = \lim_{t\to\beta-0} \phi(t)$ 、$\phi(\alpha) = b$ なので、$\alpha \leqq \rho < \beta$ から

$$\int_{b}^{\phi(\rho)} f(x)dx = \int_{b}^{r} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\rho} f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad \cdots \quad ②'$$

仮定により、広義積分

$$\int_{b}^{\to a} f(x)dx = \lim_{r\to a+0}\int_{b}^{r} f(x)dx$$

が収束するから、任意の $\varepsilon>0$ に対し、

ある $\delta_1>0$ が存在し、$r-a<\delta_1$ ならば

$|\int_b^{\to a} f(x)dx-\int_b^r f(x)dx|<\varepsilon$ … ③'

とすることができる。

$$\int_{小}^{大} f(x)dx=-\int_{大}^{小} f(x)dx$$

$$\int_{\to a}^{b} f(x)dx=-\int_{b}^{\to a} f(x)dx$$

両辺の→a は、どちらも同じ $a+0$ を意味する。

また、$a=\lim_{t\to\beta-0}\phi(t)$ から、上の δ_1 に対し、ある $\delta>0$ が存在して、$\beta-\rho<\delta$ ならば、$r-a<\delta_1$ とすることができる。($a<\phi(\rho)\leqq b$ だから)

よって、③' に ②' を代入すれば、任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある $\delta>0$ が存在して

$\beta-\rho<\delta$ ならば、$|\int_b^{\to a} f(x)dx-(\int_\alpha^\rho f(\phi(t))\phi'(t)dt)|<\varepsilon$

したがって、$\lim_{\rho\to\beta-0}\int_\alpha^\rho f(\phi(t))\phi'(t)dt=\int_b^{\to a} f(x)dx=-\int_{\to a}^{b} f(x)dx$

すなわち広義積分 $\int_{\alpha+}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$ も収束して等式 ① が成立する。

逆については上の証明を真似ればよい。

次に、定理11．3、2)を変更して、$\int_{\to a}^{b} f(x)dx$ にすると

$a\in R$ で $f(x)=O((x-a)^\beta)$ ($x\to a+0$) で、$\beta>-1$ となる。実際、

$\int_u^c (x-a)^\beta dx=\left[\frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_u^c\to\frac{(c-a)^{\beta+1}}{\beta+1}$ ($u\to a+0$) が $\beta>-1$ で成立つ。

準備ができたので、例 6 にもどる。

$f:I=(0,\frac{\pi}{2}]\to R$ は任意の $t\in I$ に対し $[t,\frac{\pi}{2}]$ で連続なので可積分である。$g(x)=C(x-a)^\beta=C(x-0)^\beta$ とすれば、任意の $\beta>0$ に対し

$x^\beta \log\frac{\sin x}{x}=x^\beta\log\sin x-x^\beta\log x$ よって

$x^\beta\log\sin x=x^\beta\log x+x^\beta\log\frac{\sin x}{x}\to 0$ ($x\to+0$)

となる。そこで、$\beta=-\frac{1}{2}$ として

$x^{\frac{1}{2}}\log\sin x=x^{\frac{1}{2}}\log x+x^{\frac{1}{2}}\log\frac{\sin x}{x}$

$$\frac{\ell og\ sin\ x}{x^{-\frac{1}{2}}} \to 0\ (\ x \to +0\ )$$

よって、$x > 0$ で、$\ell og\ sin\ x = O((x-0)^{-\frac{1}{2}})$ （ $x \to +0$ ）

したがって、$\int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x$ は絶対収束する。そこで変数変換し、

$$I = \int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x\ dx$$

$t = \pi - x \ \to\ x = \pi - t \ \to\ \frac{dx}{dt} = -1$ $(0 \leqq \pi - t \to t \leqq \pi,\ \frac{\pi}{2} = \pi - t$

$\to t = \frac{\pi}{2})$

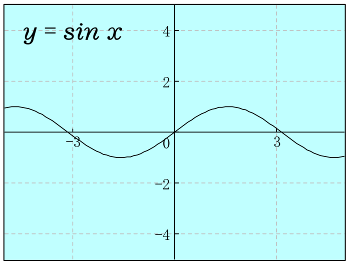
$$= \int_{\to \pi}^{\frac{\pi}{2}} -\ell og\ sin(\pi - t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to \pi} \ell og(sin\,\pi\,cos(-t) + cos\,\pi\,sin(-t))dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to \pi} \ell og(\,(-1) \times sin(-t)\,)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to \pi} \ell og(\,(-1)\times(-sin\ t)\,)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to \pi} \ell og\ sin\ t\ dt$$

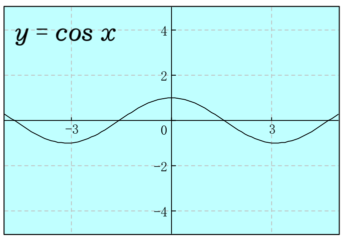
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to \pi} \ell og\ sin\ x\ dx \quad \cdots ①$$



$I = \int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x\ dx$ を変数変換して、$t = \frac{\pi}{2} - x$ とすると、$x = \frac{\pi}{2} - t$ となり

$\frac{dx}{dt} = -1$ $(0 \leqq \frac{\pi}{2} - t \to t \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} =$

$\frac{\pi}{2} - t \to t = 0)$



$$= \int_{\to \frac{\pi}{2}}^{0} -\ell og\ sin(\frac{\pi}{2} - t)dt$$

$$= \int_{0}^{\to \frac{\pi}{2}} \ell og\ sin(\frac{\pi}{2} - t)dt$$

$$= \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\{sin\frac{\pi}{2}cos(-t)+cos\frac{\pi}{2}sin(-t)\}dt = \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ cos(-t)dt$$

$$= \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ cos\ t\ dt\ = \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ cos\ x\ dx \quad \cdots ②$$

①、② より

$$I = \int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x\ dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to\pi} \ell og\ sin\ x\ dx = \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ cos\ x\ dx$$

$\int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\to\pi} \ell og\ sin\ x\ dx = \int_{\to 0}^{\to\pi} \ell og\ sin\ x\ dx = 2I$ なので

$$I = \frac{1}{2}\int_{\to 0}^{\to\pi} \ell og\ sin\ x\ dx$$

$y = 2x \ \to\ \dfrac{dy}{dx} = 2$ とすると

$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_\alpha^{\to\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$ も上と同様に証明できるので

$$I = \frac{1}{2}\int_{\to 0}^{\to\pi} \ell og\ sin\ y\ dy = \frac{1}{2}\int_{\to 0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin(2x)\cdot 2dx = \int_{\to 0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin(2x)dx$$

$$= \int_{\to 0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og(2sin\ x\ cos\ x)dx$$

$$= \int_{\to 0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ 2\ dx + \int_{\to 0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x\ dx + \int_{\to 0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ cos\ x\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ 2\ dx + \int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ell og\ sin\ x\ dx + \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \ell og\ cos\ x\ dx$$

$= \dfrac{\pi}{2}\ell og\ 2 + 2I$ （②より）

よって、$I = \dfrac{\pi}{2}\ell og2 + 2I$ を得る。

（P．295　定理12．1　Γ関数とB関数）

1）　Ⅲ章　（3．14）から $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^{-t}}{t^{-n}} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^n}{e^t} = 0$ だから、$e^{-t} = O(t^{-n})$ $(t\to+\infty)$

よって、$e^{-t}t^{x-1} = O(\ t^{x-n-1}\ )\ (\ t\to+\infty\ )$　となる。

そこで、$n > x$ となるような n をとれば

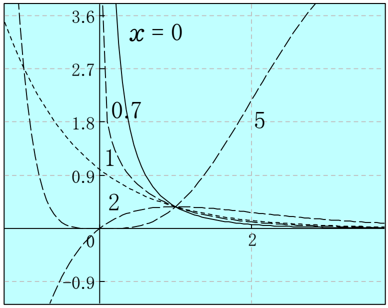
$x-n-1 < -1$ なので、定理11．3、1)

により、広義積分

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

は絶対収束する。つまり、$\int_1^{+\infty}$ では

任意の x に対して絶対収束する。



($x = 0$, 0.7 , 1 , 2 , 5 の $\Gamma(x)$)

残りは、$\int_0^1$ であるが

$1 > x > 0$ ならば $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ は $t = 0$ の近傍で有界ではないが e^{-t} は有界なので

$e^{-t}t^{x-1} = O(\,t^{x-1}\,)$ ($t \to +0$) である。したがって、定理11．3、2)より

$\beta = x-1$ と考え、$\beta > -1$ なので、広義積分

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

は絶対収束する。$x \geqq 1$ ならば $e^{-t}t^{x-1}$ は $[\,0\,,1\,]$ で連続なので、この積分は存在する。よって、$x > 0$ ならば、

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

は収束することになる。

$x = 0$ の場合は、$t \in [0\,,1]$ では

$$e-e^t = (\,1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\,)-(\,1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots\,)$$

$$= (1-t)+\frac{1}{2!}(1-t^2)+\frac{1}{3!}(1-t^3)+\cdots \geqq 0$$

よって、$e > e^t \to \dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{e^t}$ となるから、P. 291 例4 から

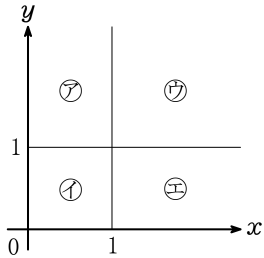
$$\int_{\to 0}^1 e^{-t}t^{-1}\,dt = \int_{\to 0}^1 \frac{1}{e^t t}\,dt \geqq \int_{\to 0}^1 \frac{1}{et}\,dt = \frac{1}{e}\int_{\to 0}^1 \frac{1}{t}\,dt = +\infty$$

$[1\,,\infty)$ で $e^{-t}t^{-1} > 0$ なので

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1}\,dt > \int_{\to 0}^{1} e^{-t}t^{-1}\,dt$$

したがって、$\Gamma(0)$ は発散する。

2)　$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$　（ $x > 0$, $y > 0$ ）について



$f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ は

㋒では連続関数なので積分は収束する。

㋐では $t = 0$ の近傍で有界ではない。

㋑では $t = 0$, $t = 1$ の近傍で有界ではない。

㋓では $t = 1$ の近傍で有界ではない。

(㋐の場合)($0 < x < 1$, $y \geqq 1$)

$$\frac{f(t)}{t^{x-1}} = \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}} = (1-t)^{y-1} \to 1 \ (\ t \to +0\ )$$

よって、$f(t) = O(\ t^{x-1}\ )$ ($t \to +0$)

この場合、$0 < x < 1$ なので、 $-1 < x-1 < 0$ したがって　$\beta > -1$ となり、定理11．3、2)から絶対収束する。

(㋓の場合)($1 \leqq x$, $0 < y < 1$)

$$\frac{f(t)}{(1-t)^{y-1}} = \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(1-t)^{y-1}} = t^{x-1} \to 1 \ (\ t \to 1-0\ )$$

よって、$f(t) = O((1-t)^{y-1}\ )$ ($t \to 1-0$)

この場合、$0 < y < 1$ なので、 $-1 < y-1 < 0$ したがって　$\beta > -1$ となり、定理11．3、2)から絶対収束する。

(㋑の場合)($0 < x < 1$, $0 < y < 1$)

