（P．162　複素数の復習）

当たり前のことかもしれないが、複素数 $z=x+iy$, $h=a+ib$ に対し、$i^2=-1$ というルールだけで、 $(z+h)^2=z^2+2hz+h^2$ となるかである。交換法則は簡単なので省略するが、分配法則については調べてみることにする。

$a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$ とおく。

$a(b+c)=(a_1+ia_2)(b_1+ib_2+c_1+ic_2)$

$=a_1b_1+ia_1b_2+a_1c_1+ia_1c_2+ia_2b_1-a_2b_2+ia_2c_1-a_2c_2$

$=(a_1b_1+ia_1b_2+ia_2b_1-a_2b_2)+(a_1c_1+ia_1c_2+ia_2c_1-a_2c_2)$

$=(a_1+ia_2)(b_1+ib_2)+(a_1+ia_2)(c_1+ic_2)$

$=ab+ac$

つまり、分配法則が成り立つので、$(z+h)^2=z^2+2hz+h^2$ となるはずである。
実際計算してみると

$(z+h)^2=(x+iy+a+ib)^2=(x+iy+a+ib)(x+iy+a+ib)$

$=x^2+ixy+ax+ibx+ixy-y^2+iay-by+ax+iay+a^2+iab+ibx$

$-by+iab-b^2$

$=x^2-y^2+2ixy+2(ax+ibx+iay-by)+a^2-b^2+2iab$

$=(x+iy)^2+2(x+iy)(a+ib)+(a+ib)^2$

$=z^2+2hz+h^2$

したがって、実数と同じように複素数についても自由に計算できるのである。つまり「体」ということである。

（P．164　コーシー・リーマンの方程式）

$a)\Rightarrow b)$　$f'(z)=a+bi$ (a , $b\in R$) とすれば

(1.8)　$f(z+h)-f(z)=(a+bi)h+o(|h|)$　($h\to 0$)

$z=x+yi$, $h=k+\ell i$

$f(z+h)-f(z)=u(x+k\ ,\ y+\ell)+iv(x+k\ ,\ y+\ell)-u(x\ ,\ y)-iv(x\ ,\ y)$

$=u(x+k\ ,\ y+\ell)-u(x\ ,\ y)+i\{\ v(x+k\ ,\ y+\ell)-v(x\ ,\ y)\ \}$

$=(a+bi)(k+\ell i)+o(|h|)$　($h\to 0$)

$=ak-b\ell+i(a\ell+bk)+o(|h|)$　($h\to 0$)

実部と虚部に分けたいが、$o(|h|)$ についても実部と虚部に分けたいところであるが

$o(|h|)+o(|h|)=o(|h|)$ なので、記号が複雑になるのでそのままにする。

$$(1.9)\quad \begin{cases} u(x+k\,,\,y+\ell)-u(x\,,\,y)=(a\,,\,-b)\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}+o(|h|)\ (\,h\to 0\,) \\ v(x+k\,,\,y+\ell)-v(x\,,\,y)=(b\,,\,a)\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}+o(|h|)\ (\,h\to 0\,) \end{cases}$$

よって、$(u_x\,,\,u_y)=(a\,,\,-b)$, $(v_x\,,\,v_y)=(b\,,\,a)$ となる。

これは、$f(x\,,\,y)=\begin{pmatrix}u(x\,,\,y)\\ v(x\,,\,y)\end{pmatrix}$ とみたとき $f\,'(x\,,\,y\,)=\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

(1.3) を満たすので、C から C への一次写像になっている。

$b)\Rightarrow a)$ については、定理6．2から $f(x\,,\,y)$ は微分可能であり、z における値を

$u_x=v_y=a\,,\,-u_y=v_x=b$ とおけば

$u(x+k\,,\,y+\ell)-u(x\,,\,y)=(u_x\,,\,u_y)\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}+o(|h|)\ (\,h\to 0\,)$

$=(a\,,\,-b)\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}+o(|h|)\ (\,h\to 0\,)$

$=ak-b\ell+o(|h|)\ (\,h\to 0\,)$

$v(x+k\,,\,y+\ell)-v(x\,,\,y)=(v_x\,,\,v_y)\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}+o(|h|)\ (\,h\to 0\,)$

$=(b\,,\,a)\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}+o(|h|)\ (\,h\to 0\,)$

$=bk+a\ell+o(|h|)\ (\,h\to 0\,)$

$f(z+h)-f(z)=ak-b\ell+o(|h|)+i(bk+a\ell+o(|h|))$

$=ak-b\ell+ibk+ia\ell+o(|h|)$

$=a(k+i\ell)+ib(k+i\ell)+o(|h|)$

$=(a+ib)h+o(|h|)$

となり、f は z で複素微分可能となる。

ここで、$f(z)=z^2=(\,x+iy\,)^2=x^2-y^2+2ixy$ とする。 このとき、

$f_0:\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}x^2-y^2\\ 2xy\end{pmatrix}$, $f_0^{\,'}=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$ となり、コーシー・リーマンの方程式を満たす。

よって、$f\,^{'}(z)=2x+2iy=2z$

つまり、一変数の関数として微分しても結果が変わらないことがわかる。

初めて発見した人は感動したに違いない。この後の定理1．3の証明も複素微分可能であることを示しているが、うまくできすぎているように感じる。

$$a+ib \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i^2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a+ib)(c+id) \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$=ac-bd+i(ad+bc) \quad \Leftrightarrow \quad =\begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$=(c+id)(a+ib) \qquad =\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$1\div(a+ib)=x+iy$$

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad =\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$1\div(a+ib)$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\div\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

よって、複素数を $\triangle+i\square \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \triangle & -\square \\ \square & \triangle \end{pmatrix}=\triangle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\square\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表してもまったく問題ない。

そこで、複素微分を考えた場合

$$\lim_{h\neq 0, h\to 0}\frac{f(z+h)-f(a)}{h} = \alpha+i\beta \in \boldsymbol{C} \quad \Leftrightarrow \quad f'(z) = \alpha+i\beta$$

$f(z) = u(x\,,\,y)+iv(x\,,\,y)$ を 2変数のベクトル値関数 f_0 として見れば

$$f_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x\,,\,y) \\ v(x\,,\,y) \end{pmatrix}$$

$f_0' = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ これが**複素数になるため**には、$u_x = v_y\,,\, u_y = -v_x$ となる必要がある。その関係式が コーシー・リーマンの方程式で、その条件を満たせば

$f_0' = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_y \end{pmatrix} = u_x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v_x\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となり、2変数のベクトル値関数 f_0 が微分可能であるという条件だけでは複素微分可能とはいえないことになる。

つまり、$f'(z)$ が複素数になるための条件であって、複素数になることから自由に掛けたり割ったりしたりすることができるようになる。そして、$f'(z) = u_x+i\,v_y$ となる。

また、$f'(z) = u_x+i(-\,u_y) = v_y+i\,v_x$ …、いろいろある。

(P. 164 例2)

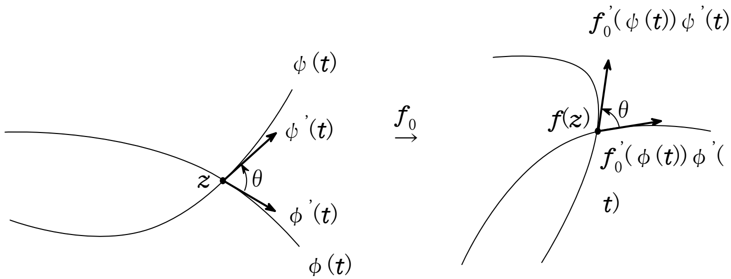
まず、$f_0(x\,,\,y)$ が $z = (x\,,\,y)$ で微分可能であるかのチェックが必要である。この場合は C^{∞} 級であるので問題ない。

$z = x+iy$ に対し $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y+i\sin y)$ で定義される関数は

$u = e^x\cos y\,,\, v = e^x\sin y$

$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}$ なので、コーシー・リーマンの方程式を満たす。

（P. 164　例3　等角写像）



$f_0'(\phi(t)) = a+ib$, $\phi'(t) = x+iy$ だとしたら、(1.2) , (1.3) から

$f_0'(\phi(t))\phi'(t) = (a+ib)(x+iy)$

となり、$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と同じことを意味することになる。

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (r = \sqrt{a^2+b^2})$$

したがって、$f(z)$ を中心に同じ θ ずつ回転するので、はさまれる角の大きさは変わらないことになる。

（P. 165　例4）

この例は、偏微分可能であっても u , v が微分可能でなければならないという例である。

（P. 166　別証）

$k = O(c)$ （ $c \to 0$ ）ならば $o(k) = o(c)$ は証明できない。

よって、他の方法を考える。

g は z で微分可能なので $g'(z)$ は存在する。

$k = g'(z)c + o(c)$ （ $c \to 0$ ） … ①

$c \neq 0$, $g'(z) \neq 0$ ならば

$$\frac{|k|}{|c|} = \frac{|g'(z)c + o(c)|}{|c|} \to |g'(z)| \quad (c \to 0) \text{ である。}$$

$0 < |g'(z)|$ なので、$0 < |g'(z)| - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在する。

したがって、十分小さい D における 0 の除外近傍 U で

$0 < |\, g'(z)\, | - \delta < \dfrac{|k|}{|c|} < |\, g'(z)\, | + \delta$　としてよい。

$d = o(c)$ とすれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、D における 0 の除外近傍 $V \subset U$ で

$$\frac{|d|}{|c|} \leqq (\,|\, g'(z)\,| - \delta\,)\,\varepsilon \;\rightarrow\; \frac{|d|}{|k|}\frac{|k|}{|c|} \leqq (\,|\, g'(z)\,| - \delta\,)\,\varepsilon$$

$$\rightarrow\; \frac{|d|}{|k|}(\,|\, g'(z)\,| - \delta\,) \leqq \frac{|d|}{|k|}\frac{|k|}{|c|} \leqq (\,|\, g'(z)\,| - \delta\,)\,\varepsilon \;\rightarrow\; \frac{|d|}{|k|} \leqq \varepsilon$$

$|d| \leqq |k|\,\varepsilon$　となり、$o(k) = o(c)$ となる。

$g'(z) = 0$ ならば、①から $k = o(c)$ となる。$o(k) = d$ とすれば、$\dfrac{|d|}{|k|} \leqq \varepsilon$, $\dfrac{|k|}{|c|} \leqq \varepsilon$

$\dfrac{|d|}{|c|} \leqq \varepsilon^2 \leqq \varepsilon$　となり、$o(k) = o(c)$ となる。

上の証明は素晴らしいが、この別証には少し無理があるように感じられる。コーシー・リーマンの方程式は $f\,'(w)$, $g'(z)$ が複素数になっているということで使われていることを見逃してはいけない。

（P．169　定理2．1の証明）

$$|\, a_n(\, z - a\,)^n\,(\, z_0 - a\,)^n\,| = |\,(\, z - a\,)^n\,|\,|\, a_n(\, z_0 - a\,)^n\,| \leqq M\,|\,(\, z - a\,)^n\,|$$

$$|\, a_n(\, z - a\,)^n\,| \leqq M\,\left|\, \frac{z - a}{z_0 - a}\,\right|^n$$

（P．170　例2）

$$\sum n(z-a)^{n-1} = 1 + 2(z-a) + 3(z-a)^2 + \cdots$$

よって、(2.1) に当てはめると $a_0 = 1$ であり、$a_n = n+1$, $a_{n+1} = n+2$ となる。

（P．170　例3）

$a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$　よって、$\left|\, \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\,\right| = \left|\, \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \times \dfrac{n+1}{(-1)^n}\,\right|$

$= \left|\, \dfrac{n+1}{n}\,\right|$

（P．170　例5）

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$　，$z=-1$ → $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

よって、発散する。

（P．170　例6）

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots$ を (2.1) に当てはめると

$=1+0z+\frac{1}{2!}z^2+0z^3+\frac{1}{4!}z^4+0z^5+\frac{1}{6!}z^6+\cdots$

したがって、$a_{2n+1}=0$, $a_{2n}=\frac{1}{(2n)!}$ となる。

$\sum\frac{w^n}{(2n)!}=\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}+\frac{w^3}{6!}+\cdots$

$a_n=\frac{1}{(2n)!}$　，$a_{n+1}=\frac{1}{(2n+2)!}$　　したがって、 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\right|$

$=|(2n+2)(2n+1)|\to\infty$　$(n\to\infty)$

（P．171　定理2．4の証明の補足）

$n\geqq 1$ ($\sum_{n\geqq 0}a_n(z-a)^n=a_0+\sum_{n\geqq 1}a_n(z-a)^n$ と考えれば、a_0 の存在は収束には関係ない。) ならば

$|a_n(z-a)^n|=|a_n(z-a)^{n-1}||z-a|\leqq|na_n(z-a)^{n-1}||z-a|$

$|a_n(z-a)^n|\leqq R'|na_n(z-a)^{n-1}|$

よって、定理Ⅰ．5．5, 1)から、後者が絶対収束すれば前者も絶対収束する。

また、$D'\subset D$ についてだが、後者が収束するような任意の $z\in D'$ に対し前者は収束するので $z\in D$ よって、 $D'\subset D$ となる。

$\left|\frac{z-a}{r}\right|<1$　ならば　$\left|\frac{z}{r}-\frac{a}{r}\right|<1$ なので、(例2) から $w=\frac{z}{r}$, $b=\frac{a}{r}$ と置き換えれば　$\sum n(w-b)^{n-1}$ は収束半径 1 で絶対収束するので $\sum n(\frac{z-a}{r})^{n-1}$

は絶対収束する。

（P．172　定理2．5の証明の補足）

ここでは関数の連続性を必要とするので、少し復習しよう。まず、関数とはある定義域で定義されている必要がある。xの値を決めれば、それに対応して y の値がただ一つ決まる。つまり、y の値が存在して、一つの値に確定するということである。値とは、二変数以上の場合は (x_1,x_2) のように一組で一つと考えるのである。

二変数の実数値関数の場合、次のように二段階の関数の定義の仕方をよくする。

$$f(x\,,\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ,(\,x\,,\,y\,)\neq 0\\ \quad 0 & ,(\,x\,,\,y\,)=0\end{cases}$$

この場合、$(x\,,\,y)=0$ のとき $f(x\,,\,y)=0$ と書くかであるが、実際この関数は 0 で不連続である。

$\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ のように表さないと、$(x\,,\,y)=0$ のときを除いて計算できない。したがって2段階に定義するわけである。しかし、下段の $f(x\,,\,y)$ の値をどの様に定義するかは勝手である。わざと不連続にするように定義してもあまり意味がない。ある程度連続であるように予想して定義する方がよい。

本題に戻る。

$$\phi(h)=\begin{cases}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\displaystyle\sum_{n\geqq 0}a_n\frac{(\,z+h-a\,)^n-(\,z-a\,)^n}{h} & (\,h\neq 0\,)\\ \displaystyle\sum_{n\geqq 1}na_n(\,z-a\,)^n & (\,h=0\,)\end{cases}$$

$|h|<R-r$ ならば $z+h\in D$ なので、$f(z+h)$ は収束する。よって、$|h|<R-r$ で、$\phi(h)$ を定義することができる。あとは、$h=0$ で連続であることを示せばよい。そのためには、Ｉ章の定理（6．11）に当てはまることを示す。

$x^n-y^n=(\,x-y\,)(\,x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\,)$ を帰納法で証明する。$k=1$ の場合は明らかである。k で成り立つと仮定する。

$$x^{k+1}-y^{k+1}=x^{k+1}-xy^k+xy^k-y^{k+1}=x(\,x^k-y^k\,)+y^k(\,x-y\,)$$

仮定より、

$$=x(\,x-y\,)(\,x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1}\,)+y^k(\,x-y\,)$$

$$=(\,x-y\,)(\,x^k+x^{k-1}y+\cdots+x^2y^{k-2}+xy^{k-1}+y^k\,)$$

よって、$k+1$ で成り立つ。

以上により証明された。

次に、$\phi_n(h) = a_n\{(z-a+h)^{n-1}+(z-a+h)^{n-2}(z-a)+\cdots+(z-a)^{n-1}\}$ としたとき

ｉ）すべての n に対し、$\phi_n(h)$ は $|h|<R-r$ で連続である。特に、$h=0$ 場合 $\phi_n(0) = na_n(z-a)^{n-1}$ となる。したがって、$\phi(0) = \sum_{n\geqq 1} na_n(z-a)^{n-1}$ とした。

当然、定理２．４から同じ収束半径 R で収束することはわかっている。

ⅱ）$|h|<r-|z-a|$ ならば　←（$|z-a|<r<R$ だったので可能）

$|z-a+h|<|z-a|+|h|<r$　だから

$|\phi_n(h)| = |a_k\{(z-a+h)^{k-1}+(z-a+h)^{k-2}(z-a)+\cdots+(z-a)^{k-1}\}|$

$\leqq n|a_n|r^{n-1}$　（ｉ）の $|h|<R-r$ を $|h|<r-|z-a|$ に縮小しておく。）

が成り立つ。

ⅲ）$r<R$ だから定理２．４により $\sum_{n\geqq 1} n|a_n|r^{n-1}$ は収束する。

ｉ），ⅱ），ⅲ）より、優級数 $M_n = n|a_n|r^{n-1}$ と置けば、Ｉ章の定理（６．１１）から $\phi(h) = \sum_{n\geqq 1}\phi_n(h)$（$a_0$ は消えている。）は $|h|<r-|z-a|$ で連続であることがわかる。

特に、$h=0$ の場合も連続なので、$\lim_{h\neq 0, h\to 0}\phi(h)$ は存在し、$\phi(0)$ に等しくなる。

よって

$$\lim_{h\neq 0, h\to 0}\phi(h) = \lim_{h\neq 0, h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n\geqq 1} na_n(z-a)^{n-1}$$

次に、$na_n = b_n$ として

$f' = \sum_{n\geqq 1} b_n(z-a)^{n-1}$ とすれば、

$$\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h} = \sum_{n\geqq 1} b_n\frac{(z+h-a)^{n-1}-(z-a)^{n-1}}{h}\quad(h\neq 0)$$

$$= \sum_{n\geqq 2} b_n\{(z+h-a)^{n-2}+(z+h-a)^{n-3}(z-a)+\cdots+(z-a)^{n-2}\}$$

$\phi_n'(h) = b_n\{(z+h-a)^{n-2}+(z+h-a)^{n-3}(z-a)+\cdots+(z-a)^{n-2}\}$ とす

れば、$\phi_n'(0) = b_n(n-1)(z-a)^{n-2} = n(n-1)(z-a)^{n-2}$ となり、今証明したことを適用すれば、f'' が存在し、収束半径 R も変わらない。

$$f''(z) = \sum_{n\geqq 2} n(n-1)a_n(z-a)^{n-2}$$

を得る。

よって、繰り返せば、任意の $k \in N$ に対し、

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geqq k} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))a_n(z-a)^{n-k} \ , \ z \in D$$

$$= k(k-1)\cdots(k-(k-1))a_k+(k+1)k\cdots(k+1-(k-1))a_{k+1}(z-a)^1+\cdots$$

よって、$z = a$ のとき $f^{(k)}(a) = k!a_k$ となる。

（P．173　例8）

$f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ がコーシー・リーマンの方程式を満たすか確かめてみよう。

$z = x+iy$ とすれば、命題4．7（4．25）から $(x, y)^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ より

$1-z = 1-x-iy = (1-x)+i(-y)$ ということであるので

$(1-x, -y)^{-1} = \left(\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}, \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)$ となる。

つまり、$u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$　$v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$ なので

$$u_x = \frac{-1((1-x)^2+y^2)-2(1-x)^2\cdot(-1)}{((1-x)^2+y^2)^2} = \frac{2(1-x)^2-((1-x)^2+y^2)}{((1-x)^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^2-y^2}{((1-x)^2+y^2)^2}$$

$$v_y = \frac{(1-x)^2+y^2-2y\cdot y}{((1-x)^2+y^2)^2} = \frac{(1-x)^2-y^2}{((1-x)^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{-2y(1-x)}{((1-x)^2+y^2)^2} \qquad v_x = \frac{2y(1-x)}{((1-x)^2+y^2)^2}$$

以上により、$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ なので、コーシー・リーマンの方程式が成り立ち

$$f'(z)=\frac{(1-x)^2-y^2}{((1-x)^2+y^2)^2}+i\frac{2y(1-x)}{((1-x)^2+y^2)^2}\quad\cdots ①$$

ちなみに、一変数として普通に微分して、$f'(z)=-1\cdot\dfrac{1}{(1-z)^2}\cdot(-1)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$

となる。

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-x-iy)\cdot(1-x-iy)}$$

$$\boxed{（注）\quad \frac{1}{a-ib}=\frac{a+ib}{a^2+b^2}}$$

$$=\left(\frac{(1-x)+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^2=\frac{(1-x)^2-y^2+i\,2y(1-x)}{((1-x)^2+y^2)^2}$$ よって、①と一致する。

本題に戻る。

$$f(z)=\frac{1}{1-z}$$

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$f^{(k)}(z)=\dfrac{k!}{(1-z)^{k+1}}$ と仮定すれば、

$$f^{(k+1)}(z)=-1\cdot-(k+1)k!\frac{(1-z)^k}{(1-z)^{2(k+1)}}=\frac{(k+1)!}{(1-z)^{k+2}}$$

よって、帰納法で証明できた。

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-(k-1))z^{n-k}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}}=\frac{\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-(k-1))z^{n-k}}{k!}$$

ここで、

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$$

なので、$n-k=m$ とおけば $n=k+m$ であり、 n の値を $k\to\infty$ を m の値を $0\to\infty$ と置き換えることができる。よって

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))z^{n-k}}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}z^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{n-k}z^{n-k}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k}{m}z^{m}$$

を得る。

（P．173　定理2．5系）

$$F(z) = \sum_{n\geqq 0}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}+C = a_0(z-a)+a_1(z-a)^2+\cdots$$

の収束半径 $R>0$ ならば、定理2．5から、$F(z)$ は収束円板上で正則で、

$F'(z) = \sum_{n\geqq 0} a_n(z-a)^n$ となる。また、定理2．4より、両者とも収束半径は一致する。

（円周の長さは直径に比例する）

この事実は小学生でも知っている事だとは思うが、それを**幾何学的に厳密に証明する**ことは可能であるか？　もし知っている人がいれば教えてほしい。

（P．176　（3．4）について）

Ⅰ章定理5．8から、$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ なので、$a_k = \frac{z^k}{k!}$ ，$b_{n-k} = \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$ であり

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}n!}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

（P．178　（3．10）について）

実数 x に収束する有理数列 $(x_n)_{n\in N}$ を取り、$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{x_n}$ と定義する。

$exp\,(x_n) = e^{x_n}$ は、x_n が有理数なので定義できる。また、exp が連続であることから Ⅰ章定理5．5　d)より、$\lim_{n\to\infty} exp\,(x_n)$ は収束し存在する。

つまり、$exp\,(x) = \lim_{n\to\infty} exp\,(x_n)$ である。また、$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{x_n}$ と定義したので、

$exp\,(x) = \lim_{n\to\infty} exp\,(x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^x$ が成り立つ。

（P．179　三角関数の収束半径）

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^n$ の $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ ，$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}$

より　$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \right| = \left| (2n+2)(2n+1) \right| \to \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^n$ の $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ ，$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$

より　$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| = \left| (2n+3)(2n+2) \right| \to \infty$

よって、共に収束半径は ∞ となる。

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \cdots$$

なので、$\cos z = \cos(-z)$, $\sin(-z) = -\sin z$

（P．180　オイラーの公式）

$iz \in C$ なので、P.178 から e^{iz} と書いても、意味するところは $\sum_{n \geqq 0} \frac{z^n}{n!}$ であることに注意したい。

$$exp(iz) = 1 + iz - \frac{1}{2} z^2 - i\frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + i\frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{6!} z^6 - i\frac{1}{7!} z^7 + \cdots$$

定理2．3 から、

$$\cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right)$$

$z^2 = w$ として

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + i\frac{(-1)^n z}{(2n+1)!} \right) w^n$$

$$= (1 - iz) + \left(-\frac{1}{2} w - i\frac{1}{3!} zw\right) + \left(\frac{1}{4!} w^2 + i\frac{1}{5!} zw^2\right) + \cdots$$

$$= (1 - iz) + \left(-\frac{1}{2} z^2 - i\frac{1}{3!} z^3\right) + \left(\frac{1}{4!} z^4 + i\frac{1}{5!} z^5\right) + \cdots$$

命題Ｉ章．５．３ ,2) から

$= exp\,(iz)$

$exp\,(iz) = cos\ z + i\ sin\ z$ （オイラーの公式）

また、$exp\,(-iz) = cos\ z - i\ sin\ z$ から

$$cos\,(z+w) = \frac{exp\,(z+w)+exp\,(-i(z+w))}{2} =$$

$$\frac{(cos\ z+i\ sin\ z)(cos\ w+i\ sin\ w)+(cos\ z-i\ sin\ z)(cos\ w-i\ sin\ w)}{2}$$

$$= \frac{cos\ z\ cos\ w+icos\ z\ sin\ w+isin\ z\ cos\ w-sin\ z\ sin\ w+cos\ z\ cos\ w}{2}$$

$$\underline{-icos\ z\ sin\ w-isin\ z\ cos\ w-sin\ z\ sin\ w}$$

$$= \frac{2cos\ z\ cos\ w-2sin\ z\ sin\ w}{2} = cos\ z\ cos\ w-sin\ z\ sin\ w$$ 他の公式も次から次へと導き出せる。

（P．181 $sin\ x$、$cos\ x$）

x が実変数の場合、命題Ｉ章．５．３ ,2) から

$$sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = (x-\frac{1}{3!}x^3)+(\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7)+\cdots$$

$$+(\frac{(-1)^{2n}}{(4n+1)!}x^{4n+1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+3)!}x^{4n+3})+\cdots$$

$$\frac{(-1)^{2n}}{(4n+1)!}x^{4n+1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+3)!}x^{4n+3} = \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}(1+\frac{(4n+1)!\cdot(-1)}{(4n+3)!}x^2)$$

$$= \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}(1-\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)})$$

よって

$$sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}(1-\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)})$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\{(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4!}x^4)+(\frac{1}{6!}x^6-\frac{1}{8!}x^8)+\cdots$$

$$+(\frac{(-1)^{2n}}{(4n+2)!}x^{4n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+4)!}x^{4n+4})+\cdots\}$$

$$\frac{(-1)^{2n}}{(4n+2)!}x^{4n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+4)!}x^{4n+4}=\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}(1+\frac{(4n+2)!\cdot(-1)}{(4n+4)!}x^2)$$

$$=\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}(1-\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)})$$

$$\cos x=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}(1-\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)})$$

(P. 181 $\cos x=?$)

$\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}=-1+2\cos^2\frac{\pi}{4}=0\ \rightarrow\ 2\cos^2\frac{\pi}{4}=1$

よって、$\cos\frac{\pi}{4}>0$　なので　$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(3x)=\sin(2x+x)=\sin(2x)\cos x+\cos(2x)\sin x$

$=2\sin x\cos^2x+\sin x(\cos^2x-\sin^2x)$

$=3\sin x\cos^2x-\sin^3x=3\sin x(1-\sin^2x)-\sin^3x=3\sin x-4\sin^3x$

よって

$\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3x$ の両辺を微分すると

$3\cos(3x)=3\cos x-12\sin^2x\cos x=3\cos x-12\cos x(1-\cos^2x)$

$=3\cos x-12\cos x+12\cos^3x$

$=-9\cos x+12\cos^3x$

$\cos(3x)=-3\cos x+4\cos^3x$

$\cos(3\times\frac{\pi}{6})=-3\cos\frac{\pi}{6}+4\cos^3\frac{\pi}{6}=0$

$\rightarrow$　$\cos\frac{\pi}{6}>0$　なので　$4\cos^2\frac{\pi}{6}=3$　よって、$\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}$

$\rightarrow$　$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

このように、三角関数を整級数で定義したが、幾何学的に定義した値と一致する。

(P. 183 (3.38) $e(t)$ は $[0\ ,\pi]$ から U_1 への単写)

$|\ e(t)\ | = e(t)\ \overline{e(t)} = (\ \cos t + i \sin t\ )(\ \cos t - i \sin t\ ) = 1$ であるから、$e(t)$ の像は単位円周上にある。$t \in [0\ ,\ \pi]$ のとき $\sin t \geqq 0$ なので、$(\ \cos t\ ,\ i \sin t\ ) \in U_1$ になる。しかも、$t \in [0\ ,\ \pi]$ で $(\ \cos t\ )' = -\sin t \leqq 0$ なので、$\cos t$ は $t \in [0\ ,\ \pi]$ で狭義単調減少となる。したがって、$t \neq t' \in [0\ ,\ \pi] \Rightarrow \cos t \neq \cos t'$ つまり、$(\ \cos t\ ,\ i \sin t\ ) \neq (\ \cos t'\ ,\ i \sin t'\ )$ 単写となる。

(P. 183 定理 3. 1 の証明の後半)

(3.33) から $\sin(\pi + t) = -\sin t$ なので、$t \in [\pi\ ,\ 2\pi]$ で $\sin t \leqq 0$ また、$t \in [\pi\ ,\ 2\pi]$ で $(\ \cos t\ )' = -\sin t \geqq 0$ なので、$\cos t$ は $t \in [\pi\ ,\ 2\pi]$ で狭義単調増加となる。よって単写となり、全写についても同様に証明できる。

最後に、e は $[0\ ,\ \pi]$ から U_1 への全単写 であり $[\pi\ ,\ 2\pi]$ から U_2 への全単写なので、$[0\ ,\ 2\pi]$ から U への全写である。しかし、$e(0) = e(2\pi) = 1 + i0$ となってしまうので、単写とするために、2π を除き、$[0\ ,\ 2\pi)$ としている。

三角関数を幾何学的に定義してあればこのような証明は必要ないが、上手く結びつけている点ではすばらしい。ところで、単写、全写の「写」であるが、「射」を使っている本も多い。以後混じることがあるかもしれないが容赦願いたい。

(P. 183 準同型写像とは)

2つの群 $G\ ,\ G'$ に対して、写像 $f : G \rightarrow G'$ が性質

$f(\ x\ y\ ) = f(x)\ f(y) \quad (\ x\ ,\ y \in G\ )$

をみたすとき、f を G から G' への準同型写像という。特に、f が全単写のとき、f を同型写像という。

$f : G \rightarrow G'$ が準同型写像ならば

$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}\ ,\ f(e) = e'$

ただし、$e\ ,\ e'$ はそれぞれ $G\ ,\ G'$ の単位元である。

なぜなら、

$e^2 = e$ だから $f(e)^2 = f(e^2) = f(e)$ 両辺に $f(e)^{-1}$ を掛けると

$f(e) = f(e)^{-1} f(e) = e'$

次に、任意の $x \in G$ に対して、$xx^{-1} = e$ に f を施して

$f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e'$

ゆえに、$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}e' = f(x)^{-1}$

U が群になっているかであるが、$e(t_1)$, $e(t_2) \in U$ に対し、

$e(t_1)e(t_2) = e^{i(t_1+t_2)} = \cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)$