$0 < y < 1$　から、$t = 0$ の近傍では $(1-t)^{y-1}$ は有界なので

$$\frac{f(t)}{t^{x-1}} = \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}} = (1-t)^{y-1} \to 1 \ (\ t \to +0\ )$$

よって、$f(t) = O(\ t^{x-1}\ )$ ($t \to +0$)

この場合、$0 < x < 1$ なので、 $-1 < x-1 < 0$ したがって $\beta > -1$ となり、定理11．3、2)から絶対収束する。

$0 < x < 1$ から、$t = 1$ の近傍では t^{x-1} は有界なので

$$\frac{f(t)}{(1-t)^{y-1}} = \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(1-t)^{y-1}} = t^{x-1} \to 1 \ (\ t \to 1-0\ )$$

よって、$f(t) = O((1-t)^{y-1})\ (\ t \to 1-0\ )$

この場合、$0 < y < 1$ なので、 $-1 < y-1 < 0$ したがって $\beta > -1$ となり、定理11．3、2)から絶対収束する。

以上で、$x > 0$, $y > 0$ で (12.2) が収束することがわかった。

◎ $x = 0$, $y > 0$ の場合は、$0 < y \leqq 1$ で収束しない。

$f(t) = (\ 1-t\ )^{y-1}$ として、$f\ '(t) = -(\ y-1\ )(\ 1-t\ )^{y-2} \geqq 0 \quad (\ 0 \leqq t \leqq 1\ )$

よって、$f(t)$ は $[0\ ,\ 1]$ で単調増加関数であり、$f(0) = 1$ なので、$(\ 1-t\ )^{y-1} \geqq 1$

故に、P. 291 例4 から

$$\int_0^1 t^{-1}(\ 1-t\ )^{y-1}\, dt \geqq \int_0^1 t^{-1}\, dt = +\infty$$

◎ $x > 0$, $y = 0$ の場合は、$0 < x \leqq 1$ で収束しない。

$f(t) = t^{x-1}$ として、$f\ '(t) = (\ x-1\ )t^{x-2} \leqq 0 \quad (\ 0 \leqq t \leqq 1\ )$

よって、$f(t)$ は $[0\ ,\ 1]$ で単調減少関数であり、$f(1) = 1$ なので、$t^{x-1} \geqq 1$

故に

$$\int_0^1 t^{x-1}(\ 1-t\ )^{-1}\, dt \geqq \int_0^1 \frac{1}{1-t}\, dt$$

ここで、$z = 1-t$ と変数変換すれば、$t = 1-z \ \to\ \dfrac{dt}{dz} = -1$ よって

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t}\, dt = -\int_1^0 \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{z}\, dz = +\infty$$

◎ $x = 0$, $y = 0$ の場合は、$0 \leqq t \leqq 1$ で $t > t^2$ なので

$$\int_0^1 t^{-1}(\ 1-t\ )^{-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t-t^2}\, dt \geqq \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = +\infty$$

したがって、$x>0$, $y>0$ としておく方が無難である。グラフ作成ソフトで確認することを勧める。微妙な差が収束につながっていることに気づくはずである。

（例）

① $y=x^{-0.9}(1-x)^{-0.9}$ ② $y=x^{-1}(1-x)^{-1}$ ③ $y=x^{-1}(1-x)^{-0.5}$ は $y=\dfrac{1}{x}$ と比べると、①が収束し、②、③が発散することがわかる。

④ $y=x^{-0.9}(1-x)^{-1}$ につては、$y=\dfrac{1}{1-x}$ と比べると発散することがわかる。

いずれにしても、部分的に拡大してみないとわからない。この紙面では限界がある。ある意味で<u>数学のすごさ</u>がわかるはずだ。

（P．297　定理12．2）

$(fg)' = f'g + fg' \quad \rightarrow \quad f'g = (fg)' - fg'$

$f' = e^{-t} \rightarrow f = -e^{-t}$

$g = t^{x} \rightarrow g' = xt^{x-1}$

1）$\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x}dx = \left[-e^{-t}t^{x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t}(-xt^{x-1})\,dt$

$= 0 - \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(-xt^{x-1})\,dt = x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = x\,\Gamma(x)$

3）

$\Gamma(x+2) = (x+1)\,\Gamma(x+1) = (x+1)x\,\Gamma(x)$

$\Gamma(x+3) = (x+2)\,\Gamma(x+2) = (x+2)(x+1)\,\Gamma(x+1) = (x+2)(x+1)x\,\Gamma(x)$

1）を n 回繰り返すと

$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\,\Gamma(x)$

6）$t = r^{2} \rightarrow \dfrac{dt}{dr} = 2r \rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2r}$

$2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^{2}}r^{2x-1}dr = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\times\frac{t^{x}}{r}\times\frac{1}{2r}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\times\frac{t^{x}}{t}\,dt$

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x)$

7) $t = \sin^2\theta \rightarrow \dfrac{dt}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-2}\theta\cos^{2y-2}\theta \times 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta$$

次に、$t = 1-s \rightarrow \dfrac{dt}{ds} = -1$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}\times(-1)\,ds$$

$$= \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds = \mathrm{B}(y,x)$$

(P. 297　定理12. 3)

$$\lim_{R\to+\infty} 4\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv$$

ここで、$f(u,v) = e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}$ は $[\,0\,,R\,]\times[\,0\,,R\,]$ で連続なので可積分

である。よって、定理7. 3から

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(2\int_0^R e^{-u^2}u^{2x-1}du\cdot 2\int_0^R e^{-v^2}v^{2y-1}dv\right)$$

定理12. 2, 6)より

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du \cdot 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}v^{2y-1}dv = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

後半に関しては

$f(u,v) > 0$ なので、$J_{R/\sqrt{2}} \leqq I_R \leqq J_R$ である。I_R は単調増加であり、上に有界な

ので収束する。また、$\lim_{R\to+\infty} J_{R/\sqrt{2}} = \lim_{R\to+\infty} J_R$ から

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \lim_{R\to+\infty} J_R = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

次に I_R を定理10. 1により極座標 ($u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$)で表せば

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \lim_{R\to+\infty} J_R = \lim_{R\to+\infty} 4\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv$$

$$= \lim_{R\to+\infty} I_R = \lim_{R\to+\infty} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R e^{-r^2}r^{2x+2y-2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta \cdot \lim_{R\to+\infty}\int_0^R 2e^{-r^2} r^{2x+2y-2} r dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta \cdot 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr$$

$$= B(x,y)\,\Gamma(x+y)$$

ここでは、定理12．2，6)、7)を使っているが、まだこの段階では2変数の広義積分が定義されていないので多少無理があるように感じる。

(P．298　例1)

($n = 2m$ ($m \in N$)の場合)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(m+1)}$$

$$= \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2m!} = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

($m = 3$ の場合　$2^3 \times 3! = 2\times1\times2\times2\times2\times3 = 2\times4\times6 = 6!!$)

($n = 2m+1$ ($m \in N$)の場合)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(m+1+\frac{1}{2})}$$

$$= m!\sqrt{\pi} \cdot \frac{2^{m+1}}{2\sqrt{\pi}\,(2(m+1)-1)!!} = \frac{2^m m!}{(2(m+1)-1)!!} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

(P．299　(12．4))

$s = e^{-t}$ とすれば　$\frac{1}{s} = e^t \to t = \log\frac{1}{s}$ ，$\frac{ds}{dt} = -e^{-t} = -s$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_1^0 s \cdot (\log\frac{1}{s})^{x-1} \cdot (-\frac{1}{s})\, ds = \int_0^1 (\log\frac{1}{s})^{x-1} ds$$

（P. 299 （12. 5)）

$$s=(b-a)t+a \to t=\frac{s-a}{b-a} \to 1-t=\frac{b-a-(s-a)}{b-a}=\frac{b-s}{b-a}$$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{b-a}\ ,\quad t=0 \to s=a\ ,\ t=1 \to s=b$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_a^b\left(\frac{s-a}{b-a}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{b-s}{b-a}\right)^{y-1}\cdot\frac{1}{b-a}\,ds$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{x+y-1}}\int_a^b(s-a)^{x-1}(b-s)^{y-1}ds$$

よって

$$\int_a^b(s-a)^{x-1}(b-s)^{y-1}ds=(b-a)^{x+y-1}\,\mathrm{B}(x,y)$$

（P. 299 （12. 6)）

$y>x>0$ ならば　$y-x>0$ である。

ここで $t=\dfrac{1}{1+s}$ とすれば $1-t=\dfrac{1+s-1}{1+s}=\dfrac{s}{1+s}$ ，$\dfrac{dt}{ds}=-\dfrac{1}{(1+s)^2}$

$t=0\ (\ s\to+\infty\ ),\ t=1\ (\ s=0\ )$

$$\mathrm{B}(y-x,x)=\int_0^1 t^{y-x-1}(1-t)^{x-1}dt$$

$$=-\int_{+\infty}^0\left(\frac{1}{1+s}\right)^{y-x-1}\cdot\left(\frac{s}{1+s}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{(1+s)^2}\,ds$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{y-x-1+x-1+2}}\,ds=\int_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{y}}\,ds$$

（P. 299 （12. 7)）

$x>y>0$ ならば　$x-y>0$ である。

$t=\dfrac{1}{1+s^x}$ とおけば、$1+s^x=\dfrac{1}{t}\to s^x=\dfrac{1-t}{t}\to s=\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{x}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{x}-1}\cdot\left(\frac{-t-1+t}{t^2}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1-x}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$s=0 \to t=1$, $s \to +\infty \to t=0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{y-1}}{1+s^x} ds = \int_1^0 t \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{x}(y-1)} \cdot \frac{1}{x}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1-x}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{y-1+1-x}{x}} dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{y-x}{x}} dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^1 t^{-(\frac{y-x}{x}+1)}(1-t)^{\frac{y-x}{x}} dt = \frac{1}{x}\int_0^1 t^{-\frac{y}{x}}(1-t)^{\frac{y}{x}-1} dt$$

$$= \frac{1}{x} \mathrm{B}(1-\frac{y}{x},\frac{y}{x}) = \frac{1}{x} \mathrm{B}(\frac{y}{x},1-\frac{y}{x}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\Gamma(\frac{y}{x})\Gamma(1-\frac{y}{x})}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{x}\Gamma(\frac{y}{x})\Gamma(1-\frac{y}{x})$$

(P. 299 半径 a の n 次元球の体積 $V_n(a)$)

命題10. 4と定理10. 5から

$$V_n(a) = \int\cdots\int_{V_n(a)} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int\cdots\int_I r^{n-1} sin^{n-2}\theta_1 \cdots sin\,\theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$$

$$= \int_0^a \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{n-1} sin^{n-2}\theta_1 \cdots sin\,\theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$$

$$= \int_0^a r^{n-1} dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \cdot \int\cdots\int_0^\pi sin^{n-2}\theta_1 \cdots sin\,\theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2}$$

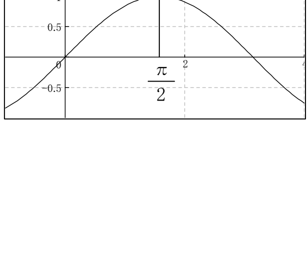
$$= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot \int\cdots\int_0^\pi sin^{n-2}\theta_1 sin^{n-3}\theta_2 \cdots sin\,\theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2}$$

ここで、定理12. 4、2)を使うために工夫すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sin\,x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(sin\,x)\,dx$$ から

$$\int_0^\pi sin^k\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^k\theta\, d\theta$$ なので

$$= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot 2^{n-2} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^k\theta\, d\theta$$



$$= \frac{2\pi a^n 2^{n-2}}{n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{2+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{2}{2}+1)} \cdots \frac{\Gamma(\frac{n-2+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n-2}{2}+1)}$$

$$= \frac{2\pi a^n 2^{n-2}}{n} \cdot \frac{\Gamma(1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{4}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{4}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{4}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$= \frac{2\pi a^n 2^{n-2}}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}\times(n-2)}}{2^{n-2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\pi a^n}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

定理12．2，1)から、$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ なので、$\Gamma(\frac{n}{2}+1) = \frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$ となり

$\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{2}{n}\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ を代入すると

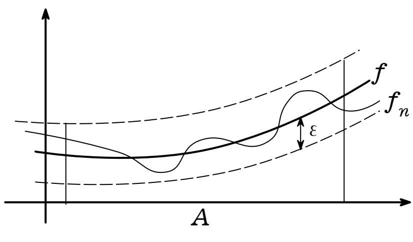
$$= \frac{2\pi a^n}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{n}{2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

$\frac{dV_n(a)}{da} = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} a^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ となり、n 次元球の表面積と考えられる。実際 $n = 3$ を代入すると、$\Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ なので

$$\frac{dV_3(a)}{da} = \frac{3\pi^{\frac{3}{2}} a^{3-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 3\pi\sqrt{\pi}\,a^2 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 4\pi a^2$$

（P.302　関数列の一様収束のイメージ）

A 上の関数列（ f_n ）$_{n\in N}$ が f に A 上一様収束するイメージは右図の様になる。つまり、x を A の中でどんなに動かしても $|f(x)-f_n(x)|$ の値が ε を超えな



いことを意味する。これを式で表すと

すべての $x \in A$ について、$|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$

このことをもう少し表現を変えると、$\underset{x \in A}{Max}\ |f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$ としたくなるが、最大値が存在しない場合もあるので sup とする。そのかわり、最小上界なので、$\sup_{x \in A} |f(x)-f_n(x)| \leqq \varepsilon$　←（ = が付く）

（参考）A のすべての元 x について、$x < a$ なら、$sup\ A \leqq a$ である。なぜなら、$sup\ A > a$ だとしたら、a は A の一つの上界であり、$sup\ A$ が最小上界であることに反する。よって、$sup\ A \leqq a$ である。

（P.302　定義1　一様ノルム）

集合 A 上で定義され R^m の値をとる有界関数全体の集合を $B(A,R^m)$ と記す。

各 $f \in B(A,R^m)$ に対して

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

を f の一様ノルムという。

A 上の関数列 $(f_n)_{n \in N}$ が f に A 上一様収束するとは、

$$\lim_{n \to \infty} \|f-f_n\| = 0$$

となることと定義する。

ここで注意したいことは、十分大きなすべての n に対して $f-f_n \in B(A,R^m)$ であって、$f, f_n \in B(A,R^m)$ というわけではない。有界でなければ、上限の存在が保証されないからである。

（P.305　関数列の各点収束と一様収束の違い）

論理記号で表せば

（各点収束）

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in A)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(\ n \geqq n_0 \Rightarrow |f(x)-f_n(x)| \leqq \varepsilon\ )$$

（一様収束）

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall x \in A)(\forall n \in N)(\ n \geqq n_0 \Rightarrow |f(x)-f_n(x)| \leqq \varepsilon\ )$$

各点収束の場合は n_0 が ε と x によって決まればよいが、一様収束では ε によってのみ n_0 が決まるとしている。

上の流れがあるからかもしれないが、$|f(x)-f_n(x)| \leqq \varepsilon$ の ≦ が気になる。≦ と ＜ の違いは大きい。$0 < a$ とすれば、$0 < r < a$ となる実数 r が存在するが、$0 \leqq a$ では、a が 0 の可能性もあるので $0 < r < a$ とおけない。このことは証明において不自由である。（私だけかも？）

（P.305 例4）

$|e^{-tx}-1| \leqq |e^{-t}-1|$ について、

$f(x) = e^{-x}-1 \leqq 0$ （$0 \leqq x \leqq 1$）

$f'(x) = -e^{-x} \leqq 0$

ゆえに、単調減少である。つまり、$x < y$ ならば $f(x) > f(y)$

よって、$tx < t$ なので $0 \geqq e^{-tx}-1 > e^{-t}-1 \to |e^{-tx}-1| < |e^{-t}-1|$

（P.305 (13.10)）

任意の $\varepsilon > 0$ に対し b の T 近傍 U が存在して、$t \in U$ ならば $\|f-f_t\| < \varepsilon$ となるとき、f に A 上一様収束するという。

これで一様収束の定義が他書と同じになったが、$\leqq \varepsilon$ から $< \varepsilon$ となった。確かに任意の ε 対し、$\varepsilon' < \varepsilon$ となるような ε' をとり、ε' に対する b の T 近傍 U が存在して、$t \in U$ ならば $\|f-f_t\| \leqq \varepsilon'$ とすることができれば、$\|f-f_t\| < \varepsilon$ なので問題はないが、気になる。

（P.305 定理13．3）

定理13．1系1のために、f_t を $f(x,t)$ とおく。

（証明）任意の $a \in A$ をとり、f が a で連続であることを示す。

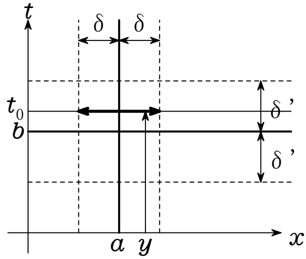
$f(x,t)$ が $b \in \overline{T}$, $t \to b$ のとき f に一様収束するから、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、b の T 近傍 $U(b, \delta') \cap T$ が存在して、任意の $x \in A$ に対し

$t \in U(b, \delta') \cap T \Rightarrow \|f(x)-f(x,t)\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ。

いま $t_0 \in U$ を一つとれば、仮定により $f(x,t_0)$ は a で連続だから、ある $\delta > 0$ が存在して

$y \in U(x, \delta) \cap A \Rightarrow |f(t_0,y) - f(t_0,a)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

が成り立つ。



（$n = 1$の場合）

そこで、任意の $y \in U(a, \delta) \cap A$ に対して

$|f(a) - f(y)| \leqq |f(a) - f(a,t_0)|$

$+|f(a,t_0) - f(y,t_0)| + |f(y,t_0) - f(y)|$

$\leqq \sup\limits_{x \in A} |f(x) - f(x,t_0)| + \dfrac{\varepsilon}{3} + \sup\limits_{y \in A} |f(y,t_0) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

が成り立つ。これは f が a で連続であることを示す。

（P.306　例6）

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$a = x^2 + 1$　とすれば　$x^2 = a - 1$　よって

$$s_n = (a-1)\{1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^n}\}$$

$$as_n = (a-1)\{a + 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^{n-1}}\}$$

下の式から上の式を両辺引くと

$$s_n(a-1) = (a-1)(a - \frac{1}{a^n}) \quad \rightarrow \quad s_n = a - \frac{1}{a^n}$$

よって、$a = x^2 + 1 \geqq 1$　ならば　$x^2 + 1$ に各点収束する。よって、$f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$$

とすれば、この級数は R で f に各点収束する。しかし、0 を含む任意の長さ > 0 の区間上で一様収束しない。$a = x^2 + 1$ だったので

$f_n(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$　なので　$|f(x) - f_n(x)| = \left|\dfrac{1}{(x^2+1)^n}\right|$　となり

$\sup\limits_{x \in R} |f(x) - f_n(x)| \geqq 1$ から一様収束しないことがわかる。

(P.306 $\lim_{x\to a}\lim_{t\to b} f(x,t) = \lim_{t\to b}\lim_{x\to a} f(x,t)$)

定理13．3から $\lim_{x\to a}\lim_{t\to b} f(x,t) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

任意の $x \in A$ に対し $\lim_{t\to b} f(x,t) = f(x)$ に一様収束し、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ は上の結果から f が a で連続だからである。また、$\lim_{t\to b}\lim_{x\to a} f(x,t) = \lim_{t\to b} f(a,t) = f(a)$ は $f(x,t)$ が任意の $a \in A$ で連続なので $\lim_{x\to a} f(x,t) = f(a,t)$ となり、任意の a に対し $t \to b$ のとき、$f(a,t)$ は $f(a)$ に一様収束するので $\lim_{t\to b} f(a,t) = f(a)$ となる。

つまり、$\lim_{x\to a}\lim_{t\to b} f(x,t) = \lim_{t\to b}\lim_{x\to a} f(x,t)$ となる。

(P.306 定理13．3系1)

ここでは $f(x,t)$ が連続であることを仮定しない。

ｉ)の仮定は定理13．3と同じである。ⅱ)については、任意の $t \in T$ に対し、各点収束の意味で $\lim_{x\to a} f(x,t)$ が存在する。したがって、t の関数とみてそれを $g(t)$ とおく。ⅲ)は 3つの極限が $\lim_{x\to a} f(x)$ に収束することにつなげるためにある。

このとき次の等式が成り立つ。

$$\lim_{x\to a}\lim_{t\to b} f(x,t) = \lim_{t\to b}\lim_{x\to a} f(x,t) = \lim_{(x,t)\to(a,b)} f(x,t)$$

(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、仮定ｉ)により b の T 近傍 $V = U(b,\delta)\cap T$ が存在して、任意の $x \in A$ に対し

$$t \in U(b,\delta)\cap T \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x,t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ。$t \in V$ を任意に一つ固定するとき、仮定ⅱ)により、ある δ' が存在して、(δ' は a に依存している。) $U(a,\delta')\cap A = U_1$ としたとき

$$x \in U_1 \ \Rightarrow |f(x,t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ。また、ⅲ)により、ある δ'' が存在して、(δ'' は a に依存している。) $U(a,\delta'')\cap A = U_2$ としたとき

$$x \in U(a,\delta'')\cap A \ \Rightarrow |c - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

そこで、任意の $t \in V$ に対し、$x \in U_1 \cap U_2$ を一つ選んでおくと、δ', δ'' は a のみに依存しているので、上の三つの不等式から、

$$|c-g(t)| \leqq |c-f(x)|+|f(x)-f(x,t)|+|f(x,t)-g(t)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となる。

仮定から $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{t\to b} f(x,t) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ また上の結果から、

$\lim\limits_{t\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = \lim\limits_{t\to b} g(t) = c$ よって、$\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{t\to b} f(x,t) = \lim\limits_{t\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,t)$ となる。

また任意の $t \in V$, $x \in U_1 \cap U_2$ に対して

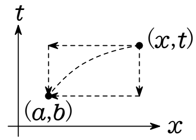
$$|c-f(x,t)| \leqq |c-f(x)|+|f(x)-f(x,t)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

なので、$\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{t\to b} f(x,t) = \lim\limits_{t\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = \lim\limits_{(x,t)\to(a,b)} f(x,t) = c$ となる。

図で示すと、$n = 1$ の場合だが

$(x,t)\to(a,b)$ は $x \to a$ かつ $t \to b$

だったので、右図のようになる。



（P.308　例7）

$a > 0$ で $x \in [-a\ ,0]$ のとき

$t = -s$ と置けば $\dfrac{dt}{ds} = -1$ なので $y = -x$ ($0 \leqq y \leqq a < 1$) として

$t = 0 \to s = 0$, $t = x \to s = -x$ なので

$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right| = \left|-\int_0^{-x} \frac{s^n}{1-s}ds\right| = \left|\int_0^y \frac{s^n}{1-s}ds\right| = \int_0^y \frac{s^n}{1-s}ds$$

$$\leqq \frac{1}{1-a}\int_0^y s^n ds = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{(1-a)(n+1)}$$