$|e(t_1)e(t_2)|^2 = \cos^2(t_1+t_2)+\sin^2(t_1+t_2) = 1$

したがって、通常の積に関して閉じている。また、$e(0) = 1$ が単位元になる。

逆元は $e(t)$ に対し $e(-t)$ としたいところだが、$t \in [0 , 2\pi)$ なので、

$e(2\pi-t) = \cos(2\pi-t)+i\sin(2\pi-t)$

$= \cos(-t)+i\sin(-t) = \cos t-i\sin t = e^{-it} = \cos t-i\sin t$

から、$e(2\pi-t)$ を逆元とすれば、$2\pi-t \in [0 , 2\pi)$ とできる。

（詳しくは群論の本を参考にせよ。）

（P．184　定理3．2　2)の⇒の補足）

$n \leqq \dfrac{t}{2\pi} < n+1 \quad \rightarrow \quad 2\pi n \leqq t < 2\pi n+2\pi \quad \rightarrow \quad 0 \leqq t-2\pi n < 2\pi$

ここで、$s = t-2\pi n$　とすれば $0 \leqq s < 2\pi$　となる。

$e(t) = 1$ ならば、$e(s) = e(t)(\cos(-2\pi n)+i\sin(-2\pi n)) = 1$ だから、定理3．1

により単位円周 U への全単写だったので $s = 0$ ということになる。

（P．184　定義 5）

任意の 0 でない複素数 z に対し、$\dfrac{z}{|z|} \in U$ だから

(3.39)　$z = |z|\,e^{i\theta} = |z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

となる実数 θ が存在する。しかし、それは一つとは限らない。(3.39) を満たす

θ , θ' があったとすれば、$\theta-\theta' = 2\pi n \in 2\pi Z$ である。

この θ を z の偏角といい、$\arg z$ と書く。

したがって、$\theta \in [0 , 2\pi)$ に限定すれば、$\arg z = \theta+2\pi n$（$n \in Z$）となる。

（P．185　定理3．3）

n は固定されているので、n_0 とする。

定理3．2 ,4) から、$\exp(z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow z = 0+2k\pi i$,（$k \in Z$）　よって、

$exp(in_0\theta)=1 \Rightarrow in_0\theta = 2k\pi i\ (k \in Z) \Rightarrow n_0\theta = 2k\pi\ (k \in Z)$となる。

そこで、z はある $k \in Z$ に対す $z_k = exp(\frac{2k\pi}{n_0}i)$ と一致する。

$k' - k = an_0\ (a, n_0 \in Z)$とすれば、$k' = an_0 + k$ なので、

$$z_{k'} = exp\left(\frac{2(an_0+k)\pi}{n_0}i\right) = exp\left(2a\pi i + \frac{2k\pi}{n_0}i\right) = exp\left(\frac{2k\pi}{n_0}i\right) = z_k$$

よって、$\frac{2k\pi}{n_0} \in [0, 2\pi)$とするために、$0 \leqq k < k' \leqq n_0 - 1$ とすれば、

$0 \leqq \frac{2k\pi}{n_0} \neq \frac{2k'\pi}{n_0} < 2\pi$　なので、定理3．1より $z_k \neq z_{k'}$ となる。定理3．2ではなく定理3．1だと思う。逆は明らかである。

（P．185　注意1について）

点 $c \in C$ を中心とする半径 r の円周を $z(t) = c + re^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$と定義し、整級数から定義 された関数から $\ell = 2\pi r$ を導き出しているが、私には納得できない。なぜなら、どこかに循環論法がありそうだからである。

（P．186　内積について）

ここでは、$z_1 = \begin{pmatrix} r_1\cos\theta_1 \\ r_1\sin\theta_1 \end{pmatrix}$，$z_2 = \begin{pmatrix} r_2\cos\theta_2 \\ r_2\sin\theta_2 \end{pmatrix}$ なので、どちらも実ベクトルなので R^2 での普通の内積を使っている。ユニタリー計量ではない。

（P．186　例1　物理でよく使うので詳しく！）

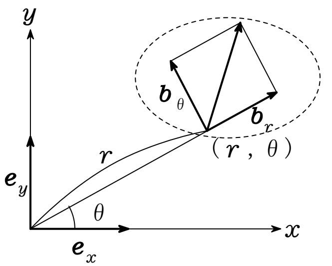
$$ie^{i\theta} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)e^{i\theta} = e^{\frac{\pi}{2}i}e^{i\theta} = e^{(\theta+\frac{\pi}{2})i}$$

つまり、$ie^{i\theta}$ は $e^{i\theta}$ の方向から $\frac{\pi}{2}$ だけ正の方向に回転した方向を向くことになる。

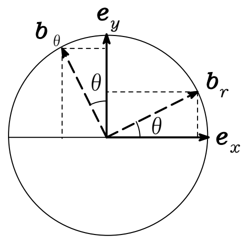
ここで、R^2 の正規直交基底 $(e^{i\theta}, ie^{i\theta})$ とあるが、極座標で考えると

これは、$e^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，$ie^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ を意味している。

したがって、長さはそれぞれ 1 で直交しているという意味である。



原点に
基底を
重ねる。



$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_r = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{b}_\theta = -\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{v}_z \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_\theta) = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって、底の変換行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となる。

したがって、$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$ とした場合

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_\theta)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$ … ①

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{微分する}} \begin{cases} v_x = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \\ v_y = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix} \quad \cdots \ ②$$

①、② から

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \end{pmatrix}$$

よって、$z' = r'e^{i\theta} + r\theta' ie^{i\theta} \rightarrow \boldsymbol{v} = r'\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\theta'\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$z' = r'e^{i\theta} + r\theta' ie^{i\theta} \rightarrow z'' = r''e^{i\theta} + r'\theta' ie^{i\theta} + r'\theta' ie^{i\theta} + r(\theta' ie^{i\theta})'$$

$$= r''e^{i\theta} + r'\theta' ie^{i\theta} + r'\theta' ie^{i\theta} + r(\theta'' ie^{i\theta} + \theta'^2 i^2 e^{i\theta})$$

$$= r''e^{i\theta} + r'\theta' ie^{i\theta} + r'\theta' ie^{i\theta} + r(\theta'' ie^{i\theta} - \theta'^2 e^{i\theta})$$

$= r''e^{i\theta} + 2r'\theta' ie^{i\theta} + r\theta'' ie^{i\theta} - r\theta'^2 e^{i\theta}$

$= (r'' - r\theta'^2)e^{i\theta} + (2r'\theta' + r\theta'')ie^{i\theta}$

加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\begin{cases} v_x = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \\ v_y = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \end{cases}$$

もう一度 t で微分して

$a_x = r''\cos\theta - r'\theta'\sin\theta - r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r\theta'^2\cos\theta$

$= r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r\theta'^2\cos\theta$

$= (r'' - r\theta'^2)\cos\theta - (2r'\theta' + r\theta'')\sin\theta$

$a_y = r''\sin\theta + r'\theta'\cos\theta + r'\theta'\cos\theta + r\theta''\cos\theta - r\theta'^2\sin\theta$

$= r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta + r\theta''\cos\theta - r\theta'^2\sin\theta$

$= (r'' - r\theta'^2)\sin\theta + (2r'\theta' + r\theta'')\cos\theta$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = (r'' - r\theta'^2)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (2r'\theta' + r\theta'')\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

底を（ $e^{i\theta}$, $ie^{i\theta}$ ）と見るか（ $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ）と見るかの違いである。

（P．186 （3．45））

（3．32）より、$\cos z = 0 \rightarrow \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow z + \frac{\pi}{2} = n\pi \ (n \in \boldsymbol{Z})$

$\rightarrow z = -\frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \boldsymbol{Z}) \rightarrow z = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi \ (n-1 \in \boldsymbol{Z})$

$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \boldsymbol{Z}) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = -\sin n\pi = 0$

（P．189 定理3．4の補足）

$f(a) \neq 0$ として

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - a)^k$ と表すことができる。

帰納法で証明する。

（ $n = 0$ ）の場合は $f(z) = a_0$ なので自明である。したがって、n 次については真であると仮定し、$(n+1)$ 次について成り立つことを示す。

$f(z)$ が $(n+1)$ 次の多項式であるとする。

$f(z) = (z-a)g(z) + r$ （ $g(z)$ は n 次の多項式、$r \in C$ ）とすることができる。

帰納法の仮定より

$$f(z) = (z-a)\sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k + r = r + \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^{k+1}$$

ここで、$c_0 = f(a) = r$, $c_1 \sim c_{n+1}$ を一つずらして再度定め直せば

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k (z-a)^{k+1}$$

とすることができる。

次に、くどいようだが上の式の c_k が $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ となることを示す。

$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_k(z-a)^k + \cdots + c_n(z-a)^n$

$c_k(z-a)^k$ を k 回微分すると $kc_k(z-a)^{k-1} \to k(k-1)c_k(z-a)^{k-2} \to \cdots \to k!c_k$ となり、

$f^{(k)}(z) = k!c_k + (z-a)p(z)$ （ $p(z)$ は z の多項式 ） とすることができる。

$$f^{(k)}(a) = k!c_k \quad \to \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

次に、もし $c_k = 0$ ($1 \leqq k \leqq n$) ならば、$f(z) = f(a)$ となり、定数となってしまうので、ある k に対し、$c_k \neq 0$ ($1 \leqq k \leqq n$) となるものがある。そのような k の内最小のものを ℓ とする。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k = c_0 + c_\ell(z-a)^\ell + c_{\ell+1}(z-a)^{\ell+1} + \cdots + c_n(z-a)^n$$

$z = a+h$ とすれば

$f(a+h) = c_0 + c_\ell h^\ell + c_{\ell+1}h^{\ell+1} + \cdots + c_n h^n$, $c_\ell \neq 0$

となる。

$f(a) = c_0$, $c_\ell = A$, $c_{\ell+1} = B$, $\cdots$, $c_n = L$ とし、これを当てはめると

$$f(a+h) = f(a) + Ah^\ell + Bh^{\ell+1} + \cdots + Lh^n = f(a) + Ah^\ell\left(1 + \frac{B}{A}h + \cdots + \frac{L}{A}h^{n-\ell}\right)$$

$$= f(a) + Ah^\ell(1 + g(h)) \quad \left(\text{ただし } g(h) = \frac{B}{A}h + \cdots + \frac{L}{A}h^{n-\ell}\right)$$

また、$\ell = n$ ならば $g(h) = 0$ である。

最後に、$|f(a+h)|<|f(a)|$ について、

$1>\delta>0$ とおき、$|h|<\delta$ ならば $|g(h)|<1$, $|Ah^\ell|<|f(a)|$ …（3. 60）
とすることができる。

ここで、$w=\dfrac{f(a)}{A}=re^{i\theta}$ とおけば $|w|=|\dfrac{f(a)}{A}|=\dfrac{|f(a)|}{|A|}=|re^{i\theta}|=r$ となる。

$0<\rho<1$ ならば $\rho\leqq\rho^{\frac{1}{\ell}}$ なので、$0<\rho\leqq\rho^{\frac{1}{\ell}}<\delta$ となる ρ をとる。

$h=\rho^{\frac{1}{\ell}}e^{\frac{(\theta+\pi)}{\ell}i}$ とおけば、(3. 60)から $|h|=\rho^{\frac{1}{\ell}}$, $|Ah^\ell|=|A||h^\ell|<|f(a)|$
なので

$\rho=|h^\ell|<|\dfrac{f(a)}{A}|=r$ となる。

$|f(a)+Ah^\ell|=|Aw+Ah^\ell|=|A||w+h^\ell|=|A||re^{i\theta}+h^\ell|$

$=|A||re^{i\theta}+\rho e^{(\theta+\pi)i}|$

$=|A||re^{i\theta}+\rho e^{\theta i}\times(-1)|=|A||re^{i\theta}-\rho e^{i\theta}|$

$=|A||r-\rho|=|A|(r-\rho)$　（注　$r>\rho$ ）

$=|A|r-|A|\rho=|f(a)|-|Ah^\ell|$

$|h|=\rho^{\frac{1}{\ell}}<\delta$ なので （3. 59)と $g(h)<1$ より

$|f(a+h)|\leqq|f(a)+Ah^\ell|+|Ah^\ell g(h)|$

$<|f(a)|-|Ah^\ell|+|Ah^\ell|$

$=|f(a)|$

（P. 193　定理4. 1）

f は $f(x)=y$ で全単写なので $f^{-1}(y)=x$

$f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)=f^{-1}(y+k)-x=h \Leftrightarrow f^{-1}(y+k)=x+h$

$\Leftrightarrow y+k=f(x+h) \Leftrightarrow f(x+h)-y=f(x+h)-f(x)=k$

なぜ、f , f^{-1} が全単写なら、$h\neq0 \Leftrightarrow k\neq0$ なのか？

$h\neq0$, $k=0$ だったとする。 ある $x\in K$ に対し、$f(x+h)=f(x)$ となる。つまり

単写なので $x+h=x$ ということになる。このことは、$h\neq 0$ に反する。

よって、$k\neq 0$ である。

逆に、$k\neq 0$, $h=0$ だったとすれば、ある $y\in K$ に対し、$f^{-1}(y+k)=f^{-1}(y)$ となる。同じように単写なので、$y+k=y$ なので、$k\neq 0$ に反する。

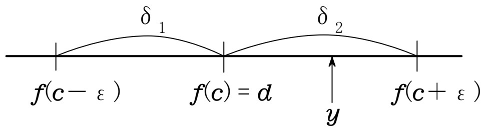
よって、$k\neq 0$ である。

また、コーシー・リーマンの方程式は $f'(x)$ が複素数になることから $\dfrac{1}{f'(x)}$ と表すことに使われている。

（P．194　定理4．2）

任意の $f(x)\in f(I)$ に対し、$a\leqq x\leqq b$ なので、$f(a)\leqq f(x)\leqq f(b)$ から、$f(x)\in[\,f(a)\,,f(b)\,]$ である。逆に、任意の γ（$f(a)\leqq\gamma\leqq f(b)$）に対し、中間値の定理から、$f(c)=\gamma$ となる $c\in I$ が存在するので、$\gamma\in f(I)$ となる。

3) については



$f(c-\varepsilon)<f(c)<f(c+\varepsilon)$

であるから

$\delta=Min\{\,f(c)-f(c-\varepsilon)\,,f(c+\varepsilon)-f(c)\,\}=Min\{\,\delta_1\,,\ \delta_2\}$

と置けば、$f(c)=d$, $y\in J$ に対して、f が狭義単調増加 $\Leftrightarrow f^{-1}$ が狭義単調増加なので

$|\,y-d\,|<\delta\ \Rightarrow\ f(c-\varepsilon)<y<f(c+\varepsilon)$

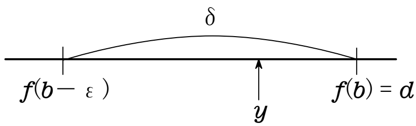
$\Leftrightarrow\ c-\varepsilon<f^{-1}(y)<c+\varepsilon$

$\Leftrightarrow\ f^{-1}(d)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(d)+\varepsilon$

$\Leftrightarrow\ |\,f^{-1}(d)-f^{-1}(y)\,|<\varepsilon$

これは、f^{-1} が $d=f(c)$ で連続であることを示す。

次に、c が I の端点である場合、つまり、$c=b$ の場合を考える。$b-\varepsilon$ が I に属するとする。$f(b)=d$ 、$y\in J$ に対して、d は J の端点になるので、$y<d$ としてよい。