$|R_n(x)| = \displaystyle\int_0^y \frac{s^n}{1-s}ds$ は $s \in [0\ ,y]$ で $\dfrac{s^n}{1-s} \geqq 0$ なので、y が 1 に近づくほど、したがって、a が 1 に近づくほど $\|R_n(x)\|_{I_a}$ は大きくなる。

（P.308　定理13．4）

$a) \to b)$

$\| f_t - f_s \| \leqq \| f_t - f \| + \| f - f_s \|$ について

$a)$ から $f - f_t$ が有界なので、$\| f_t - f_s \| = \| f_t - f + f - f_s \|$ と命題13．1, 1) から明らかである。

$b) \to a)$

(13.5) により、任意の $x \in A$ に対し $| f(x) | \leqq \| f(x) \|$ なので

$| f_t - f_s | \leqq \| f_t - f_s \| < \varepsilon$ となり、I 章定理6．10をみたす。よって、$\lim_{t \to b} f_t(x)$ が存在する。したがって、任意の $x \in A$ に対し存在するので、それを $f(x)$ とすればよい。

（P.309　例8）

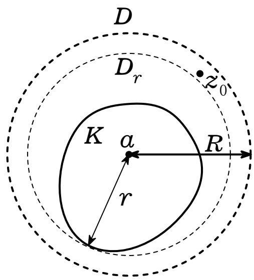
$0 \leqq r < R$ で $K \subset D_r = \{ z \mid |z-a| \leqq r \}$ としたとき

任意の $z \in D_r$ に対し

$| a_n(z-a)^n | = |a_n|\ |z-a|^n = |a_n|\ |z_0-a|^n \left| \dfrac{z-a}{z_0-a} \right|^n$

$\leqq M\left(\dfrac{r}{|z_0-a|} \right)^n$

$r < |z_0-a| < R$ なので、$\dfrac{r}{|z_0-a|} = \rho < 1$ となる。



（P.310　定理13．7）

$\left| \int_a^x g(u)du - \int_a^x f_t'(u)du \right| \leqq \int_a^x | (g(u) - f_t'(u)) | du \leqq \| g - f_t' \|\ |x-a|$

$\leqq \| g - f_t' \|\ (b-a)$

任意の $x \in I$ であり、$c)$ より、$(f_t')_{t \in T}$ は $t \to c$ のとき g に一様収束するので

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、c の T 近傍 U が存在して

$t \in U \Rightarrow \| g - f_t' \|\ (b-a) \leqq (b-a)\varepsilon$

よって、$\int_a^x f_t'(u)du$ は $\int_a^x g(u)du$ に一様収束する。

（P　311　例10　熱方程式）

最初に注意しておきたいことは、定理13．7、定理13．7系は一次元区間上で定義された関数族を仮定している点である。しかし、この例の I は二次元であることを忘れてはいけない。x , t による偏微分になっているのもそのためである。

(13.16)　　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ をみたす $u(x,t)$ を求める。

(13.17)　　$u_n(x,t) = a_n e^{-n^2 t} \sin nx \ (n \in N)$ は (13.16)をみたす。

実際 $\dfrac{\partial u_n}{\partial t} = -n^2 a_n e^{-n^2 t} \sin nx$　　… ①

$\dfrac{\partial u_n}{\partial x} = n a_n e^{-n^2 t} \cos nx$

$\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = n^2 a_n e^{-n^2 t}(-\sin nx) = -n^2 a_n e^{-n^2 t} \sin nx$　　… ②

また、境界条件 $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ をみたす。

(13.16)は線形同次方程式であり、①②より、(13.17)の任意の有限和 $g_m = \sum_{n=1}^{m} u_n$ $= a_1 e^{-t} \sin x + a_2 e^{-4t} \sin 2x + \cdots + a_n e^{-n^2 t} \sin nx$ もまた(13.16)をみたす。

そこで、$(a_n)_{n \geqq 1}$が**有界という仮定**のうえで、無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が項別微分できることを定理13．7の $a)$, $b)$, $c)$ の順で示す。

$|a_n| \leqq M$ （$\forall n \in N$） とする。

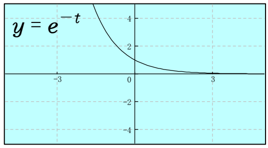
$a)$ $(g_m)_{m \in N}$ $(m \to \infty)$ は $I = [0, \pi] \times (0, +\infty)$ 上で各点収束する。

なぜなら、$\forall x \in [0, \pi], \forall t_0 > 0$ に対し $I_0 = [0, \pi] \times [t_0, +\infty)$ とし、$t \geqq t_0$ とする。Ｉ章定理6．11より、ｉ）すべての n に対し、u_n が I_0 で連続であることは明きらかである。ⅱ）各 n に対し定数 $L_n \geqq 0$ があり、すべての $(x、t) \in I_0$ に対し $|u_n(x,t)| \leqq L_n$ が成り立つ。なぜなら、

$|u_n(x,t)| = |a_n e^{-n^2 t} \sin nx| \leqq M e^{-n^2 t_0}$ であり（e^{-t} は単調減少関数だから）

$M e^{-n^2 t_0} = L_n$ とすればよい。

ⅲ)については、P. 115 (4.1) から



$L_n \div (\frac{1}{n^2}) = \frac{Mn^2}{e^{n^2 t_0}} \leqq 1$ （ $n > \exists n_0$ ）

したがって、$L_n \leqq \frac{1}{n^2}$ （ $n > \exists n_0$ ） I 章　定理5. 5、1)により、

$\sum_{n>n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するので、$\sum_{n>n_0}^{\infty} L_n$ は収束し、$\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ も収束する。　… ③

よって、定理6. 11から $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は各点収束し、それを u とおけば、u は I_0 上で連続である。$t_0 > 0$ は任意だったので、I で各点収束し連続となる。

b) 各 $g_m = \sum_{n=1}^{m} u_n$ は I で t について C^{∞} 級は明らかである。

c) $\frac{\partial g_m}{\partial t} = \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial u_n}{\partial t}$ （ $m \to \infty$ ）は、$\forall t_0 > 0$ に対し $I_0 = [0, \pi] \times [t_0, +\infty)$ 上で一様収束する。

なぜならば、$t \geqq t_0$ ならば

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) \right| = \left| -n^2 a_n e^{-n^2 t} \sin nx \right| \leqq Mn^2 e^{-n^2 t_0}$$

そこで、 $Mn^2 e^{-n^2 t_0} = M_n$ とすれば

定理13. 5(ワイヤストラスの M テスト) ⅰ)すべての $n \in N$ に対し

$$\sup_{(x,t) \in I_0} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leqq M_n$$

次に、$e^{-n^2} \div \frac{1}{n^4} = \frac{n^4}{e^{n^2}} \to 0$ ($n \to \infty$) (P. 115 (4.1))から、

$M_n \div \frac{1}{n^2} = Mn^2 e^{-n^2 t_0} \div \frac{1}{n^2} = \frac{Mn^4}{e^{n^2 t_0}} \leqq 1$ （ $n > \exists n_0$ ） ③と同様に、$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する。 よって、

ⅱ)をみたし、I_0 上一様収束する。つまり、t_0 は任意なので広義一様収束することになる。そこで、項別微分定理(定理13. 7系)により

(13.19) $\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$ 　が成り立つ。

ここまでの議論は、任意の $x\in[0\ ,\ \pi]$ を一つ固定し t の一変数の関数として定理を使ってきた。次は、t を一つ固定し、x の一変数の関数として進める。

まず、I_0 で $\sum \dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ が一様収束することを示す。

a) g_m（$m\to\infty$）は x の関数として、u に I_0 上各点収束し連続である。

定理6．11のｉ）すべての n に対し $u_n = a_n e^{-n^2 t}\sin nx$ が x の関数として I_0 で連続であることは明らかである。

ⅱ）$|\,u_n(x,t)\,| = |\,a_n e^{-n^2 t}\sin nx\,| \leqq Me^{-n^2 t_0}$ であり $L_n = Me^{-n^2 t_0}$ とすればよい。

ⅲ）$\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ は収束する。

よって、u は x の関数として I_0 上各点収束し連続である。

b) u_n は I_0 上 x ついて C^{∞} 級である。

c) $I_0 = [0\ ,\ \pi]\times[t_0\ ,\ +\infty)$ において $t\geqq t_0$ ならば

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| = |\,na_n e^{-n^2 t}\cos nx\,| \leqq Mne^{-n^2 t_0} \leqq Mn^2 e^{-n^2 t_0} = M_n$$

つまり、M テストのｉ）任意の n に対し

$\sup\limits_{(x,t)\in I_0}\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leqq M_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束するので ⅱ）が成り立つ。よって、同様に I_0 で一様収束する。項別微分定理（定理13．7）により

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial x}$$ となる。

また、*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ は $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ に I_0 上一様収束するので各点収束する。

b) $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ は I_0 上 x について C^{∞} 級

c) については、同様にして

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| = |\,-n^2 a_n e^{-n^2 t}\sin nx\,| \leqq Mn^2 e^{-n^2 t_0} = M_n$$

となり、項別微分定理により

(13.20) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ となる。

したがって、(13.19) , (13.20) と、u_n が (13.16) をみたすことから、u も (13.16) をみたすことがわかる。

ここまでは、$u_n = g(x)h(t)$ として、x と t が完全に独立しているという前提で進めてきた。確かに、いつ何時実験しても同じ結果が得られるとしたならば自然な考え方かもしれない。変数分離法に似ている。

以下原文の流れにそって進めるが、詳しくは他書に譲ることにする。

このように解 u_n を重ね合わせて u を作る目的の一つは、与えられた関数 f で初期条件

(13.21) $u(x,0) = f(x)$

をみたす解を作ることにある。ここで、$f(x)$ は、時刻 $t = 0$ における温度分布を表す。f は(13.18) と両立するために

(13.22) $f(\pi) = f(0) = 0$

をみたさなければならない。f がこの条件をみたす C^1 級関数ならば、熱方程式 (13.16) の解 $u(x,t)$ で、境界条件 (13.18) 、初期条件 (13.21) をみたすものが唯一つ存在することが知られている。そのような u は

(13.23) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin nx$

という形で、係数 a_n を

(13.24) $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

によって定めたものに他ならない。実際

(13.24) で $f' = \sin nx$, $g = f(x)$ として、部分積分を一回すると

$f = \dfrac{-\cos nx}{n}$ なので $\int f'g = fg - \int fg'$（公式）から

$|a_n| = \dfrac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\right|$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \left[-\frac{f(x)\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx \right|$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left| -f(\pi)\cos n\pi + f(0)\cos 0 + \int_0^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx \right|$$

$$\leqq \frac{2}{n\pi}\{ |f(\pi)| + |f(0)| + \pi \| f' \| \} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

f は C^1 級なので、f' は連続、つまり、$[0, \pi]$ で有界なので、$(a_n)_{n\in N}$ は有界であることがわかる。したがって、(13.23) は (13.16) , (13.18) をみたし、さらにこのときフーリエ級数の理論によって

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = f(x) \quad (x\in[0, \pi])$$

となることが証明されるようだ。

(P 313 定理13. 8)

$n(x)$ は $n(\varepsilon, x)$ 、$\delta(x)$ も $\delta(\varepsilon, x)$ であって、ε と 各 x に依存している。ところが K はコンパクトなので、

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U(x_k, \delta(\varepsilon, x_k))$$

そこで、どんな $x\in K$ を選んでも、どれかの $U(x_k, \delta(\varepsilon, x_k))$ に含まれているはずである。このとき、どの x_k で、$\delta(\varepsilon, x_k)$ が何であるかを知る必要はない。

また、$n_0 = Max\{ n(\varepsilon, x_1), \cdots, n(\varepsilon, x_k)\}$ だったので、n_0 は $\varepsilon, x_1, \cdots, x_k$ には依存するが、x には無関係である。つまり、

$n \geqq n_0$ ならば $0 \leqq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ となることは、x に関係なく成り立つので一様収束することになる。

(P 315 例11の前の準備)

$A = [0, 1)$ として、$\forall t\in A$ に対し $f(t) = g(t)$ とする。そのとき、$\lim_{t\to 1-0} f(t) = a$, $\lim_{t\to 1-0} g(t) = b$ ならば $a = b$ である。

(証明)

$\lim_{t\to 1-0} f(t) = a$ なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta_1 > 0$ が存在し

$1-t<\delta_1$ となるすべての $t\in A$ に対し $|f(t)-a|<\varepsilon$ とすることができる。

同様に、ある $\delta_2>0$ が存在し、

$1-t<\delta_2$ となるすべての $t\in A$ に対し $|g(t)-b|<\varepsilon$ とすることができる。

よって、$\delta=Min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ とすれば、$1-t<\delta$ となるすべての $t\in A$ に対し

$|a-b|=|a-f(t)+f(t)-b|=|a-f(t)+g(t)-b|$

$\leqq|a-f(t)|+|g(t)-b|<2\varepsilon$

$\varepsilon>0$ は任意なので、$a=b$ となる。

（P　315　例11）

(13.28)　　$$Arcsin\ x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ ←(P.201 (4.31))

が $[-1,1]$ で成り立つ。(13.28) つまり、右辺は左辺に各点収束する。任意の $x\in[0,1]$ に対して正項級数だから部分和の列 $(s_n(x))_{n\in N}$ は単調増加列であり、極限が連続関数 $Arcsin\ x$ である。したがって、ディニの定理より、(13.28)の右辺は $[0,1]$ で一様収束することがわかる。

そこで、$\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists n_0\ \forall x\in[0,1],\ n\geqq n_0\rightarrow|Arcsin\ x-s_n(x)|<\varepsilon$ が成り立つ。

ここで、$M(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ とすれば、$M(x)$ は $[0,1]$ で広義可積分である。

実際、$x=sin\,\theta$ とすれば、$\dfrac{dx}{d\theta}=cos\,\theta$, $0=sin\,\theta\rightarrow\theta=0$, $sin\,\theta\rightarrow1$ のためには、$\theta\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$ とすればよいので

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\int_0^t d\theta=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}t=\frac{\pi}{2}$$ となり、広義積分可能である。

そこで、(13.28) の両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ をかけた級数を考える。

定理13．9　ｉ）$0<t<1$, $[0,t]$ を A とする。$M(x)$ は連続関数なので、A 上可積分であり、$M(x)\geqq0$ である。ⅱ）$n\rightarrow\infty$のとき

$(s_n(x))\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は A 上可積分の $Arcsin\ x\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ に各点収束する。

ⅲ）任意の ε > 0 に対し　$\exists n_0, \forall x\in[0,1]$, $n\geqq n_0\rightarrow|\,Arcsin\ x-s_n(x)\,|<\varepsilon$

なので、$\forall x\in[0,t]$ に対し、

$\left|\,(s_n(x))\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-Arcsin\ x\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\right|\leqq\varepsilon M$　となる。

よって、A 上で項別積分でき

① $$\int_0^t\frac{Arcsin\ x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{1}{(2n+1)}\times\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

そこで、$t\ \rightarrow\ 1$　の場合を考える。

①の左辺

$s=Arcsin\ x$ とおく、$x=sin\ s\rightarrow\dfrac{dx}{ds}=cos\ s=\sqrt{1-x^2}$

$0=sin\ 0$, $t=sin\ \theta_t$ とする。①の左辺は

$=\displaystyle\int_0^{\theta_t}s\,ds=\frac{1}{2}\theta_t^2$　　　したがって、$\theta_t\ \rightarrow\ \dfrac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ t\ \rightarrow\ 1$　なので

①の左辺は　$t\ \rightarrow\ 1$　のとき、$\dfrac{\pi^2}{8}$ となる。

①の右辺　少しやっかいである。そこで、本文Ⅳ章§5の例7を利用する。

$\displaystyle\int_0^t\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　で　$x=sin\ \theta$　とおく　$\dfrac{dx}{d\theta}=cos\ \theta$, $t=sin\ \theta_t$　とすると

$=\displaystyle\int_0^{\theta_t}sin^{2n+1}\theta\ d\theta$　となる。　$\theta_t\ \rightarrow\ \dfrac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ t\ \rightarrow\ 1$　なので

$$\lim_{t\to1}\int_0^t\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\theta_t\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\theta_t}sin^{2n+1}\theta\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n+1}\theta\ d\theta$$

$=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$　となる。

よって、　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{1}{(2n+1)}\times\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{1}{(2n+1)} \times \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{1}{(2n+1)} \times \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

①と上の準備で証明したことから

(13.29) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

を得る。また、I 章P. 25例6より、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するので、その和を S とおけば

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$$

つまり、 $S = \frac{\pi^2}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$ がわかる。（オイラーの証明から）

（定理13．5を適用する場合は $x = 1$ で収束することは、P．201の下から7行目に対するラーベの判定法を参照せよ。）

（P．317　定理14．1）

P．304 の関数族 $(f_t)_{t \in T}$ も $A \times T$ 上で定義された二変数関数 $f(x, t)$ として考えたが、t がパラメータであることにはかわりはない。しかし、ここでは、$t \to b$ のときの極限関数の性質を調べるのではなく、t についての微積の順序について述べているのである。証明については簡単だがややこしい。

$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ が K で連続であることから定理9．9系を使うことができ、$\frac{\partial f}{\partial t}$ の存在を認めているので f は I で微分可能であり、$\frac{\partial f}{\partial t}$ が K で連続（つまり I で連続）であるから可積分ということで定理5．3，1）を使っている。また、定理5．3，2）から $G(t)$ が I 上で連続なので可積分となり、当然一点 $s \in I$ で連続なので、s で微分可能としている。

（P. 318　例1）

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}\qquad(a>0\,,\,b>0)$$

$t=\tan x$ とすれば $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2x}\ \rightarrow\ dx=\cos^2x\,dt$　だから

$$J=\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{a+bt^2}\cos^2x\,dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{a+bt^2}dt=\frac{1}{b}\int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{a}{b}+t^2}\,dt$$

Ⅳ章表5．1の公式3から

$$=\frac{1}{b}\left[\sqrt{\frac{b}{a}}Arctan\sqrt{\frac{b}{a}}\,t\right]_0^{\infty}=\frac{1}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\ \cdots ①$$

定理14．1 , 2)より、a 、b のどちらかを固定し、$\dfrac{1}{a\cos^2x+b\sin^2x}$ を x と a の関数とみれば $f(x\,,\,a)$ 、x と b の関数とみれば $f(x\,,\,b)$ である。まず、b を固定して、$f(x\,,\,a)$ とみて、a を含む有界閉区間を I とし、$x\in[\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\,]=A$ とおく

$f(x\,,\,a)$ は $a>0$ なので $I\times K$ 上連続である。

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\qquad\leftarrow\ ①より$$

$(\dfrac{f}{g})'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ なので

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{-\cos^2x}{(a\cos^2x+b\sin^2x)^2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial a}$ は $a>0$ なので $I\times A$ で連続である。

$$F'(a)=\frac{\pi}{2\sqrt{b}}\cdot(a^{-\frac{1}{2}})'=\frac{\pi}{2\sqrt{b}}\cdot(-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}})=-\frac{\pi}{4\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

$$=-\frac{\pi}{4a\sqrt{ab}}$$

定理14．1 , 2) から　$F'(a)=-\dfrac{\pi}{4a\sqrt{ab}}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos^2x}{(a\cos^2x+b\sin^2x)^2}dx$

次に、$f(x\,,\,b)$ を x と b の関数とみて、同様なことをすれば

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-\sin^2 x}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}$$

また、同様にして、 $F'(b) = -\dfrac{\pi}{4b\sqrt{ab}}$ を得る。よって、定理14．１，2）から

$$F'(b) = -\frac{\pi}{4b\sqrt{ab}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 x}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}\, dx = \frac{\pi}{4a\sqrt{ab}} + \frac{\pi}{4b\sqrt{ab}} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

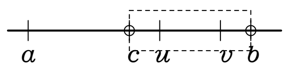
（P．318　定義1の注意）

この定義では、$D = [\,a\,,b\,)$ を R の区間、I を一つの集合とし、$D \times I$ 上の関数 $f(\,x\,,t\,)$ が、任意の $u \in D = [\,a\,,b\,)$ に対し、x について $[\,a\,,u\,]$ で可積分としているが、I は $I \subset R^n$ でも良いことになっている。しかし、定理14．3以降は定理13．6を使用するため R^1 になっていることに注意したい。

また、ここから、定理14．1での x と t の立ち位置が変わるので注意したい。

$x \in D = [a\,,b)$ で $t \in I \subset R^n$ である。したがって、$\| F - F_u \| = \sup\limits_{t \in I} | F - F_u |$ である。I は区間のイメージが強く混乱しやすい。

（P．319　定理14．2）



コーシーの収束条件にある b 近傍は右図の様なイメージである。$[\,a\,,b\,) = B \subset A = [\,a\,,b\,]$ とし、b の近傍 U があって、 $u\,,v \in U \cap B$ と考えればよい。

（P．319　例2）

$F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx$ （$n \geqq 0$）は $t > 0$ で広義一様収束する。

実際　$x \geqq 0$ で　$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots > \dfrac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$

$tx^2 = x$（$x > 0$）とおくと

$$e^{tx^2} > \frac{(tx^2)^{n+1}}{(n+1)!} \;\rightarrow\; e^{-tx^2} < \frac{(n+1)!}{(tx^2)^{n+1}} \;\rightarrow\; e^{-tx^2} x^{2n} < \frac{x^{2n}(n+1)!}{(tx^2)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{t^{n+1}x^2}$$

よって、$\dfrac{\dfrac{e^{-tx^2}x^{2n}}{(n+1)!}}{t^{n+1}x^2} < 1$ となり、定理11．3，1)により、$b=+\infty$，$\alpha=-2$ なので

$e^{-tx^2}x^{2n}=O(x^{-2})$ ($x\to+\infty$) から絶対収束する。つまり、この広義積分は収束する。後は一様収束するかである。

任意の $t>0$ で収束するので、任意の t_0 を一つ固定すれば、$t_0\leqq t$ のとき

$0\leqq f(x,t)\leqq f(x,t_0)=e^{-t_0x^2}x^{2n}$ がすべての x について成り立つから

$M(x)=f(x,t_0)$ と置くことにより、定理14．2の

ｉ） $|f(x,t)|=f(x,t)\leqq f(x,t_0)=e^{-t_0x^2}x^{2n}=M(x)$

ii） 広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}M(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-t_0x^2}x^{2n}dx$ は収束する。