$|\,d-y\,|=d-y<\delta$

$\Rightarrow f(b-\varepsilon)<y<f(b)$

$\Leftrightarrow b-\varepsilon<f^{-1}(y)<b$

$\Leftrightarrow f^{-1}(d)-\varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(d)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(d)-f^{-1}(y) < \varepsilon\ ,\ f^{-1}(y) < f^{-1}(d)$

$\Leftrightarrow | f^{-1}(d)-f^{-1}(y) | = f^{-1}(d)-f^{-1}(y) < \varepsilon$

よって、端点 $d = f(b)$ で連続となる。$c = a$ の場合も同様にして示すことができる。

(P. 195　注意1)

$\ell og_e x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ なので、$\ell og_e 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$

(P. 196 (4. 11))

$z = x+iy = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u(\cos v+i\sin v)$

$\Leftrightarrow x = e^u \cos v\ ,\ y = e^u \sin v$

$| z | = \sqrt{e^{2u}\cos^2 v+e^{2u}\sin^2 v} = e^u$　なので、

$z = e^u \cdot e^{iv} \Leftrightarrow | z | = e^u\ ,\ v \equiv \arg z\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$

$\Leftrightarrow u = \ell og | z |\ ,\ v \equiv \arg z\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$

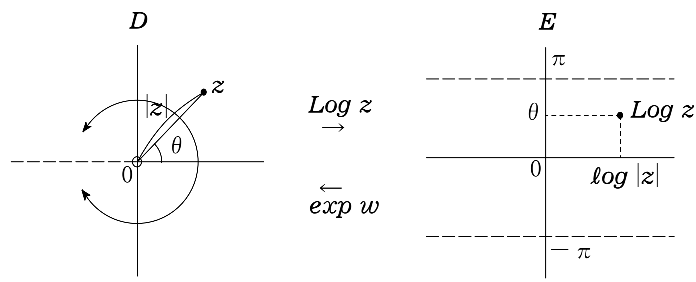
(P. 197 (4. 15))

$\{ \ell og\ |z|\ \mid 0 < |z| < +\infty \} = \{ u \mid u \in R \}$ がわかればよい。

$\ell og\ |z| \in R$ なので、$\{ \ell og\ |z|\ \mid 0 < |z| < +\infty \} \subset \{ u \mid u \in R \}$

逆に (4. 9)から、$\lim_{|z|\to+\infty} \ell og\ |z| = +\infty\ ,\ \lim_{|z|\to 0} \ell og\ |z| = -\infty$ であり、$\ell og\ x$ は連続なので、任意の u に対し、$u = \ell og\ x$ となる $x > 0$ が存在する。$|z| = x$ とおけば、$u = \ell og\ |z|$ となり、$\{ \ell og\ |z|\ \mid 0 < |z| < +\infty \} \supset \{ u \mid u \in R \}$

よって、$\{ \ell og\ |z|\ \mid 0 < |z| < +\infty \} = \{ u \mid u \in R \}$



（P．197　注意2）

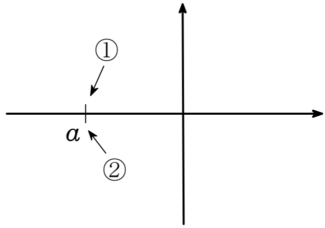
①の場合、$z \to a$ ならば、π または $-\pi$ を $Log\ z$ 定義域に入れると、

$Log\ z = \ell og\ a + i\pi$

②の場合は

$Log\ z = \ell og\ a - i\pi$

となってしまうからである。



また、$Log\ z$ は連続とあるが、$exp\ w : E \to D$ であり、全単射である。正則であるということは、当然2変数のベクトル値関数としても微分可能で連続である。

また、$(exp\ w)' = u_x + i\, v_x \neq 0$ (3.5) なので、$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2$ $\neq 0$ よって、逆関数定理 I から、$exp\ w$ の逆関数 $Log\ z$ は連続となる。

ゆえに、定理4．1から $Log\ z$ は正則となる。

また、$(exp\ w)' = exp\ w = z$ なので、$(Log\ z)' = \dfrac{1}{(exp\ w)'} = \dfrac{1}{z}$ （$z \in D$）が成り立つ。

（P．197 （4．17））

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \cdots$$

$$f'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$$

（P．197 （4．18））

$$Log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(-1)^{-1}}{n} z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1)$$

したがって

$$\frac{1}{2}\left(Log(1+z) - Log(1-z) \right) = \frac{1}{2} Log\frac{1+z}{1-z}$$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^{n-1}}{2n} \right) z^n$

ここで、$1+(-1)^{n-1} = 0$ (n が偶数) = 2 (n が奇数) なので、

$= z + \frac{0}{4}z^2 + \frac{2}{6}z^3 + \frac{0}{8}z^4 + \frac{2}{10}z^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ ($|z| < 1$)

(P. 198 一般の冪)

任意の $a > 0 \in R$ と $z \in C$ に対して $a^z = exp\,(z\,\ell og\,a)$

(4.20) $a^z a^w = exp\,(z\,\ell og\,a) exp\,(w\,\ell og\,a) = exp\,(z\,\ell og\,a + w\,\ell og\,a)$

$= exp\,(\,(z+w)\,\ell og\,a\,) = a^{z+w}$

(3.7) $x \in R \Rightarrow 0 < exp\,x \in R$

$x\,\ell og\,a \in R$ なので $a^x = exp\,(x\,\ell og\,a) > 0$ また、(4.4) から $\ell og\,(a^x) = x\,\ell og\,a$

(4.22) $x, y \in R \Rightarrow \ell og\,(a^x)^y = y\,\ell og\,(a^x) = xy\,\ell og\,a = \ell og\,(a^{xy})$

$a^0 = exp\,(0\,\ell og\,a\,) = exp\,0 = 1$ から

(4.23) $1 \leqq m \in N \Rightarrow a^m = a^{(1+1+\cdots+1)} = aa\cdots a$, $a^{m-m} = a^m a^{-m} = a^0 = 1$

よって、$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(P. 198 冪関数)

$c \in C$ を定数とし、$x > 0$ を変数とする。 $x^c = exp\,(c\,\ell og\,x)$ と定義すれば

(4.24) $(x^c)' = (\,exp\,(c\,\ell og\,x)\,)' = \frac{c}{x} exp\,(c\,\ell og\,x) = \frac{c}{x} x^c = cx^{c-1}$ (最後の等号は (4.20) による。)

(P. 199 (4. 26))

$n \in N, m \in C$ に注意！

(4.26) $n\binom{m}{n} + (n+1)\binom{m}{n+1} = m\binom{m}{n}$

左辺を計算すると、定義から

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)n}{n!} + \frac{m(m-1)\cdots(m-(n+1)+1)(n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots(\boldsymbol{m}-\overset{\text{大}}{\boldsymbol{n}}+1)n + m(m-1)\cdots(\boldsymbol{m}\overset{\text{小}}{-}\boldsymbol{n})}{n!}$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)\{\, n+m-n \,\}}{n!}$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)m}{n!} = m\binom{m}{n}$$

（P．199　定理4．3）

$|z| < 1$ ならば

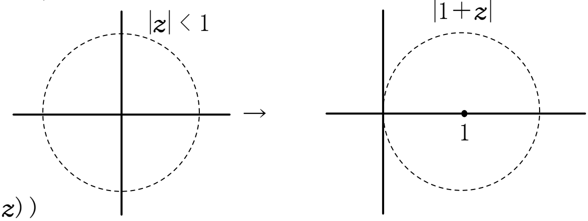
$1+z \in D$

よって

$(1+z)^m$

$= exp\,(m\, Log\,(1+z))$

とおける。



$m \in N$ のとき、$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$ は m 次多項式である。なぜなら、

$$\binom{4}{5} = \frac{4\times(4-1)\cdots(4-4)}{5!} = 0$$

$$\binom{4}{6} = \frac{4\times(4-1)(4-2)\cdots(4-4)(4-5)}{6!} = 0 = \binom{4}{7} = \binom{4}{8} = \cdots$$

のように、積の因数に 0 がまじってしまうからである。

よって、m 次多項式なので、収束半径 R は $+\infty$ となる。

$m \notin N$ の場合は、定理2．2により

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}}{\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \times \frac{(n+1)!}{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1$$

したがって、$|\,z\,| < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$ は収束するから、和を $g(z)$ とすれば

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n = 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \binom{m}{3} z^3 + \cdots$$

であり、定理2．5により

$$g'(z) = \binom{m}{1} + 2\binom{m}{2} z + 3\binom{m}{3} z^2 + 4\binom{m}{4} z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n+1} (n+1) z^n$$

$$(4.28) \qquad (1+z)g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n+1} (n+1)(1+z) z^n$$

また、(4．26)により、

$$= \left\{ \binom{m}{1} + 2\binom{m}{2} z + 3\binom{m}{3} z^2 + 4\binom{m}{4} z^3 + \cdots \right\} (1+z)$$

$$= \binom{m}{1} + \binom{m}{1} z + 2\binom{m}{2} z + 2\binom{m}{2} z^2 + 3\binom{m}{3} z^2 + 3\binom{m}{3} z^3 + 4\binom{m}{4} z^4 + \cdots$$

$$= \binom{m}{1} + \left\{\binom{m}{1} + 2\binom{m}{2}\right\} z + \left\{2\binom{m}{2} + 3\binom{m}{3}\right\} z^2 + \left\{3\binom{m}{3} + 4\binom{m}{4}\right\} z^4 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n\binom{m}{n} + (n+1)\binom{m}{n+1} \right\} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} m\binom{m}{n} z^n$$

$$= m\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n = mg(z)$$

よって、$(1+z)f\,'(z) = mf(z)$, $(1+z)g'(z) = mg(z)$ となることがわかった。

また、(4.27) の $\dfrac{m}{1+z}(1+z)^m$ であるが、$1+z \in D$ なので

$(1+z)^{-1} = exp\,(-Log\,(1+z))$, $(1+z)^m = exp\,(m\,Log\,(1+z))$ だから

$$\frac{m}{1+z}(1+z)^m = m\,exp\,(m\,Log\,(1+z)) \times exp\,(-Log\,(1+z))$$

$$= m\,exp\,(m\,Log\,(1+z) - Log\,(1+z)) = m\,exp\,((m-1)\,Log\,(1+z))$$

$= m(1+z)^{m-1}$ となる。

ここで確認だが、$a \in D$, x , $y \in R$ の場合

$a^x = exp\,(x\,Log\,a)$, $a^y = exp\,(y\,Log\,a)$

したがって、$a^x a^y = exp\,(x\,Log\,a) \times exp\,(y\,Log\,a) = exp\,(x\,Log\,a + y\,Log\,a)$

$= exp\,((x+y)\,Log\,a) = a^{x+y}$

となり、今までどおりの指数法則が成り立つ。

（P. 200　例2）

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-\frac{2n}{2}+\frac{2}{2})}{n!}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(\frac{-1-2n+2}{2})}{n!}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n x^n$$

ここで、$\binom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$ の分子の因数の個数は、n 個なので $2^n n!=2\times4\times6\times8\times\cdots\times2n$ であることから

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{(-2)^n n!}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}x^n$$

（P. 201　(4. 31)）

(4.31)　$Arcsin\ x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$　$(-1\leqq x\leqq1)$ 右辺の和 $f(x)$ の収束半径は 1 である。それを示すために、まずは、今までの定理を使うために複素数 z に対する $f(z)$ を考えることにする。また、$w=z^2$ とする。

$z^{2n+1}=w^n\times z$ に注意すれば

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}\dfrac{w^n}{(2n+1)}$　は

定理2．5より、$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n\times(2n+1)}}{\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2(n+1)-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2(n+1)\times(2(n+1)+1)}}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n\times(2n+1)}\cdot\frac{2\times4\times6\times\cdots\times2(n+1)\times(2n+3)}{1\times3\times\cdots\times(2n+1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)^2}\right| = 1 = R$$

なので、$z\times\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}\dfrac{w^n}{(2n+1)}$ は $|z|<1$ で収束する。

よって、$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$ としたとき、定理 2．5 から

$$f\,'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}z^{2n}$$

ゆえに、$-1<x<1$ ならば $-1<x^2<1$ なので、例 2 から

$$f\,'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

以上の内容から、$f\,'(x) = (\,Arcsin\ x\,)'$ を得る。

(4.31) が $x=1$ でも成り立つことを示す。$x=-1$ については奇関数なので、$x=1$ のときに帰着できる。

なぜなら、(4.29) から $sin\ y = x$ ならば $sin(-y) = -sin\ y = -x$

よって、$Arcsin(-x) = -Arcsin\ x$ （奇関数）

右辺については、絶対値をとればよい。

まず、$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{2n+1}$ を第 n 項とする級数が収束することを示す。

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$ だったので、P.48の注意 2 から収束を判定できない。

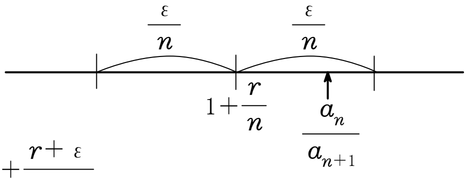
ここで、**ラーベの判定法**を紹介する。

> 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ において、$\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$ とする。このとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、$r>1$ ならば収束し、$r<1$ ならば発散する。

(証明)仮定により、任意の $\varepsilon>0$ に対して整数 N が存在し、$N \leqq n$ なるすべての整数 n について、$\left| n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-r \right| < \varepsilon$ とすることができる。すなわち

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{r}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (n>0)$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}}-\left(1+\frac{r}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (n>0)$$



このことは

つまり　$1+\dfrac{r-\varepsilon}{n} < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1+\dfrac{r+\varepsilon}{n}$

が成立する。まず、$r<1$ とする。$r+\varepsilon<1$ となるように $\varepsilon>0$ をとれば、$c_n=\dfrac{1}{n}$ として、$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1+\dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} \div \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ が成り立つ。$\sum c_n$ は発散級数である。よって、

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ となって、定理5．5(比較定理)によって $\sum a_n$ は発散する。

$r>1$ の場合は少し工夫が必要である。

$\varepsilon>0$ を小さくとって、$r-\varepsilon>1$ とすることができる。このとき、

$$na_n-(n+1)a_{n+1}=na_{n+1}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{n+1}{n}\right)$$

$$>na_{n+1}\left(1+\frac{r-\varepsilon}{n}-1-\frac{1}{n}\right)=(r-\varepsilon-1)a_{n+1}$$

となる。この両辺を $n=N,\cdots,m$ について加えると

$$\boxed{\begin{array}{c}
Na_N-(N+1)a_{N+1}>(r-\varepsilon-1)a_{N+1}\\
(N+1)a_{N+1}-(N+2)a_{N+2}>(r-\varepsilon-1)a_{N+2}\\
(N+2)a_{N+2}-(N+3)a_{N+3}>(r-\varepsilon-1)a_{N+3}\\
\downarrow\\
ma_m-(m+1)a_{m+1}>(r-\varepsilon-1)a_{m+1}
\end{array}}$$

よって、$Na_N-(m+1)a_{m+1}>(r-\varepsilon-1)\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}$

また、$Na_N>Na_N-(m+1)a_{m+1}$ なので、

$Na_N>(r-\varepsilon-1)\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}$

を得る。

$r-\varepsilon-1>0$ であるから、$S_m=\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}$ としたとき、$\dfrac{Na_N}{r-\varepsilon-1}>S_m$ となるので

有界単調増加となり、$\lim_{m\to\infty}S_m$ が存在することになる。つまり、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が存在すること

になる。

さて、このラーベの判定法を用いると、

$$a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1},\ a_{n+1}=\frac{(2n+2-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{1}{2n+2+1}=\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{1}{2n+3}$$

なので

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\times\frac{(2n+2)!!(2n+3)}{(2n+1)!!}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{4n^2+10n+6-4n^2-4n-1}{4n^2+4n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}>1$$

なので、収束することがわかる。

したがって、定理Ⅰ．6．11　によって $f(x)$ は $[0,1]$ で連続となる。

ここで、当然かもしれないが、次の事を証明する。

$f(x)=g(x)$ $(x<a)$ のとき、f,g が $x=a$ で連続ならば、$f(a)=g(a)$ となる。

任意の $\varepsilon>0$ に対し、f,g は a で連続なので、$\delta=\dfrac{1}{n}$ として、

$0<a-x<\dfrac{1}{n}$　ならば、$|f(x)-f(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|g(x)-g(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となるような

n が存在する。

$|f(a)-g(a)|=|f(a)-f(x)+f(x)-g(a)|=|f(a)-f(x)+g(x)-g(a)|$

$\leqq |f(a)-f(x)|+|g(x)-g(a)| < \varepsilon$

そこで、もし、$f(a) \neq g(a)$ だとしたら、$|f(a)-g(a)| = \varepsilon$ とすれば矛盾する。

よって、$f(a) = g(a)$ となる。

以上で $Arcsin\ x$, $f(x)$ はどちらも $-1 < x < 1$ で $Arcsin\ x = f(x)$ であり、

$x = 1$ で連続なので、$Arcsin\ 1 = f(1)$ を得る。$x = -1$ についても同様である。

(P. 201 $Arccos\ x$)

$y = Arccos\ x$ は $x \in [-1, 1] = J$ で定義された連続関数である。$x \in J$, $y \in [0, \pi] = I_0$ に対して

(4.33) $x = \cos y \Leftrightarrow y = Arccos\ x$

である。また、定理4．1と $\sin y > 0$ ($y \in (0, \pi)$) により、

(4.34) $$(Arccos\ x)' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

上と同様に $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$ としたとき、定理 2．5 から

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} z^{2n}$$

ゆえに、$-1 < x < 1$ ならば $-1 < x^2 < 1$ なので、例 2 から

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって、$(Arccos\ x)' = -f'(x) \rightarrow Arccos\ x + f(x) = c$

$x = 0$ のとき、$c = \frac{\pi}{2}$ なので

$$Arccos\ x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} \quad (-1 < x < 1)$$

となる。

$x = \pm 1$ に対しては、$Arcsin\ x$ と同様にして

$$Arccos\ x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

(P. 202 (4. 36))

$x = \tan y \rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{\sin y}{\cos y}\right)' = \dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

$= 1 + x^2$

$(\mathit{Arctan}\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\ (x \in R)$ が成り立つ。

(P. 202 (4. 37))

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} z^{2n+1}$ とした場合、$z^2 = w$ とすれば、

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} w^n$ は、$a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)}$

$\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} \times \dfrac{(2n+3)}{(-1)^{n+1}}\right| = \left|\dfrac{2n+3}{2n+1}\right| \rightarrow 1\ (n \rightarrow \infty)$

よって、$f(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} z^{2n+1}$ は $|z| < 1$ で収束する。

定理2. 5より、

$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$

さて、$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ であるが、それは $\dfrac{1}{1+z^2}$ に等しい。

なぜなら、(P44 例2)の $|w| < 1$, $w \in C$ ならば、$\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \dfrac{1}{1-w}$ なので、

$w = -z^2$ とすれば、$|z| < 1$ から $|w| < 1$ となり $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \dfrac{1}{1+z^2}$ となる。

$f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\ (-1 < x < 1)$

(P. 202 例3)

(4.38) $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (ライプニッツの級数)

(4.37) $\mathit{Arctan}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $(-1 < x < 1)$ は $x = 1$ でも成り立つことを言っている。

まず、$cos\,\frac{\pi}{4} = sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = sin\,\frac{\pi}{4}$ なので $tan\,\frac{\pi}{4} = 1$

ここで、$Arctan\,x$ は $x \in \boldsymbol{R}$ で定義された連続関数である。

よって、 $Arctan\,1 = \frac{\pi}{4}$ となる。

次に、(P44　例2)は $|z| < 1$, $z \in \boldsymbol{C}$ という条件下で使えたのである。

したがって、$x = 1$ の場合には使えない。

そこで、$s = 1 - t + t^2 - \cdots + (-t)^n$ （ $\forall t \in \boldsymbol{R}$ ）とすれば

$-ts = -t + t^2 - \cdots + (-t)^n + (-t)^{n+1}$

$s(1+t) = 1 - (-t)^{n+1}$

$s = \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ （ $\forall t \in \boldsymbol{R}$ ）

移項して、 $\dfrac{1}{1+t} = s + \dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ を得る。 $t = x^2$ とすれば、

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

次に、($Arctan\,x$)' $= \dfrac{1}{1+x^2}$ （ $\forall x \in \boldsymbol{R}$ ）であった。よって

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\,Arctan\,x\,]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ であり、

$$\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2})\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2n+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$

Ⅳ章　定理(3．5)と定理(2．2)により

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx\right| \leqq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3} \to 0 \ (n \to \infty)$$

よって、ライプニッツの級数を得る。

（P. 203　例4）

まずは、三角関数の加法定理から復習する。

$$tan2\alpha = \frac{sin2\alpha}{cos2\alpha} = \frac{2sin\alpha\, cos\alpha}{cos^2\alpha - sin^2 a} = \frac{2sin\alpha\, cos\alpha \times \frac{1}{cos^2\alpha}}{(cos^2\alpha - sin^2 a)\times\frac{1}{cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$$

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{sin\alpha\, cos\beta - cos\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta + sin\alpha\, sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{sin\alpha\, cos\beta}{cos\alpha\, cos\beta} - \frac{cos\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta}}{1 + \frac{sin\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta}} = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha\, tan\beta}$$

$a = Arctan\frac{1}{5}$ とすると、$tan\ a = \frac{1}{5}$ であり、

$$tan\ 2a = \frac{2tan\ a}{1 - tan^2 a} = \frac{2\times\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{2}{5}\times\frac{25}{24} = \frac{5}{12}$$

$$tan\ 4a = \frac{2tan\ 2a}{1 - tan^2 2a} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{144-25} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}$$

$$tan(4a - \frac{\pi}{4}) = \frac{tan\ 4a - tan\frac{\pi}{4}}{1 + tan\ 4a\ tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\frac{1}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1} = \frac{1}{119+120}$$

$$= \frac{1}{239}$$

したがって

$$\frac{\pi}{4} = 4a - (4a - \frac{\pi}{4}) = 4Arctan\frac{1}{5} - Arctan\frac{1}{239}$$

を得る。

（P．207　積分の定義について）

I の分割全体の集合を $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(I)$ とする。$\Delta\in\mathfrak{D}(I)$ に対し、Δ の小区間に適当な順番で番号をつけた自然数の集合を $K(\Delta)$ と表す。$I_k\in\Delta$ に対し、I_k の直径（対角線の長さ）を $d(I_k)$ とするとき、$d(\Delta)=\underset{k\in K(\Delta)}{Max}\, d(I_k)$ で定義し、これを分割 Δ の幅という。

(2.6) $\displaystyle\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi)=J$

となるとき、f は I 上でリーマン可積分であるという。
これは、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\delta>0$ が存在して、$d(\Delta)<\delta$ となる任意の分割 $\Delta\in\mathfrak{D}(I)$ に対し、代表点 $\xi_k\,(k\in K(\Delta))$ の取り方によらず常に

(2.7) $|s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi)-J|<\varepsilon$

が成り立つことを意味する。

ここで注意したい点は、$d(\Delta)\to 0$ とは、分割を細かくしていくのではなく、そのような分割を選ぶのである。したがって、リーマン可積分ならば、n 等分した Δ でも同じ J に収束することになる。しかし、この場合も $d(\Delta)\to 0$ とは n を大きくするのではなく、$d(\Delta)<\delta$ となる n を選ぶと解釈するのである。

（P．208　例2の疑問点）

なぜ任意の分割でなくてはいけないのか。n 等分であっても、ξ_k が任意であれば、問題ないように思えるが、たとえば、$f(\frac{k}{n})$ を $f(\xi_k)$ とすれば、極限は存在しないはずである。そのような例がほしい。

（P．209　定理2．1の補足）

任意の分割 Δ，任意の $\xi_k\in I_k\,(k\in K(\Delta))$ に対して

$s(f+g\,;\,\Delta\,;\,\xi)=s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi)+s(g\,;\,\Delta\,;\,\xi)$

ここで、f，g は I 上可積分なので、いかなる分割 Δ に対しても

$\int_I f$，$\displaystyle\int_I g$ は定まる。したがって、$\displaystyle\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f+g\,;\,\Delta\,;\,\xi)=\int_I f+\int_I g$

よって、$f+g$ は I 上可積分となり、$\int_I (f+g)=\int_I f+\int_I g$ となる。

（P．209　定理2．2の証明の補足）

f , g は I 上可積分なので、任意の分割 Δ',Δ'' , ξ' , ξ'' の取り方によらず

$$\lim_{d(\Delta')\to 0} s(f\,;\,\Delta'\,;\,\xi') = \int_I f \quad , \quad \lim_{d(\Delta'')\to 0} s(g\,;\,\Delta''\,;\,\xi'') = \int_I g$$

両者を比べるために、共通の分割 Δ , ξ を取ると、仮定から

$s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi) \geqq s(g\,;\,\Delta\,;\,\xi)$

両辺の極限は、それぞれ $\int_I f$, $\int_I g$ 以外ありえないので

$\int_I f \geqq \int_I g$ を得る。

（P．210　定理2．3の証明で押さえておきたいこと）

当たり前かもしれないが、f が有界可積分関数で、$v(I) = 0$ ならば
$\int_I f = 0$ となることである。

（P．211　定理2．4（$I+c$））

n の場合、$I_k = [a_1 , b_1]\times[a_2 , b_2]\times\cdots\times[a_n , b_n]$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ とおくと

$I_k + c = [a_1 + c_1 , b_1 + c_1]\times[a_2 + c_2 , b_2 + c_2]\times\cdots\times[a_n + c_n , b_n + c_n]$

となる。したがって、小区間 I_k の代表点 $\xi_k \in I_k$ に対し、$\xi_k = \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \vdots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ の任意の

i 成分に対して、$\xi_k^i \in [a_i , b_i]$ ならば $a_i \leqq \xi_k^i \leqq b_i$ なので

$a_i + c_i \leqq \xi_k^i + c_i \leqq b_i + c_i$ となり、$\xi_k^i + c_i \in [a_i + c_i , b_i + c_i]$ となり、i は任意

だったので、$\xi_k + c$ は $I_k + c$ の代表点となる。

（P．211　問題）

1） I 上有限個の点のみで 0 でない値を取る関数 f は、I 上可積分で $\int_I f = 0$
であることを示せ。（高校での数学では求めることができなった。）

（解） f が n 変数実数値関数であることに注意して、m 個の点 $a_1 , \cdots , a_m$ で
$f(x) \neq 0$ ならば $M = \underset{1\leqq i\leqq m}{Max}|f(a_i)|$ とすれば、任意の分割Δと任意の代表点ξに

対して、$a_i \notin I_k$ ならば、その区間では $f(x)=0$ なので

$|s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi)-0| \leqq 0+mMd(\Delta)^n \leqq mMd(\Delta)^n$

よって、$d(\Delta)\to 0$ とすれば 0 に収束し、I 上可積分であることになる。

3) ii) $f(x)=x^2$ ， $I=[0\,,\,a]$ をリーマン積分で求めよ。

（高校での数学では区間を n 等分することによって求めたが、リーマン積分で求めてみるのも練習になる。）

（解） 任意の分割 Δ として、$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=a$ とする。

$\xi^0_k=\sqrt{\dfrac{x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2}{3}}$ とおくと

$3x_{k-1}^2=x_{k-1}^2+x_{k-1}x_{k-1}+x_{k-1}^2 \leqq x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2 \leqq x_k^2+x_kx_k+x_k^2=3x_k^2$

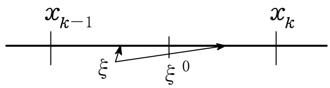
なので、$\xi^0_k\in[x_{k-1}\,,\,x_k]$ となる。$x_n=a$ に注意して

$s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi^0)=\sum_{k=1}^{n}(\xi^0_k)^2(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2}{3}(x_k-x_{k-1})$

$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k^3-x_{k-1}^3}{3}=\dfrac{1}{3}(x_1^3-x_0^3+x_2^3-x_1^3+\cdots+x_{n-1}^3-x_{n-2}^3+x_n^3-x_{n-1}^3)=\dfrac{1}{3}a^3$

そこで、任意の代表点 ξ に対し、

$x_{k-1}\leqq\xi\leqq x_k$ ， $x_{k-1}\leqq\xi^0\leqq x_k$ なので



$f(x)=x^2$ は $[0\,,\,a]$ において単調増加であるから

$|(\xi^0)^2-\xi^2| \leqq x_k^2-x_{k-1}^2$ となる。

$|s(f\,;\,\Delta\,;\,\xi)-\dfrac{1}{3}a^3| \leqq |s(f\,;\,\Delta\,;\,x_k)-s(f\,;\,\Delta\,;\,x_{k-1})|$

$=|\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-x_{k-1}^2)(x_k-x_{k-1})| \leqq d(\Delta)\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-x_{k-1}^2)=a^2d(\Delta)\to 0$

（P．214　命題3．1,4）補足）

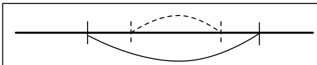
f が有界関数ならば、常に $s\,,\,S$ は存在し、$s\leqq S$ であることを示している。

（P．215　定理3．2（ダルブー）の補足）

（3．9）について、もし2つあったとすると

$d(\Delta)<e$ に反する。

よって、高々１つしかないことがわかる。



小さい器には大きな器は入らない。入っても片方だけである。

次に、I_k^ℓ の ℓ に注意したい、単なる添字であって、指数ではない。また、

$I_k^\ell \subset I_k$ なので、その下限であるので、$m_k \leqq m_k^\ell$ である。

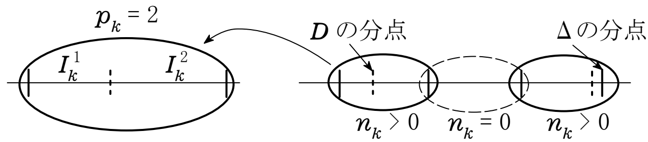
差 $s_{\Delta'} - s_\Delta$ の I_k に関する部分 $d_k = \sum_{\ell=1}^{p_k} (m_k^\ell - m_k)\, v(I_k^\ell)$

であるが、$n_k > 0$ であれば

$$d_k = \sum_{\ell=1}^{p_k} (m_k^\ell - m_k)\, v(I_k^\ell) \leqq \sum_{\ell=1}^{p_k} (M - m)\, v(I_k^\ell) = (M-m)\, v(I_k)$$

をみたす。

$(n=1) \rightarrow$



ここで、D の分点によって、分割される小区間 I_k は $n_k = 0$, $n_k > 0$ の場合があり

$n_k = 0$ の場合、$d_k = 0$ なので、$n_k > 0$ の I_k だけの体積の和を

$$V_\Delta = \sum_{n_k > 0} v(I_k)$$

とおけば、すべての $k \in K(\Delta)$ に対して

(3．10)　　$0 \leqq s_{\Delta'} - s_\Delta \leqq (M-m)V_\Delta$

が成り立つ。

(3．13)について、

(3.12)　$0 < \delta < Min\{e, \dfrac{\varepsilon}{2(c+1)(M-m+1)}\}$ としたとき、$d(\Delta) < \delta$ ならば

$$s_{\Delta'} - s_\Delta \leqq c\,(M-m)d(\Delta) \leqq \frac{c\,(M-m)\,\varepsilon}{2(c+1)(M-m+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