より、この広義積分は $t\geqq t_0$ で広義一様収束する。

(P．320 定理14．3)

ここでは定理14．1の A が $[c,u]\subset J$ で、区間なので体積確定である。また、

$[c,u]\times I$ で連続である。

2) については、$[c,u]\times[a,b]\subset J\times I$ で $f(x,t)$ が連続なので、定理7．3から

$$\int_a^b F_u(t)dt=\int_a^b\left\{\int_c^u f(x,t)dx\right\}dt=\int_c^u\left\{\int_a^b f(x,t)dt\right\}dx$$

また、$(F_u)_{u\in J}$ は $[a,b]\subset I$ で F に一様収束し、1) から F は $[a,b]$ 上で連続

であるから $[a,b]$ 上で可積分であり、項別積分定理（定理13．3）が使える。

よって、任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\left|\int_a^b F(t)dt-\int_a^b F_u(t)dt\right|<\varepsilon \ \to\ \left|\int_a^b F(t)dt-\int_c^u\left\{\int_a^b f(x,t)dt\right\}dx\right|<\varepsilon$$

とすることができる。

(P．320 定理14．4)

仮定 $a)$ から $\displaystyle\int_a^s G(t)dt=\int_c^{\to d}\{f(x,s)-f(x,a)\}dx$

$$=\int_c^{\to d}f(x,s)dx-\int_c^{\to d}f(x,a)dx=F(s)-F(a)$$

$G(t)$ は $[a\ ,\ s] \subset I$ で連続なので、$[a\ ,\ s]$ 上で可積分である。

したがって、定理5．4，1) により、$\int_a^s G(t)dt$ は s で微分可能で導関数は $G(s)$ となる。よって、$F'(s) = G(s)$

（P．321～の例の準備）微分積分学 第一巻 藤原松三郎 著 P．349 参照

> u をどのように大きくとっても、$[a\ ,\ u]$ で $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ は連続とし、かつ、$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$ が存在するものとする。もし
>
> $$\int_a^\infty f'(x)g(x)\,dx\ ,\ \int_a^\infty f(x)g'(x)\,dx$$
>
> の一方が収束すれば、他方も収束して
>
> $$\int_a^\infty f'(x)g(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a)$$
>
> （証明）
>
> $(fg)' = f'g + fg'$ から
>
> $$\int_a^u f'g\,dx = f(u)g(u) - f(a)g(a) - \int_a^u fg'\,dx$$
>
> 仮定から、$u \to \infty$ にした場合の極限をとれば、右辺が収束すれば左辺も収束することになるので、どちらか一方が収束すれば他方も収束する。
>
> またそのとき上の等式が得られる。

（P．321 例3）

$x \in J = [0, +\infty)$, , $t \in I = R$ とする。

$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos tx\,dx$ が R 上で一様収束することを定理14．2を使って示す。

ｉ）$|f(x,t)| = |e^{-x^2} \cos tx| \leqq e^{-x^2} = M(x)$ （ $\forall x \in J$, $\forall t \in R$ ）

ⅱ）$\int_0^{+\infty} M(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

よって、以上より $F(t)$ は R 上で一様収束する。

次に、$\int_0^{+\infty} -xe^{-x^2} \sin tx\,dx$ が R 上で一様収束することを定理14．2で示す。

ⅰ）$|\dfrac{\partial f}{\partial t}| = |-xe^{-x^2}\sin tx| \leqq xe^{-x^2} = M(x)$（$\forall x \in J$，$\forall t \in R$）

ⅱ）$e^x > \dfrac{x^2}{2}$（$x \geqq 0$）→ $x = x^2$ として $e^{x^2} > \dfrac{x^4}{2}$（$x \geqq 0$）→ $e^{-x^2} < \dfrac{2}{x^4}$（$x \geqq 0$）

→ $xe^{-x^2} < 2x^{-3}$（$x \geqq 0$）→ $\dfrac{xe^{-x^2}}{2x^{-3}} < 1$（$x \geqq 0$）→ $xe^{-x^2} = O(x^{-3})$（$x \to +\infty$）

したがって、定理11．３，1)より、$b = +\infty$，$M(x) = O(x^{-3})$（$x \to +\infty$），$\alpha < -1$

なので、$\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} M(x)dx$ は絶対収束する。

ⅰ)、ⅱ）より $\displaystyle\int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin tx\, dx$ は R 上で一様収束する。

次に、定理14．4により、

a)$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos tx\, dx$ は　$\forall t \in R$ に対し一様収束する、つまり、収束する。

b)$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -xe^{x^{-2}}\sin tx$ は $J \times R$ で連続

c)$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx$ は R 上で一様収束する。

a)　b)　c) より、$F'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin tx\, dx$ となる。

ここで、右辺を部分積分（上の準備参照）すれば、$\int f'g = fg - \int fg'$ から

$f' = -xe^{-x^2}$　，$g = \sin tx$　とし

$$y = -x^2 \to \frac{dy}{dx} = -2x \to \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2x} \to \int -xe^{-x^2}dx = \int +\frac{1}{2}e^y dy$$

$= \dfrac{1}{2}e^y + C = \dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$ なので、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin tx}{2e^{x^2}} = 0$ だから

$$F'(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin tx\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\,\frac{1}{2}e^{-x^2}\cos tx\, dx$$

$$= -\frac{t}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos tx\, dx = -\frac{t}{2}F(t)$$

となる。さらに、$F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である。

一方、$\phi(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}exp(-\dfrac{t^2}{4})$ も $\phi'(t) = -\dfrac{t}{2}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}exp(-\dfrac{t^2}{4})$

$= -\dfrac{t}{2}\phi(t)$

また、$\phi(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}exp(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

よって、$\left(\dfrac{F(t)}{\phi(t)}\right)' = \dfrac{1}{\phi(t)^2}(F'(t)\phi(t) - F(t)\phi'(t))$

$= \dfrac{1}{\phi(t)^2}\left(-\dfrac{t}{2}F(t)\phi(t) - F(t)\left(-\dfrac{t}{2}\phi(t)\right)\right) = 0$

したがって、微分して 0 なので、

$\left(\dfrac{F(t)}{\phi(t)}\right)$ は定数である。 また、 $\left(\dfrac{F(0)}{\phi(0)}\right) = 1$ なので、$F(t) = \phi(t)$ となる。よって

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos\ tx\ dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}$ となる。

(P.321 例4)

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{sin\ x}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}$ を証明する。

$f(x,t) = e^{-tx}\dfrac{sin\ x}{x}$ ($J = [0,+\infty)$, $I = [0,+\infty)$)とする。

$F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dx = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\dfrac{sin\ x}{x}\,dx$ が I 上で一様収束することを示す。

実際、任意の $0 < v < u < +\infty$, $[v,u] \subset J$ に対し、部分積分を行うと

$\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$ から、$f' = sin\ x$, $g = \dfrac{e^{-tx}}{x}$ とすれば、

$$\int_v^u \frac{e^{-tx}}{x}\ sin\ x\ dx = \left[-cos\ x\frac{e^{-tx}}{x}\right]_v^u + \int_v^u cos\ x\left(\frac{e^{-tx}}{x}\right)'dx$$

ここで、$|\,cos\ x\,| \leqq 1$ で

$\left|\left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right)'\right| = \left|\dfrac{-te^{-tx}x - e^{-tx}}{x^2}\right| = \dfrac{te^{-tx}x + e^{-tx}}{x^2} = -\left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right)'$ なので

$\left|\displaystyle\int_v^u \dfrac{e^{-tx}}{x}\ sin\ x\ dx\right|$

$\leqq \left| -\cos u \ \dfrac{e^{-tu}}{u} + \cos v \ \dfrac{e^{-tv}}{v} \right| + \left| \displaystyle\int_v^u \cos x \ \left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right)' dx \right|$

$\leqq \left| \dfrac{e^{-tu}}{u} \right| + \left| \dfrac{e^{-tv}}{v} \right| + \left| \displaystyle\int_v^u \cos x \ \left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right)' dx \right|$

$tx \geqq 0$ ならば、 $e^{tx} \geqq 1$ なので $e^{-tx} \leqq 1$

$\leqq \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \displaystyle\int_v^u -\left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right)' dx = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} - \displaystyle\int_v^u \left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right)' dx$

$= \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} - \left[\left(\dfrac{e^{-tx}}{x}\right) \right]_v^u$

$= \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} - \left(\dfrac{e^{-tu}}{u} - \dfrac{e^{-tv}}{v} \right)$

$\leqq \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{e^{-tv}}{v}$

$0 < v < u$ なので、 $\leqq \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{3}{v}$ （ $\forall t \in I$ ） … (14.8)

$\sup\limits_{t \geqq 0} \left| \displaystyle\int_0^u f(x,t)dx - \int_0^v f(x,t)dx \right| = \sup\limits_{t \geqq 0} \left| \displaystyle\int_v^u f(x,t)dx \right| < \dfrac{3}{v}$

なので、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\dfrac{3}{v} < \varepsilon$ となる v をとれば、$0 < v < u$ で、$+\infty$ の近傍として $(v,+\infty) \cap J$ をとれば、$\forall t \in I$ で

$\forall v,u \in (v,+\infty) \cap J \to \sup\limits_{t \geqq 0} \left| \displaystyle\int_0^u f(x,t)dx - \int_0^v f(x,t)dx \right|$

$= \sup\limits_{t \geqq 0} \left| \displaystyle\int_v^u f(x,t)dx \right| < \varepsilon$

となる。したがって、一様コーシー条件を満たす。定理13．4から

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \dfrac{\sin x}{x} dx$ は I 上一様収束する。また定理14．3より I 上連続となる。

次に、$\dfrac{\partial f}{\partial t} = \left(e^{-tx} \dfrac{\sin x}{x} \right)' = -xe^{-tx} \dfrac{\sin x}{x} = -e^{-tx} \sin x$ なので

$\displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx} \sin x dx$ （$t > 0$）が I 上一様収束することを示す。

ｉ） $\left| \dfrac{\partial f}{\partial t} \right| = \left| -e^{-tx} \sin x \right| \leqq e^{-tx}$

そこで、任意の $t_0>0$ に対し、$t \geqq t_0$ ならば $e^t \geqq e^{t_0} \to e^{tx} \geqq e^{t_0x}$ ($x \geqq 0$)

$\to e^{-tx} \leqq e^{-t_0x}$

よって、$M(x)=e^{-t_0x}$ とすれば、$\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right| \leqq M(x)$ ($\forall x \in J$, $\forall t \geqq t_0$)

ⅱ) $y=-t_0x \to \dfrac{dy}{dx}=-t_0 \to dx=-\dfrac{1}{t_0}dy$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} M(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t_0x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{t_0}e^{-t_0x}\right]_0^a = \frac{1}{t_0}$ は収束する。

そこで、$I=(0\ ,+\infty)$ とあらためれば、I に含まれる任意の有界閉集合を K とすれば、$K\subset[t_0,+\infty)$ となる区間が存在するので、I で広義一様収束することがわかる。そこで、定理14．4により

$F'(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx}\sin x dx$ $(t>0)$ となる。