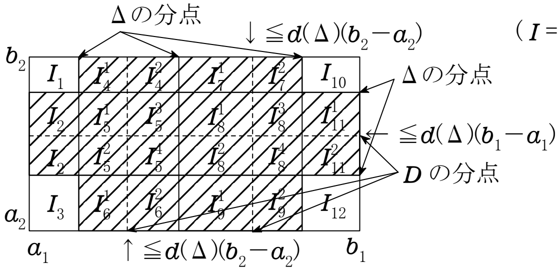
よって

$$0 \leqq s - s_\Delta = (s - s_D) - (s_{\Delta'} - s_D) + (s_{\Delta'} - s_\Delta) \leqq (s - s_D) + (s_{\Delta'} - s_\Delta)$$

$\leqq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$　　　　　(注 (3．7) より $0 \leqq s_{\Delta'} - s_\Delta$)

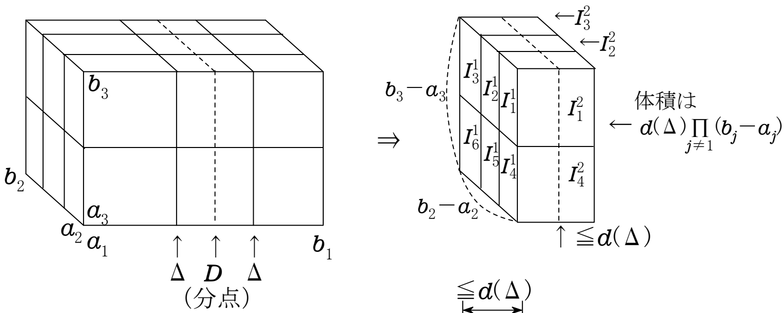
$V_\Delta \leqq cd(\Delta)$ についてだが、内容を図に表すと

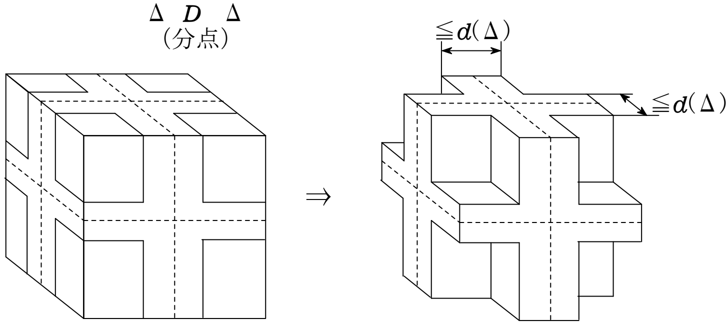
(n = 2 の場合)



($I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$)

(n = 3 の場合)





$\lim_{d(\Delta)\to 0} S_\Delta = S$ については、(3.6) を任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある分割 D が存在して

$0 \leqq S_D - S < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるに変更する。

また、(3.7) は $0 \leqq S_\Delta - S_{\Delta'}$,　$0 \leqq S_D - S_{\Delta'}$ となる。

次に、$M_k^\ell = sup\{f(x) \mid x \in I_k^\ell\}$ として、$I_k^\ell \subset I_k$ なので $M_k^\ell \leqq M_k$ を得る。

よって、 $m \leqq M_k^\ell \leqq M_k \leqq M$ となり、$0 \leqq S_\Delta - S_{\Delta'} \leqq (M - m) V_\Delta$ となる。

そして、 $0 \leqq S_\Delta - S = (S_D - S) - (S_D - S_{\Delta'}) + (S_\Delta - S_{\Delta'})$

$\leqq (S_D - S) + (S_\Delta - S_{\Delta'}) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

となる。

（P．217　定理3．3（可積分条件）の補足）

特に、$e)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、I の分割 Δ で、　(3.14)　 $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$

をみたすものが存在する。つまり、Δ が**一つあれば良い**ということに注意したい。

さて $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqq S_\Delta - J \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$ ，　$-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqq s_\Delta - J \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$ 　であるが

$s(f;\Delta;\xi) = \sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)$

$inf\,(f(\xi_k) v(I_k)) = m_k v(I_k)$

$sup\,(f(\xi_k) v(I_k)) = M_k v(I_k)$

よって、I 章命題（1．6）から

$s_\Delta = inf\,(\sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)) = \sum_{k \in K(\Delta)} m_k v(I_k)$

$S_\Delta = sup\,(\sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)) = \sum_{k \in K(\Delta)} M_k v(I_k)$

また、$J - \dfrac{\varepsilon}{2} < s(f;\Delta;\xi) < J + \dfrac{\varepsilon}{2}$ から

S_Δ は $s(f;\Delta;\xi)$ の上限なので、右の不等号が $\leqq$ となる。

$J - \dfrac{\varepsilon}{2} < S_\Delta \leqq J + \dfrac{\varepsilon}{2}$ 　 ← （参考 $sup\,[0,\varepsilon) = \varepsilon$ ）

よって、より広い範囲に含まれるので

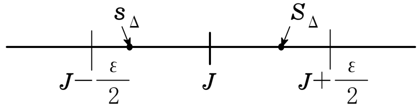
$J - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqq S_\Delta \leqq J + \dfrac{\varepsilon}{2}$

同様にして、s_Δ は $s(f;\Delta;\xi)$ の下限なので、左の不等号が $\leqq$ となる。

$J - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqq s_\Delta < J + \dfrac{\varepsilon}{2}$

より広い範囲に含まれるので

$J - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqq s_\Delta \leqq J + \dfrac{\varepsilon}{2}$



を得る。ゆえに

$0 \leqq S_\Delta - s_\Delta = S_\Delta - J + J - s_\Delta \leqq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

また、$e) \Rightarrow d)$ では

$s_\Delta \leqq s \leqq S \leqq S_\Delta$　なので　$0 \leqq S-s \leqq S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$

（P. 218　定理3. 4（単調関数の可積分性）の注意点）

ここでの f は有界関数であって、連続関数であるということは仮定されていないことに注意したい。

（P. 219　例2）

$$
\begin{array}{rrl}
 & s = & e^{\frac{0}{n}a} + e^{\frac{1}{n}a} + e^{\frac{2}{n}a} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}a} \\
-) & e^{\frac{a}{n}} s = & \qquad\quad e^{\frac{1}{n}a} + e^{\frac{2}{n}a} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}a} + e^{a} \\
\hline
\end{array}
$$

$$s(1-e^{\frac{a}{n}}) = 1-e^{a}$$

$$s = \frac{1-e^{a}}{1-e^{\frac{a}{n}}} = \frac{e^{a}-1}{e^{\frac{a}{n}}-1}$$

$$s_n = \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} exp(\frac{k}{n}a) = \frac{a}{n}\frac{e^{a}-1}{e^{\frac{a}{n}}-1} = (e^{a}-1)\frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}}-1} \rightarrow e^{a}-1$$

（ド・ロピタルの法則）

（P. 219　例3）

$$s_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\frac{k}{2^n})\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\{0.00\cdots0 + 0.00\cdots010 + 0.00\cdots011 + 0.11\cdots1\}$$

ここで、$n=3$ とすれば

$k=0$	0．0 0 0	$k=4$	0．1 0 0
$k=1$	0．0 0 1	$k=5$	0．1 0 1
$k=2$	0．0 1 0	$k=6$	0．1 1 0
$k=3$	0．0 1 1	$k=2^{3-1}$	0．1 1 1

和は　0．4 4 4　←　どの位にも 1 が 2^{3-1} 個ある。一般には 2^{n-1}

個あることになる。したがって、2^n で割るので

$s_n = \frac{1}{2} \times 0.11\cdots1$　　（ n桁 ）

次に、f が $\dfrac{a}{2^n}$（$a \in \boldsymbol{Z}$, $1 < a < 2^n$）の形の有理数で連続ではないということであるが

（$x = \dfrac{1}{2^n}$ の場合）

$x_k = \sum_{m=n+1}^{k} \dfrac{1}{2^m}$ とすれば

$$x_k = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-n}} \right\}$$

{　}の中は $k \to \infty$ のとき 1 に収束するので

$x_k \to \dfrac{1}{2^n}$（$k \to \infty$） となる。

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \underbrace{0.0 \cdots 0}_{n\text{ 桁}}1 \qquad \cdots ①$$

$$f(x_k) = f\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = \underbrace{0.0 \cdots 0}_{n+1\text{ 桁}}11 \cdots 1$$

したがって、

$$f(x_k) \to \frac{1}{9} \times \frac{1}{10^{n+1}} \quad (k \to \infty) \qquad \cdots ②$$

①、②から、I 章定理(6．2)より $x = \dfrac{1}{2^n}$ で連続ではないことがわかる。

（$x = \dfrac{a}{2^n}$, $1 < a \leqq 2^n$, $a \in \boldsymbol{Z}$ の場合）

整数 a の2進数表示を10進数と考えた値を $g(a)$ とする。

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = g(a) \times \frac{1}{10^n} \qquad \cdots ①$$

となる。

そこで、 $x_k = \dfrac{a-1}{2^n} + \sum_{m=n+1}^{k} \dfrac{1}{2^m}$ としてみる。

$x_k \to \dfrac{a-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{a}{2^n}$（$k \to \infty$）である。

ここで、$g(a)$ の最後の桁は1としてよい。なぜなら、0の場合は a が偶数ということになるので約分すればよいからである。

例えば、$g(11)=1011$　ならば、$\dfrac{11}{2^n}=\dfrac{2^3}{2^n}+\dfrac{2^1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{10}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}$ でよいが

$g(10)=1010$ ならば、$\dfrac{10}{2^n}=\dfrac{5}{2^{n-1}}=\dfrac{2^2}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{4}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

となるからである。

$$f(x_k)=f\left(\frac{a-1}{2^n}+\sum_{m=n+1}^{k}\frac{1}{2^m}\right)\to g(a)\times\frac{1}{10^n}+\underbrace{0.0\cdots0}_{n+1\text{ 桁}}111\cdots\ (k\to\infty)$$

$$=g(a)\times\frac{1}{10^n}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{10^{n+1}}\quad(k\to\infty)\cdots②$$

①、②から、I 章定理(6．2)より $x=\dfrac{a}{2^n}$ で連続ではないことがわかる。

(例) $f\left(\dfrac{3}{2^2}\right)=g(3)\times\dfrac{1}{10^2}=0.11$

$$x_k=\frac{2}{2^2}+\sum_{m=3}^{k}\frac{1}{2^m}\to\frac{2}{4}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{2}{4}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}\quad(k\to\infty)$$

$f(x_k)\to 0.1+0.0011\cdots=0.1011\cdots\ (k\to\infty)$

よって、$f(x)\neq f(x_k)\ (k\to\infty)$

(P．220　定理3．5)

$\bigl||f(x)|-|f(y)|\bigr|\leqq|f(x)-f(y)|$　については、(P．4　命題1．2に追加)を参考にすること。

また、P.212 の (3.2) $\displaystyle\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|=M-m$ であるが、

$\displaystyle m=\inf_{x\in I}f(x)$, $\displaystyle M=\sup_{x\in I}f(x)$ であったので、任意の $x, y\in I$ に対し

$|f(x)-f(y)|\leqq M-m$　であるから、I 章命題1．3 ,1) を満たす。また、M, m は

上限、下限であるから、I 章命題1．3 ,2) により、任意の $\varepsilon>0$ に対し、

$f(y)<m+\dfrac{\varepsilon}{2}$ 、$M-\dfrac{\varepsilon}{2}<f(x)$ となる $f(y), f(x)$ が存在する。

$-m-\dfrac{\varepsilon}{2}<-f(y)$ なので　$M-m-\varepsilon<f(x)-f(y)\leqq|f(x)-f(y)|$

よって、I 章命題1．3 ,2) を満たすので、$\displaystyle\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|=M-m$ となる。

したがって、$\displaystyle a(f, I)=\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|=M-m$

（P．221　定理3．7）

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|=\left|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}\right|\leqq C^2\,|f(x)-f(y)|$$

（P．221　定理3．8）

Δ の小区間 I_k の分割 D_k に注意。

また、$a+b=c+d$　, $a\leqq c$, $b\leqq d$　ならば、$a=c$, $b=d$　である。

もし、$a\neq c$ ならば　$c=a+\varepsilon$ （ $\varepsilon>0$ ）としてよい。$a+b=a+\varepsilon+d$ となり $b=\varepsilon+d$ となって $b\leqq d$ に反する。$b\neq d$ としても同様である。

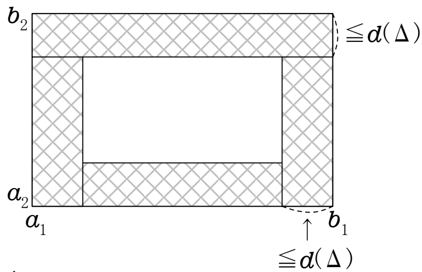
また、同時に、$a\neq c$, $b\neq d$ ならば、$c=a+\varepsilon$, $d=b+\delta$ （ $\varepsilon,\delta>0$ ）として、$a+b=a+b+\varepsilon+\delta$　となってしまう。

（P．222　例4）

（ $n=2$ の場合 ）

I の一個の辺の両端は2カ所あるので、I の境界と交わる小区間の体積の和

$\leqq 2d(\Delta)\sum_{1\leqq i\leqq 2}\prod_{j\neq i}(b_j-a_j)$



（P．223　ベクトル値関数の場合）

$s(f;\Delta;\xi)=(s(f_1;\Delta;\xi),\cdots,s(f_m;\Delta;\xi))$ なので、

$m_k^i=\inf\{f_i(x)\mid x\in I_k\}\leqq f_i(x)\leqq\sup\{f_i(x)\mid x\in I_k\}=M_k^i$ （ $1\leqq i\leqq m$ ）

に対し、$v(I_k)$ との積の和を成分としたベクトルを $s_\Delta(f)$, $S_\Delta(f)$ とすれば

$s_\Delta(f)=\left(\sum_{k\in K(\Delta)}m_k^1 v(I_k),\cdots,\sum_{k\in K(\Delta)}m_k^m v(I_k)\right)$

$S_\Delta(f)=\left(\sum_{k\in K(\Delta)}M_k^1 v(I_k),\cdots,\sum_{k\in K(\Delta)}M_k^m v(I_k)\right)$

となる。

$s^i=\sup\{\sum_{k\in K(\Delta)}m_k^i v(I_k)\mid\Delta\in\mathrm{D}\}$　（ $1\leqq i\leqq m$ ）

$S^i=\inf\{\sum_{k\in K(\Delta)}M_k^i v(I_k)\mid\Delta\in\mathrm{D}\}$　（ $1\leqq i\leqq m$ ）

$$s = \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^m \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} S^1 \\ \vdots \\ S^m \end{pmatrix}$$

とおけば

$$| s^i - \sum_{k \in K(\Delta)} m_k^i v(I_k) | \leqq | s - s_\Delta(f) | \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} | s^i - \sum_{k \in K(\Delta)} m_k^i v(I_k) |^2 = | s - s_\Delta(f) |^2$$

$$| S^i - \sum_{k \in K(\Delta)} M_k^i v(I_k) | \leqq | S - S_\Delta(f) | \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} | S^i - \sum_{k \in K(\Delta)} M_k^i v(I_k) |^2 = | S - S_\Delta(f) |^2$$

から、I 章定理4．5，1)と同様にして、実数値関数としてのダルブーの定理に帰着させることによって証明できる。つまり

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s_\Delta(f) = s \Leftrightarrow \lim_{d(\Delta)\to 0} \left(\sum_{k \in K(\Delta)} m_k^i v(I_k) \right) = s^i \quad (1 \leqq i \leqq m)$$