広義積分においても部分積分可能(上の準備参照)である。よって、部分積分を2回行う。

そこで、 $f'=\sin x$, $g=-e^{-tx}$ とすれば、$f=-\cos x$, $g'=te^{-tx}$ となり

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{e^{tx}}=0$ だから

$F'(t)=\left[e^{-tx}\cos x\right]_0^{+\infty}+t\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos xdx$

$=-1+t\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos xdx$

次に、$f'=\cos x$, $g=e^{-tx}$ とすれば、$f=\sin x$, $g'=-te^{-tx}$ となり、

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{e^{tx}}=0$ だから

$=-1+t\left\{\left[e^{-tx}\sin x\right]_0^{+\infty}+t\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,dx\right\}$

$=-1-t^2F'(t)$

だから

$F'(t)=\dfrac{-1}{1+t^2}$ ($t>0$)

$F(t)=C-\mathrm{Arctan}\ t$ ($t>0$) となる。

ここで、C を求めるために、$t\to+\infty$ とすれば(後で証明するが)

(14.9) $$\lim_{t\to+\infty}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx=0$$

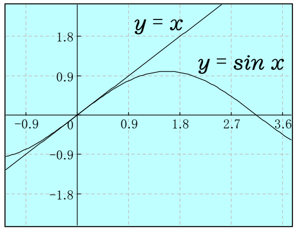
が成り立つ。これが得られると、$C=\dfrac{\pi}{2}$ であるから、F の $t=0$ における連続性から $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=F(0)=\lim_{t\to+0}F(t)=\frac{\pi}{2}$ が得られる。

($Arctan\ t$ ($t>0$)なので、$t\to+0$ のとき $Arctan\ t\to0$ としている。)

(14.9の証明)

$\dfrac{\sin x}{x}$ の $x=0$ における値を 1 と定義すれば

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}=\begin{cases}0\ ,\ x>0\\1\ ,\ x=0\end{cases}\quad\cdots\ ①$$



である。この極限が $x=0$ で不連続である

から、収束は $x=0$ の近傍で一様ではない。

また、積分区間は無限区間である。

つまり、定理13．6の有界な体積確定集合ではないので、項別積分定理が使えない。

いま(14．8)で $u\to+\infty$ として $v=\dfrac{1}{\varepsilon}$ ($0<\varepsilon<1$)とおけば

(14.10) $$\left|\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{+\infty}f(x,t)dx\right|\leqq3\varepsilon$$

を得る。次に、ある $t_1>0$ に対し、$t>t_1$ で、①から $\left|e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqq1$ だから、

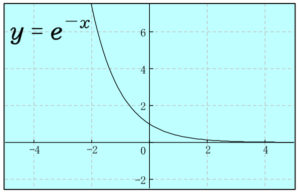
(14.11) $$\left|\int_0^{\varepsilon}f(x,t)dx\right|\leqq\int_0^{\varepsilon}1\,dx=\varepsilon$$ である。 そして

(14.12) $$\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}f(x,t)dx\right|=\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx\right|$$

ここで、$\displaystyle\sup_{x\in[\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}]}\frac{1}{e^{tx}}=\frac{1}{e^{t\varepsilon}}$ なので

$$\leqq\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{e^{tx}x}dx\leqq\frac{1}{e^{t\varepsilon}}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{e^{t\varepsilon}}[\log x]_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}=\frac{1}{e^{t\varepsilon}}(\log\frac{1}{\varepsilon}-\log\varepsilon)$$

$= \dfrac{1}{e^{t\varepsilon}}\left(\ell og\ \dfrac{1}{\varepsilon^{2}} \right) = -\dfrac{1}{e^{t\varepsilon}}\ \ell og\ \ \varepsilon^{2} \to 0\ \ (\ t \to +\infty\ )$



そこで、ある $t_2 > 0$ に対し、$t \geqq t_2$ で

上式右辺は $< \varepsilon$ とすることができるので

$t_0 = Max\{\ t_1, t_2\}$ とすれば

$|F(t)| < 5\varepsilon\ (\ t \geqq t_0\ )$ となる。

(P.323 例5)

(P.125(例7))より、($x \neq y$)として

$f(x) = \dfrac{m}{|x-y|}\quad (\ |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\ )$ とすれば

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = m\,2(\ x_1-y_1\ )(\ -\frac{1}{2}|x-y|^{-3}\ ) = \frac{-m(\ x_1-y_1\ )}{|x-y|^3} \qquad \cdots\ ①$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} = (\ -m(x_1-y_1)\times\frac{1}{|x-y|^3}\ )'$$

$$= \frac{-m}{|x-y|^3} + (\ -m(x_1-y_1)\ )\times(\ \frac{1}{|x-y|^3}\ )'$$

$$= \frac{-m}{|x-y|^3} + (\ -m(x_1-y_1)\ )\times(\ (\ (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\ )^{-\frac{3}{2}}\ )'$$

$$= \frac{-m}{|x-y|^3} + (\ -m(x_1-y_1)\times 2(x_1-y_1)\times(\ -\frac{3}{2}\ \frac{1}{|x-y|^5}\ )$$

$$= \frac{-m}{|x-y|^3} + 3m(x_1-y_1)^2\ \frac{1}{|x-y|^5} \qquad \cdots\ ②$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k{}^2} = \frac{-3m}{|x-y|^3} + \frac{3m}{|x-y|^5}\ (\ (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)$$

$$= \frac{-3m}{|x-y|^3} + \frac{3m}{|x-y|^5}\times|x-y|^2 = 0$$

また、力の場 F がスカラー場 f の勾配 grad f に等しいとき、f を F のポテンシャルといい、

同様に、点 a_1、…、a_k にそれぞれ質量 m_1、…、m_k がある重力場のポテンシャルは、$f(x)$ $= \sum_{i=1}^{k}\dfrac{m_i}{|x-a_i|}$ となり、上記説明から、項別に 0 になるので、a_i 以外の点で、$\Delta f = 0$ となる。

(ラプラスの方程式)

そこで、一点 y にある単位質量(電荷)の質点による 点 x での重力場(電場)のポテンシャルは $1/|x-y|$ なので、R^3 の有界な体積確定集合 D に連続な密度 $m(y)$ が分布していいるときのポテンシャルは、Δy を微小体積とすれば、$m(y)\times\Delta y$ は質量となるので

$U(x)=\displaystyle\int_D \frac{m(y)dy}{|x-y|}$ で与えられると考えて自然である。

$\Delta U=0$ は ①、②と $\Delta(\dfrac{1}{r})=0$ から予想できるが、定理14．1を使ってみると

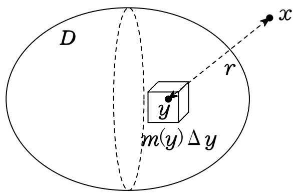
$|x-y|=r$ として、$x\neq y$ のとき ①、②から

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{r})=-\frac{(x_i-y_i)}{r^3} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}(\frac{1}{r})=-\frac{1}{r^3}+3(x_i-y_i)^2\frac{1}{r^5} \quad (1\leqq i\leqq 3)$$

なので、$x\notin D$ のとき、右図を参考にして

考えると、$y=x$ となるときはないので

$$U(x)=\int_D \frac{m(y)}{|x-y|}dy=\int_D f(y\ ,\ x)dy$$



x の x_i だけを変数として、他の x_j ($i\neq j$) を

定数としてみれば、$x\notin D$ となる x_i の含まれる区間を I とすれば、$f(y\ ,\ x)$ は $D\times I$ で連続である。また、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\dfrac{1}{r})m(y)$ も $D\times I$ で連続なので、定理14．1から

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=\int_D -\frac{(x_i-y_i)}{r^3}m(y)dy \quad , \quad \frac{\partial^2 U}{\partial {x_i}^2}=\int_D\{-\frac{1}{r^3}+3(x_i-y_i)^2\frac{1}{r^5}\}m(y)dy$$

を得る。$\int_D$ の中の $i=1$ から 3 までの和は 0 だったので、$\Delta U=0$ となる。

ニュートン・ポテンシャル ($n\geqq 3$) についても、P．125例7を参考にすれば確認できる。

(P．323 例6)

$f(x)$ を R 上の有界連続関数とするとき、任意の $(x\ ,\ t)\in D=\{(x\ ,\ t)\in R^2\mid x\in R\ ,\ t>0\}$ に対し、広義積分

$$(14.13) \qquad u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})dy \qquad \leftarrow (-\infty\ に注意)$$

は収束し、D ($D\subset R^2$ に注意) において一次元熱方程式

$$(14.14) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

をみたす。さらに、R 上広義一様に

(14.15) $\displaystyle \lim_{t\to +0} u(x,t) = f(x)$

が成り立つ。

実際、$(x\ ,\ t)\in D$ を一つ定めたとき、変数変換 $y = x+2\sqrt{t}z$ (x、$\sqrt{t}$ は定数と考える)を施すと

(14.16) $\displaystyle u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{t}z)exp(-\frac{(x-(x+2\sqrt{t}z))^2}{4t})\,2\sqrt{t}dz$

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{t}z)e^{-z^2}dz$

となる。f は有界なので、$\displaystyle \sup_{z\in R}|f(z)| = M$ とおけば、

ⅰ)$|f(x+2\sqrt{t}z)e^{-z^2}| \leqq Me^{-z^2} = M(z)$ ($\forall z \in R, \forall (x\ ,\ t) \in D$)

ⅱ)広義積分 $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} Me^{-z^2}dz = M\sqrt{\pi}$ なので収束する。($\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{c} + \int_{c}^{+\infty}$ と考えて)

よって、定理14.2より広義積分 (14.16) および (14.13) は D 上一様収束する。

次に<u>連続といいたいが、少し定理を補強する。</u>

(定理14.1、1)の拡張)

A を R^n の体積確定の有界閉集合、I を任意の R^m の開集合または閉集合とし、$A\times I = K$ と置く

$f(x,t)$ ($x\in A$, $t = (t_1,\cdots,t_m) \in I$) が K 上連続ならば次のことが成り立つ。

1) $\displaystyle F(t) = \int_A f(x,t)\,dx$ は I 上で連続である。

<u>詳しくは、解析入門Ⅱの Ⅶ 定理1.10及び定理1.11などを参照せよ。</u>

(略証) I に含まれる任意の有界閉集合 J で 1) が成り立つことを示せば、I において 1) が成り立つ。そこで、I を有界閉区間とする。K はコンパクト集合だから、定理4.1(ハイネの定理)から

K 上連続な f は K 上一様連続である。したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\delta >0$ が存在して

$(x\ ,\ t_1\ ,\cdots,\ t_m)\ ,\ (y\ ,\ s_1\ ,\cdots,\ s_m) \in K$ に対し

$|(x\ ,\ t_1\ ,\cdots,\ t_m)-(y\ ,\ s_1\ ,\cdots,\ s_m)| < \delta \rightarrow |f(x\ ,\ t_1\ ,\cdots,\ t_m)-f(y\ ,\ s_1\ ,\cdots,\ s_m)| < \varepsilon$

が成り立つ。特に 同じ x に対し

$|(x\ ,\ t_1\ ,\cdots,\ t_m)-(x\ ,\ s_1\ ,\cdots,\ s_m)| < \delta \rightarrow |f(x\ ,\ t_1\ ,\cdots,\ t_m)-f(x\ ,\ s_1\ ,\cdots,\ s_m)| < \varepsilon$