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} S_\Delta(f) = S \Leftrightarrow \lim_{d(\Delta)\to 0} \left(\sum_{k \in K(\Delta)} M_k^i v(I_k) \right) = S^i \quad (1 \leqq i \leqq m)$$

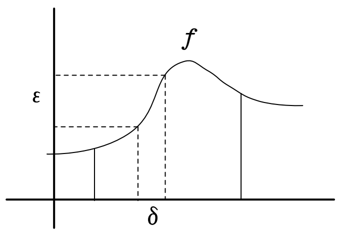
また、$\alpha(f, I_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (M_k^i - m_k^i)^2}$ とすることによって、定理3．3も証明できる。

定理3．5についても $|\,|f(x)| - |f(y)|\,| \leqq |f(x) - f(y)|$ なので

$0 \leqq \alpha(|f|, I_k) \leqq \alpha(f, I_k)$ から同様に証明できる。

(P．225　一様連続のイメージ)

傾きが最大なところで δ を決めればば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ とすることができる。



(P．225　例1)

一様連続でないことを証明する。つまり

ある $\varepsilon > 0$ に対しどんな $\delta > 0$ をとっても $|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon$ となるような x, y が存在することを示せばよい。

そこで、$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とする。任意の $\delta > 0$ に対し、$\dfrac{1}{2^{n+1}} < \delta$ となる $n_0 > 1$ を決める。そして、$x = \dfrac{1}{2^{n_0+1}}$ ，$y = \dfrac{1}{2^{n_0}}$ とすれば

$|x-y| = \left|\dfrac{1}{2^{n_0+1}} - \dfrac{1}{2^{n_0}}\right| = \left|\dfrac{1}{2^{n_0+1}}\right| < \delta$ である。

$|f(x)-f(y)| = |2^{n_0+1} - 2^{n_0}| = 2^{n_0} > \dfrac{1}{2} = \varepsilon$ となり

$A = (0, 1]$ で $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は一様連続ではないことがわかった。

（P．226　例2）

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{L+1}$ とすれば、$|x-y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{L+1}$ ならば、リプシッツ連続の定義より

$|f(x)-f(y)| \leqq L|x-y| < \dfrac{L}{L+1}\varepsilon < \varepsilon$ 　となる。つまり、一様連続となる。

（P．227　定理4．3）

h は x_0 で連続なので、$\dfrac{h(x_0)}{2} > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ をとれば $|x-x_0| < \delta$

ならば $|h(x)-h(x_0)| < \dfrac{h(x_0)}{2}$ とすることができる。つまり、

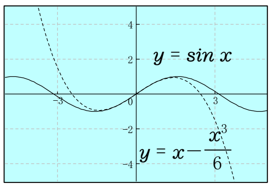
$$a = \frac{h(x_0)}{2} = h(x_0) - \frac{h(x_0)}{2} < h(x) < h(x_0) + \frac{h(x_0)}{2}$$

とすることができる。そのような δ を ε とすればよい。

（P．228　例4）

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\times7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{10\times11}\right)\cdots$$



（　）の中は、$0 < x < \sqrt{42}$ 　で正なので

$$> x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6} \quad (0 < x < \sqrt{42})$$

を得る。また、同様にして

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} - \cdots$$

$$=\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{x^2}{4\times5}\right)+\frac{x^7}{7!}\left(1-\frac{x^2}{8\times9}\right)+\frac{x^{11}}{11!}\left(1-\frac{x^2}{10\times11}\right)\cdots$$

( )の中は、$0<x<\sqrt{20}$ で正なので

>0

したがって、$x>\sin x$ （$0<x<\sqrt{20}$）となる。

よって、x で両辺を割ると、($0<x<\sqrt{20}<\sqrt{42}$)ならば

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (0<x<\sqrt{20})$$

$f(0)=1$ とすれば、$[0,\frac{\pi}{6}]$ で連続であるので、定理4．3（積分の強単調性）より

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)dx<\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx<\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\cdot dx$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3<\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx<\frac{\pi}{6}$$

を得る。

なぜ $\frac{\pi}{6}$ としたかは、当然 $\frac{\pi}{6}<\sqrt{20}$ であり、上のグラフからわかるように、$\frac{\pi}{2}$ より少し手前で $x-\frac{x^3}{6}$ と $\sin x$ が離れていくことがわかるので、$\frac{\pi}{4}$ よりも小さい $\frac{\pi}{6}$ とすれば、より精度の高い近似値を得られると考えたからではないかと思われる。

（P．230　定義1について）

$$\int_a^b f(x)dx=\begin{cases}\int_{[a,b]}f & ,\ a\leqq b \text{ のとき}\\ -\int_{[b,a]}f & ,\ a>b \text{ のとき}\end{cases}$$

の定義からわかること

（I）

1）$a=b$ の場合

$$\int_a^a f(x)dx=\int_{[a,a]}f=0$$

2) $a < b$ の場合

$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_{[a,b]} f$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $a > b$ の場合

$\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f$

$\int_b^a f(x)dx = \int_{[b,a]} f$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

よって、a , b がどんな場合であっても $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ となる。

（Ⅱ）

$a > b$, $f \geqq g$ ($-f \leqq -g$) のとき

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f = \int_{[b,a]} (-f) \leqq \int_{[b,a]} (-g) = -\int_{[b,a]} g = \int_a^b g(x)dx$$

よって

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

（Ⅲ）

$f \leqq |f|$ なので

1) $a = b$ の場合

$$\left|\int_a^a f\right| = \left|\int_a^a |f|\right| = 0$$

2) $a < b$ の場合

$$0 \leqq \left|\int_a^b f\right| \leqq \int_a^b |f| \leqq \left|\int_a^b |f|\right| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leqq \left|\int_a^b |f|\right|$$

3) $a > b$ の場合

$$0 \leqq \left|\int_a^b f\right| = \left|-\int_{[b,a]} f\right| = \left|\int_{[b,a]} f\right| \leqq \int_{[b,a]} |f| \leqq \left|\int_{[b,a]} |f|\right|$$

$$= \left|-\int_{[a,b]} |f|\right| = \left|\int_{[a,b]} |f|\right| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leqq \left|\int_a^b |f|\right|$$

よって、a , b の大小にかかわらず

$$\left|\int_a^b f\right| \leqq \left|\int_a^b |f|\right|$$

以上で、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ は a , b の大小関係にかかわらず成り立つことがわかったことになる。

（P．231　命題5．2　訂正）

従ってまた不定積分 F は I 上連続である。

（P．231　原始関数について）

$F'(x) = f(x)$ のとき、F は f の原始関数というが、平方する前の根と考える平方根と同じように、微分する前の関数と考えればいいのかもしれない。語源はよくわからない。

（P．231　定理5．3 の証明について）

1) 任意の分割Δに対して、ξ_k の取り方は任意ではないが、$s(f';\Delta;\xi) = f(a)-f(b)$ となることは事実である。f' は可積分であることから、任意の ξ_k の取り方にかかわりなく $\int_a^b f'$ に収束する。そして、P. 208にあるように唯一の値に収束しなければいけないので、$\int_a^b f' = f(a)-f(b)$ となる。

2) $h \neq 0$, $x+h \in I$ のとき

$$\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)\underset{\substack{\uparrow\\ x\text{に注意}}}{d}t\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right| \leqq \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt\right|$$

$$\leqq \left|\frac{1}{h}\times\varepsilon\times h\right| = \varepsilon$$

$I = [a , b]$ で $x = b$ の場合は、$h > 0$, $x-h \in I$ として

$$\left|\frac{1}{-h}(F(x-h)-F(x))-f(x)\right| = \left|\frac{1}{-h}\left(\int_x^{x-h} f(t)dt - \int_x^{x-h} f(x)dt\right)\right|$$

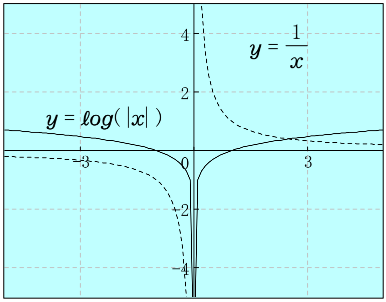
$$= \left|\frac{1}{-h}\left(-\int_{x-h}^{x} f(t)dt + \int_{x-h}^{x} f(x)dt\right)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_{x-h}^{x} f(t)dt - \int_{x-h}^{x} f(x)dt\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}(f(t)-f(x))dt\right| \leqq \left|\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-f(x)|dt\right| < \varepsilon$$

（P．234　表5．1）

2）$x < 0$ の場合、$\ell og(\,|x|\,)$ が $\dfrac{1}{x}$ の原始関数である。

よって、$x > 0$ であっても、$\ell og(\,|x|\,)$ を $x \neq 0$ であれば、原始関数としてよいことになる。



19）　$a^x = e^{\ell og_e a \times x} = e^t$ と置けば

$$\left(\frac{a^x}{\ell og_e a}\right)' = \frac{1}{\ell og_e a} \cdot \frac{d(e^t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{\ell og_e a} \cdot e^t \cdot \ell og_e a \ = e^t = a^x$$

（P．236　例2）

$$\int_{c\alpha+d}^{c\beta+d} f(x)dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(ct+d)dt$$

なぜなら、$x = ct+d$　に対し　$dx = cdt$

$c\beta + d = ct + d \ \rightarrow \ t = \beta$　,　$c\alpha + d = ct + d \ \rightarrow \ t = \alpha$

（P．236　例3）

（5．13）について、命題5．1から、任意の3点 1 , x , y に対し

$$\int_1^y \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_x^y \frac{1}{t}dt$$

$0 < x < y$　ならば、$\dfrac{1}{t} > 0$　なので、定理4．3より、$\displaystyle\int_x^y \frac{1}{t}dt > 0$

したがって、$\displaystyle\int_1^y \frac{1}{t}dt > \int_1^x \frac{1}{t}dt$ となる。

（P．237　例4）

$$sin(\,\pi - x\,) = sin\ \pi \times cos(-x) + cos\ \pi \times sin(-x)$$

$$= (-1)\times(-sin\ x) = sin\ x$$

$f(t)$ が $[\,0\,,1\,]$ で連続であるとき

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} xf(sin\ x)dx$ は、x を $\pi - t$ に置き換えれば、変数変換公式により

$I = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t) \cdot -dt = \int_{0}^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt$

$= \int_{0}^{\pi} (\pi - x)f(\sin x)dx = \pi \int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx - \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx$

$2I = \pi \int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$

を得る。

次に、$f(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$ として、例4の（5．15）から

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx = \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

ここで、$u = \cos x$ と置き換えれば、$dx = -\dfrac{du}{\sin x}$ なので

$$= \frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1} \frac{-1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = \left[\frac{\pi}{2}Arctan\, u \right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{\pi}{2}Arctan\, 1 - \frac{\pi}{2}Arctan\,(-1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

（P．238　例6）

（5．19）より、$f = \sqrt{a^2-x^2}$ なので、$f' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$I = \int_{0}^{x} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int_{0}^{x} \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int_{0}^{x} \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2 Arcsin\frac{x}{a}$$

$$I = \frac{1}{2}\left\{ x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 Arcsin\frac{x}{a} \right\} \quad (|x| \leqq a)$$

（P．238　例7）

$g(\theta) = -\cos\theta$ ，$f(\theta) = \sin^{n-1}\theta$ とすれば、$g'(\theta) = \sin\theta$ であり、（5．18）から

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(\theta)f(\theta)d\theta \quad (n \geqq 2, n \in N)$$

$$= [f(\theta)g(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta)f'(\theta)d\theta$$

$$= [-\cos\theta \sin^{n-1}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\theta)\cdot\sin^{n-2}\theta \cdot \cos\theta\, d\theta$$

$$= [-\cos\theta \sin^{n-1}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2}\theta - \sin^n\theta)d\theta$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

を得る。

したがって、$nI_n = (n-1)I_{n-2}$ なので、 $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ となる。

そこで、$I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ より

ここで、n が奇数、偶数の場合わければ

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

となる。

(P．239　定理5．8(有限増分の定理Ⅱ)の証明)

定理3．9から

$$\int_I f = {}^t\left(\int_I f_1, \cdots, \int_I f_m\right)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ \vdots \\ a_n + t(b_n - a_n) \end{pmatrix}$$ とおく

Uの二点 a , b を両端とする線分 $L = \{ g(t) = a + t(b-a) \mid t \in [0\ ,\ 1] \} \subset U$ のとき、合成可能であり、$g(t)$ は $[0\ ,\ 1]$ で微分可能なので連鎖律が使える。

f は U で C^1 級なので、各 $f_i(x)$ は微分可能であり、$f_i'(x)$ は連続（可積分）であるから、$f_i(g(t))$ も $I = [0\ ,\ 1]$ で微分可能であり、$(f_i(g(t)))'$ は可積分となる。

したがって、各成分は定理5．3、1）から

$$\int_0^1 (f_i(g(t)))'dt = f_i(g(1)) - f_i(g(0)) = f_i(b) - f_i(a)$$

$(f_i(g(t)))' = f_i'(g(t))g'(t) = f_i'(g(t))(b_i - a_i)$ なので

$$\int_0^1 f_i'(g(t))(b_i - a_i)dt = f_i(b) - f_i(a)$$

よって、$M = \sup_{x \in L} | f'(x) |$ なので

$$| f(b) - f(a) | = \left| \begin{pmatrix} f_1(b) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(b) - f_m(a) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \int_0^1 f_i'(g(t))(b_1 - a_1)dt \\ \vdots \\ \int_0^1 f_i'(g(t))(b_m - a_m)dt \end{pmatrix} \right|$$

$$\leqq \left| \begin{pmatrix} M(b_1 - a_1) \\ \vdots \\ M(b_m - a_m) \end{pmatrix} \right| = M| b - a |$$

（P．241　命題6．1）

実係数の有理関数 $R(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ ($\deg g < \deg f$)

$f(x)$ の相異なる実根を a_j 、その重複度を m_j ($1 \leqq j \leqq k$) とする。

相異なる虚根は、$\alpha_j = a_j \pm ib_j$ ($k+1 \leqq j \leqq \ell$, $b_j \neq 0$) 、その重複度を m_j とするとき、$R(x)$ は

（6．1）　$$R(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{jm}}{(x - a_j)^m} + \sum_{j=k+1}^{\ell} \sum_{m=1}^{m_j} \frac{d_{jm}x + e_{jm}}{\{ (x - a_j)^2 + b_j^2 \}^2}$$

（ 但し　c_{jm} , d_{jm} , $e_{jm} \in R$ ）

と表される。

（証明）$a \in R$ が $f(x) = 0$ の m 重根であるとき、$f(x) = (x - a)^m \phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$ となる多項式 $\phi(x)$ がある。$A = \dfrac{g(a)}{\phi(a)}$ と置けば、A は実数で $g(x) - A\phi(x)$

は $x=a$ で 0 となるから、$g(x)-A\phi(x)=(x-a)g_1(x)$ となる。このとき

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{A\phi(x)+(x-a)g_1(x)}{(x-a)^m\phi(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{g_1(x)}{f_1(x)}$$

但し、 $f_1(x)=(x-a)^{m-1}\phi(x)$ である。これを繰り返すと

$\phi(a)\neq 0$ なので、$\dfrac{g_1(a)}{\phi(a)}=B\in R$ とすれば、$g_1(x)-B\phi(x)=(x-a)g_2(x)$ となる。よって、$g_1(x)=B\phi(x)+(x-a)g_2(x)$

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{g_1(x)}{f_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B\phi(x)+(x-a)g_2(x)}{(x-a)^{m-1}\phi(x)}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B}{(x-a)^{m-1}}+\frac{g_2(x)}{(x-a)^{m-2}\phi(x)}=\cdots$$ 以下繰り返す

$$=\sum_{p=1}^{m}\frac{A_p}{(x-a)^p}+\frac{g_m(x)}{f_m(x)}\qquad (deg\ g_m=deg\ g-m<deg\ f_m=deg\ f-m)$$

$f_m(x)=\phi(x)=\dfrac{f(x)}{(x-a)^m}$ なので、他の実根、つまり、f_m の根についても同様に繰り返せば、(6．1)の実根の部分が出てくる。残りの分母は f の虚根のみを根とする多項式である。

$\alpha=a+ib\ (b\neq 0)$ が f の m 重根とすれば、$\overline{\alpha}=a-ib$ も f の m 重根で $f(x)=\{(x-a)^2+b^2\}^m\phi(x)$ と表すことができる。このとき、$\phi(a\pm ib)\neq 0$ なので $g(\alpha)=(B\alpha+C)\phi(\alpha)$ ，$g(\overline{\alpha})=(B\overline{\alpha}+C)\phi(\overline{\alpha})$

によって、B , C を定めることができる。$g(\overline{\alpha})=\overline{g(\alpha)}$ ，$\phi(\overline{\alpha})=\overline{\phi(\alpha)}$ なので

$\overline{B}\,\overline{\alpha}+\overline{C}=B\overline{\alpha}+C\cdots$①

$\overline{B}\,\alpha+\overline{C}=B\alpha+C\cdots$②

① － ② → $\overline{B}(\overline{\alpha}-\alpha)=B(\overline{\alpha}-\alpha)$ 、 $\overline{\alpha}-\alpha\neq 0$ なので

$\overline{B}=B$ となる。したがって、B は実数となる。また、①から

$B\overline{\alpha}+\overline{C}=B\overline{\alpha}+C$ → $\overline{C}=C$ となり、C も実数となる。

$g(x)-(Bx+C)\phi(x)$ は $x=\alpha$, $x=\overline{\alpha}$ で 0 となり、$\alpha\neq\overline{\alpha}$ だから、この多項

式は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で割り切れる。つまり、$G_1(x)$ があり、

$$g(x)-(Bx+C)\phi(x)=\{(x-a)^2+b^2\}G_1(x)$$

$$g(x)=(Bx+C)\phi(x)+\{(x-a)^2+b^2\}G_1(x)$$

となる。そこで

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{(Bx+C)\phi(x)+\{(x-a)^2+b^2\}G_1(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^m\phi(x)}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{Bx+C}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}+\frac{G_1(x)}{F_1(x)} \qquad (deg\ G_1=deg\ g-2<deg\ F_1=deg\ f-2)$$

但し、$F_1(x)=\{(x-a)^2+b^2\}^{m-1}\phi(x)$ となる。そこで実数の場合と同様、この手順を繰り返す。

$$G_1(\alpha)=(B_1\alpha+C_1)\phi(\alpha)\ ,\ \ G_1(\overline{\alpha})=(B_1\overline{\alpha}+C_1)\phi(\overline{\alpha})$$

によって、B_1 , C_1 を定める。やはり、B_1 , C_1 は実数である。

$G_1(x)-(B_1x+C_1)\phi(x)$ は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で割り切れる。故に、$G_2(x)$ があり

$$G_1(x)-(B_1x+C_1)\phi(x)=\{(x-a)^2+b^2\}G_2(x)$$

となる。そこで

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{Bx+C}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}+\frac{G_1(x)}{F_1(x)}$$

$$=\frac{Bx+C}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}+\frac{(B_1x+C_1)\phi(x)+\{(x-a)^2+b^2\}G_2(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^{m-1}\phi(x)}$$

$$=\frac{Bx+C}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}+\frac{B_1x+C_1}{\{(x-a)^2+b^2\}^{m-1}}+\frac{G_2(x)}{\{(x-a)^2+b^2\}^{m-2}\phi(x)}$$

$F_2(x)=\{(x-a)^2+b^2\}^{m-2}\phi(x)$ として、実根の場合同様、この手順を繰り返していけば、(6．1)の虚根の部分が得られる。

この手続きの最後に残った有理式を $h(x)$ とする。$h(x)$ の分母は定数である。なぜなら、$(x-a_j)$ か $(x-\alpha_j)(x-\overline{\alpha}_j)$ で割り切れるならば、まだ上の手順が終わってないからである。また、$R(x)\to 0\ (x\to\infty)$ であるので、$h(x)=0$ 以外考えられない。よって、(6．1)を得る。

（P．242　命題6．2　3)）

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+b^2)^n}=\frac{1}{b^2}\int\frac{x^2+b^2-x^2}{(x^2+b^2)^n}dx=\frac{1}{b^2}I_{n-1}-\frac{1}{2b^2}\int x\frac{2x}{(x^2+b^2)^n}dx$$

ここで、部分積分（$\int f'g=fg-\int fg'$）と2）によって

$f'=\dfrac{2x}{(x^2+b^2)^n}$ ，$g=x$ とすれば、$f=\dfrac{-2}{2(n-1)}\cdot\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}}$

$$\int x\frac{2x}{(x^2+b^2)^n}dx=x\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}}-\int 1\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}}dx$$

$$I_n=\frac{1}{b^2}I_{n-1}-\frac{1}{2b^2}\left\{\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}I_{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{b^2}\left\{\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)I_{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{b^2}\left\{\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\}$$

を得る。

（P．243　例3）

$$\int\frac{1}{(x^2+b^2)}dx=I_2=\frac{1}{b^2}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(x^2+b^2)}+\frac{1}{2}\frac{1}{b}Arctan\frac{x}{b}\right\}$$

$$=\frac{1}{2b^2}\frac{x}{(x^2+b^2)}+\frac{1}{2b^3}Arctan\frac{x}{b}$$

（P．243　例4）

$$I=\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right.$$

$$+\int \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{\ell og(x^2+\sqrt{2}x+1)-\ell og(x^2-\sqrt{2}x+1)\}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\{\int \frac{\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx+\int \frac{\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx\}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{\ell og\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\}+\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\{\sqrt{2}Arctan(\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}})$$

$$+\sqrt{2}Arctan(\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}})\}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{\ell og\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\{Arctan(\sqrt{2}x+1)+Arctan(\sqrt{2}x-1)\}$$

（P．244　注意2）

$$\frac{1}{x-\alpha}=\frac{1}{x-a-ib}=\frac{x-a+ib}{(x-a-ib)(x-a+ib)}=\frac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}$$

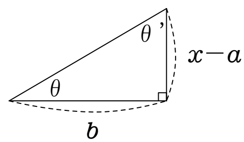
だから

$$\int \frac{1}{x-\alpha}dx=\int \frac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}dx=\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}dx+i\int \frac{b}{(x-a)^2+b^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ell og((x-a)^2+b^2)+i\ Arctan\frac{x-a}{b}$$

$$=\ell og|x-\alpha|+i\ Arctan\frac{x-a}{b}$$

$$=\ell og|x-\alpha|+i(\frac{\pi}{2}-Arctan\frac{b}{x-a})$$



（P．245　例5）

$$sin(x+\frac{\pi}{2})=sin\ xcos\frac{\pi}{2}+cos\ xsin\frac{\pi}{2}=cos\ x$$

$$cos(x+\frac{\pi}{2})=cos\ xcos\frac{\pi}{2}-sin\ xsin\frac{\pi}{2}=-sin\ x$$

また、$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

（P．246　定理6．5）

変数の一次変換によって、二次式の一次の項を消去するとは、

（$a>0$ の場合）

$$r^2=ax^2+bx+c=(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$x=\dfrac{t-\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}$ として、一次変換すると、$r^2=t^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

（$-a<0$ の場合）

$$r^2=-ax^2+bx+c=-(\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+\frac{b^2+4ac}{4a}$$

$x=\dfrac{t+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}$ として、一次変換すると、$r^2=\dfrac{b^2+4ac}{4a}-t^2$

よって r は、 1) $\sqrt{k^2-x^2}$　2) $\sqrt{x^2-k^2}$　3) $\sqrt{x^2+k^2}$　のいづれかになる。

1) $x=k\sin\theta$　とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=k\cos\theta\ ,\ r=\sqrt{k^2-k^2\sin^2\theta}=k\cos\theta$$

2) $x=k\sec\theta=k\dfrac{1}{\cos\theta}$　とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=k\frac{-1\times(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=k\sec\theta\tan\theta$$

$$r=\sqrt{k^2\frac{1}{\cos^2\theta}-k^2}=k\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=k\tan\theta$$

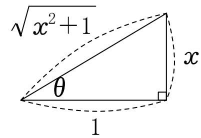
3) $x=k\tan\theta$　とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=k\frac{\cos^2\theta-\sin\theta\times(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=k\sec^2\theta$$

$$r=\sqrt{k^2\tan^2\theta+k^2}=k\sqrt{\tan^2\theta+1}=k\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=k\sec\theta$$

（P. 246　例7）

$x = tan\,\theta$　とすれば



$$sin\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

なので

$$\frac{1+sin\,\theta}{cos\,\theta} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = x+\sqrt{x^2+1}$$

となる。

次に、直接　$t = x+\sqrt{x^2+1}$ とおいて I を求めてみる。

$$(t-x)^2 = x^2+1$$
$$t^2-2xt+x^2 = x^2+1$$
$$t^2-1 = 2xt$$
$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$x^2+1 = \frac{t^4-2t^2+1+4t^2}{4t^2} = \frac{(t^2+1)^2}{(2t)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t\times 2t-2(t^2-1)}{4t^2} = \frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = \frac{t^2+1}{2t^2}$$

$$I = \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(t^2+1)^2}{(2t)^2}}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int\frac{1}{t}dt$$

$$= \ell og\,|\,t\,| = \ell og\,|\,x+\sqrt{x^2+1}\,|$$

となる。

一般に二次式 $y = ax^2+bx+c$　で $a > 0$ のとき、$y \geqq 0$ となる区間で

$t = \sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ とおけば

$$(t-\sqrt{a}x)^2 = ax^2+bx+c$$
$$t^2-2\sqrt{a}xt+ax^2 = ax^2+bx+c$$
$$t^2-2\sqrt{a}xt = bx+c$$
$$t^2-c = 2\sqrt{a}xt+bx$$
$$t^2-c = x(2\sqrt{a}t+b)$$

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} \quad \cdots \text{①}$$

$ax^2 + bx + c$ に ① を直接代入してみると

$$= a\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}\right)^2 + b\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}\right) + c$$

$$= \frac{a(t^2 - c)^2 + b(t^2 - c)(2\sqrt{a}t + b) + c(2\sqrt{a}t + b)^2}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

$$= \frac{at^4 - 2act^2 + ac^2 + 2\sqrt{a}bt^3 + b^2t^2 - 2\sqrt{a}bct - cb^2 + 4act^2 + 4\sqrt{a}bct + cb^2}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

$$= \frac{at^4 + 2act^2 + ac^2 + 2\sqrt{a}bt^3 + b^2t^2 + 2\sqrt{a}bct}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

$$= \frac{at^4 + b^2t^2 + ac^2 + 2(act^2 + \sqrt{a}bt^3 + \sqrt{a}bct)}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}t^2)^2 + (bt)^2 + (\sqrt{a}c)^2 + 2\{(\sqrt{a}t^2)(\sqrt{a}c) + (\sqrt{a}t^2)bt + (\sqrt{a}c)bt\}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)^2}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$ （ $t - \sqrt{a} \times \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$ を計算したほうがいいが…）

よって

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t + b}$$

$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$ なので

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(2\sqrt{a}t + b) - 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2} = \frac{4\sqrt{a}t^2 + 2bt - 2\sqrt{a}t^2 + 2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}t^2 + 2bt + 2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t + b)^2} = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$$

したがって

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{2\sqrt{a}t + b}{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c} \cdot \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$$

$= \int \frac{2}{2\sqrt{a}t+b}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\ell og\,|\,2\sqrt{a}t+b\,|$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ell og\,|\,2\sqrt{a}(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}+b\,|$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ell og\,|\,2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+b\,|$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ell og\,|\,2ax+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}+b\,|$

ここで、$y = x^2+1$ で、$a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ とした場合

$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ell og\,|\,t\,| = \ell og\,|\,x+\sqrt{x^2+1}\,|$

であるが、上の公式からでは

$I = \ell og\,|\,2x+2\sqrt{x^2+1}\,|$ となってしまうのは不思議である。しかし

$\ell og\,|\,2x+2\sqrt{x^2+1}\,| = \ell og\,|\,x+\sqrt{x^2+1}\,|+\ell og\,2$ なので、$\ell og\,2$ を積分定数C

と考えれば定積分には影響しない。一般には、$a > 0$, R が有理式の場合

$\int R(\,x\,,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$

$= \int R(\,\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\,,\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t+b}\,)\cdot\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$

となり、有理関数の積分に帰着させることができる。

$a < 0$ の場合、このとき、$b^2-4ac \leqq 0$ だとすると、実関数としての意味がなくなるので、> 0 とする。二次式が相異なる二実根 $\alpha < \beta$ を持つとすれば

$ax^2+bx+c = |\,a\,|(\,x-\alpha\,)(\,\beta-x\,)$ とし

$t = \sqrt{\frac{a(\,x-\beta\,)}{x-\alpha}}$ とおけば、 $t^2 = \frac{a(\,x-\beta\,)}{x-\alpha} \rightarrow t^2(\,x-\alpha\,) = a(\,x-\beta\,)$

$x(\,t^2-a\,) = \alpha t^2-a\beta$

$x = \frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}$ となる。

$ax^2+bx+c = |\,a\,|(\,x-\alpha\,)(\,\beta-x\,)$

$$=|a|\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}\right)$$

$$=|a|\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}-\frac{\alpha(t^2-a)}{t^2-a}\right)\left(\frac{\beta(t^2-a)}{t^2-a}-\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}\right)$$

$$=|a|\left(\frac{\alpha t^2-a\beta-\alpha t^2+a\alpha}{t^2-a}\right)\left(\frac{\beta t^2-a\beta-\alpha t^2+a\beta}{t^2-a}\right)$$

$$=|a|\left(\frac{a\alpha-a\beta}{t^2-a}\right)\left(\frac{\beta t^2-\alpha t^2}{t^2-a}\right)$$

$$=-a|a|t^2\frac{(\alpha-\beta)^2}{(t^2-a)^2}$$ （$a<0$ なので、$-a=|a|$ ）

$$=|a|^2t^2\frac{(\alpha-\beta)^2}{(t^2-a)^2}$$

さて

$ax^2+bx+c=|a|^2t^2\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(t^2-a)^2}$ となった。

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|a|t\frac{\alpha-\beta}{t^2-a}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\alpha t(t^2-a)-2t(\alpha t^2-a\beta)}{(t^2-a)^2}=-\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

$$=-\int R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a},|a|t\frac{\alpha-\beta}{t^2-a}\right)\cdot\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}dt$$ （ $\alpha<\beta$ に注意 ）

$$=-\int R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a},\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right)\cdot\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}dt$$

となり、有理関数化されたことになる。

（P. 247　例8）

$ax+b=t^2$ とおけば 、$x=\dfrac{t^2-b}{a}$ となり、$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{a}$

$$\sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c(t^2-b)}{a}+d}=\sqrt{\frac{c}{a}t^2-\frac{bc}{a}+d}$$

$$R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) = R\left(\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{c}{a}t^2-\frac{bc}{a}+d}\right)\cdot\frac{2t}{a}dt$$

よって、定理6．5の積分に帰着させることができる。