後は、定理14.1の証明と同様にして証明できる。

（定理14．3、1）の拡張）

J = [c , d) とし、I は R^m の開集合または閉集合とする。いま、連続関数 $f : J\times I \to R$ に対し広義積分

$F(t) = \int_c^{\to d} f(x,t)dx$

が I 上広義一様収束するとすれば、次の1）が成り立つ。

1） F は I 上連続である。

（略証） 任意の $u\in$[c , d) に対し、

$F_u(t) = \int_c^u f(x,t)dx$ 　　　（ $(x,t) = (x,t_1,\cdots,t_m)$ ）

と置けば、関数 F_u は A = [c , u] $\subset J$ で、$A\times I$ 上で連続であり、上記　定理14．1、1）の拡張により、$F_u(t) = \int_c^u f(x,t)dx$ は I 上連続である。そして、連続関数族 $(F_u)_{u\in J}$ が I 上 F に広義一様収束するから、I は開集合または閉集合であるので、定理13．3系2より、F は I 上連続である。

そこで、$y \in J$ = [0 , $+\infty$ ） とし、D は R^2 の開集合である。

$f(y)\, exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4t})dy$ 　: $J\times D \to R$ は連続関数であり、

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})dy$$

は D 上一様収束するので

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} f(y)\, exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})dy$$

は D 上一様収束する。よって、w は D 上連続となる。$J = (-\infty, 0]$ としても同様なことがいえるので u は D 上連続となる。

（P．324 （14．20））

$U(x,y,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4t})$ とすれば、t で微分して

$$(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}})' = (\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}})' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(t^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times (-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}$$

$$(exp(-\frac{(x-y)^2}{4t}))' = -\frac{(x-y)^2}{4}\times(-t^{-2})\times exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$$

$$= \frac{(x-y)^2}{4t^2}exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\times exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\times\frac{(x-y)^2}{4t^2}exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\{\ \frac{(x-y)^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\ \}\quad\cdots\ (14.17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(-\frac{2(x-y)}{4t})\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(-\frac{(x-y)}{2t})\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\quad\cdots\ (14.18)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\{-\frac{1}{2t}exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})+(-\frac{(x-y)}{2t})(-\frac{2(x-y)}{4t})exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\{\ \frac{(x-y)^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\ \}\quad\cdots\ (14.19)$$

であるから、D において

(14.20) $$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

次に (14.14)を証明する。

(14.13) が 積分記号下で、t について一回、x について二回微分できることを示せばよい。

(14.17) から、任意の $0<a<b$, $c>0$ に対し、$x\in[-c\ ,\ c]$, $t\in[\ a\ ,\ b\ ]$ のとき、

$$|\ f(y)\frac{\partial U}{\partial t}(x,y,t)\ |=|\ f(y)\ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\{\ \frac{(x-y)^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\ \}\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\ |$$

$$\leqq\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\{\ \frac{(x-y)^2}{4a^2}+\frac{1}{2a}\ \}\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4b})\ |\ f(y)\ |=M(y)\quad(\forall y\in R\ ,\forall(x\ ,\ t)\in$$

$[-c\ ,\ c]\times[\ a\ ,\ b\ ]$

右辺は t に無関係で、$|\ f(y)\ |\leqq M$ なので

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4b})dy$　　　② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ \frac{(x-y)^2}{4a^2}exp(-\frac{(x-y)^2}{4b})dy$

①、②が収束すれば、$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ M(y)dy$ が収束することがわかる。

①の収束を示す。

$z=-\dfrac{(x-y)}{2\sqrt{b}}$　と置けば、$z^2=\dfrac{(x-y)^2}{4b}$　また　$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ より

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ exp(-\frac{(x-y)^2}{4b})dy=2\sqrt{b}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=2\sqrt{\pi b}$ となるので収束する。

②の収束を示す。

①と同様にして、

$z = -\dfrac{(x-y)}{2\sqrt{b}}$　と置けば、$z^2 = \dfrac{(x-y)^2}{4b}$　また　$\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)^2}{4a^2} exp(-\frac{(x-y)^2}{4b})dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)^2}{4b}\frac{b}{a^2} exp(-\frac{(x-y)^2}{4b})\,2\sqrt{b}\ dy = \frac{2b\sqrt{b}}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz$$

$e^z > \dfrac{z^2}{2}$ ($z > 0$) $\to e^{z^2} > \dfrac{z^4}{2} \to e^{-z^2} < \dfrac{2}{z^4} \to\ z^2 e^{-z^2} < \dfrac{2}{z^2} \to \dfrac{z^2 e^{-z^2}}{z^{-2}} < 2 \to z^2 e^{-z^2} =$

$O(z^{-2})\ (z \to +\infty)$

($z < 0$) の場合も $z^2 > 0$ なので、 $z^2 e^{-z^2} = O(z^{-2})\ (z \to -\infty)$

定理11．3、1)から $b = +\infty$ で、$z^2 e^{-z^2} = O(z^{-2})\ (z \to +\infty)$ （$\alpha < -1$） なので

$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{c} z^2 e^{-z^2}\ dz + \int_{c}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz$ 右辺2項は収束するので、左辺が収束することがわかる。

したがって、定理14．2より、$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{\partial U}{\partial t}(x,y,t)\ dy$ は任意の $[-c\ ,\ c] \times [\ a\ ,\ b\ ] \subset$ D で一様収束する。ここで、D に含まれる任意の有界閉集合は $\subset [-c\ ,\ c] \times [\ a\ ,\ b\ ]$ とすることができるので $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{\partial U}{\partial t}(x,y,t)\ dy$ は D 上で広義一様収束する。

よって、定理14．4より

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)U(x,y,t)dy$ は D 上で一様収束する。つまり、収束する。

b) $f(y)\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,y,t)$ は $R \times D$ で連続。

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{\partial U}{\partial t}(x,y,t)\ dy$ は D で広義一様収束する。

以上のことから $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{\partial U}{\partial t}(x,y,t)\ dy \quad (x\ ,\ t) \in D\ \cdots$ (14.21)

ただし、$U(x,y,t)$ は x を固定し、$y\ ,\ t$ の関数とみている。

同様にして、(14.13) が積分記号下で x **について**、一回または二回微分できることを示す。

任意の $a < b$ 、$c > 0$ に対し、$x \in [-c\ ,\ c]$, $t \in [\ a\ ,\ b\ ]$ で

（一回微分について）

$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}(-\dfrac{(x-y)}{2t})\,exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4t})$ から

$|f(y)\dfrac{\partial U}{\partial x}| \leqq |f(y)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}\{\dfrac{(x-y)}{2a}exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4b})\}$

$|f(y)| \leqq M$ なので、$M(y)=\dfrac{(x-y)}{2a}exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4b})$ として、収束を示す。

ここで、$z=-\dfrac{x-y}{2\sqrt{b}} \rightarrow \dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$ ，$\dfrac{(x-y)}{2a}=z\times(-\dfrac{\sqrt{b}}{a})$

$\int_{-\infty}^{+\infty}M(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x-y)}{2a}exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4b})dy$

$=2\sqrt{b}\int_{-\infty}^{+\infty}-\dfrac{\sqrt{b}}{a}ze^{-z^2}dz=-\dfrac{2b}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-z^2}dz=0$　（ze^{-x^2} は奇関数）

となる。よって、$U(x,y,t)$ は t を固定し、x , y の関数とみて、$\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y,t)dy$ は D 上で広義一様収束する。よって、定理14．4から

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,t)dy \qquad (x,t)\in D$$

（二回微分について）

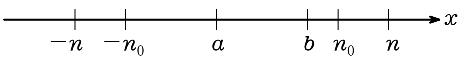
$f(y)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=f(y)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}exp(-\dfrac{(x-y)^2}{4t})\{\dfrac{(x-y)^2}{4t^2}-\dfrac{1}{2t}\}$ は (14.17) と同じ式なので、$\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y,t)dy$ は D 上で広義一様収束する。$U(x,y,t)$ は t を固定し、x , y の関数とみて、定理14．4から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y,t)dy \qquad (x,t)\in D \tag{14.22}$$

以上により、(14.14)が D でみたされることが証明された。

最後に（14．15の証明）

R のコンパクト区間 $I=[a,b]$ を一つとるとき、$[a,b]\subset[-n_0,n_0]$ となる自然数 $n_0\geqq 1$ が存在する。



$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-z^2}dz$ は f の有界性と $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ から D 上一様収束する。

(14.16) が同じく D 上一様収束するから

$$u(x\,,\,t)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\,f(x+2\sqrt{t}z)-f(x)\,\}\,e^{-z^2}dz$$

も D 上一様収束する。よって、任意の $\varepsilon>0$ に対し $n\geqq n_0$ を十分大きくとれば任意の $(x\,,\,t)\in D$ に対し

$$(14.23)\qquad \begin{aligned}&\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{n}^{+\infty}\{\,f(x+2\sqrt{t}z)-f(x)\,\}e^{-z^2}dz\right|<\frac{\varepsilon}{3}\\ &\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-n}\{\,f(x+2\sqrt{t}z)-f(x)\,\}e^{-z^2}dz\right|<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。コンパクト区間 $J=[\,-n\,,\,n\,]$ 上 x について連続な f はハイネの定理より、一様連続であるから（注意　z の積分範囲としての n を $I\subset J$ となるよう使っている。）

$\varepsilon>0$ に対し、$\delta>0$ が存在して、任意の $x\in J$ に対し、$|\,h\,|<\delta$ ならば

$|\,f(x+h)-f(x)\,|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ となる。そこで、$0<\sqrt{t}<\dfrac{\delta}{2n}$ とすれば

$|\,2\sqrt{t}z\,|<|\,2\times\dfrac{\delta}{2n}\times z\,|=|\,\dfrac{\delta z}{n}\,|=\delta\times|\,\dfrac{z}{n}\,|\leqq\delta$　（$-n\leqq x\leqq n$ だから）

$|\,f(x+2\sqrt{t}z)-f(x)\,|<\dfrac{\varepsilon}{3}$　（$\forall x\in J$）

となるから

$$(14.24)\qquad \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-n}^{+n}\{\,f(x+2\sqrt{t}z)-f(x)\,\}e^{-z^2}dz\right|\leqq\frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}}\int_{-n}^{+n}e^{-z^2}dz$$

$$<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz<\frac{\varepsilon}{3}$$

となる。(14.23) と (14.24) により、$0<t<(\dfrac{\delta}{2n})^2$ ならば、任意の $x\in J$ に対し、

$$|\,u(x,t)-f(x)\,|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\{\,f(x+2\sqrt{t}z)-f(x)\,\}e^{-z^2}dz\right|\leqq\left|\int_{-\infty}^{-n}\right|+\left|\int_{-n}^{+n}\right|+\left|\int_{+n}^{+\infty}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

となる。これで、J 上一様に $u(x,t)\to f(x)\ (t\to+0)$ となることが証明された。$I\subset J$ なので I 上一様収束する。ゆえに、R 上広義一様収束することになる。

（注意）$u(x,0)=f(x)$ によって　u の定義域を　$\overline{D}=\{\,(x,t)\mid x\in R,\ t\geqq0\}$ にまで拡張すると (14.15)　により、u は $\overline{D}$ 上連続であり、D で(14.14) をみたし、かつ、初期条件 $u(x,0)=f(x)$ をみたす。すなわち、時刻　$t=0$ における温度分布 $f(x)$ が与えられたとき、熱源を含まない針金の時刻 $t>0$ における点 x の温度が (14.13) の $u(x,t)$ で表される。