(P.83　命題1．2)

もう少し、詳しく証明を考えてみることにする。f が a で微分可能とする。

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\delta(h)$, $\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}\delta(h)=0$　とおいたとき、

$f'(a)=0$ ならば $f(a+h)-f(a)=h\delta(h)$ 、$h\neq 0$, $h\to 0$　ならば $(h)\to 0$

なので

$\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}|f(a+h)-f(a)|=0$, $\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}f(a+h)$ は存在し、$f(a)$ に等しいので a で連続となる。(命題6．5　d)より)

$\varepsilon-\delta$ **論法**では、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}\delta(h)=0$ なので、ある $\delta'>0$ が存在して $0<|h-0|=|h|<\delta'$ ならば　$|\delta(h)|<\sqrt{\varepsilon}$ とすることができる。

したがって、$\delta=min\{\delta',\sqrt{\varepsilon}\}$ とすれば

$|f(a+h)-f(a)|=|h\delta(h)|\leqq|h||\delta(h)||<\varepsilon$

よって　$\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}f(a+h)=f(a)$ となり、a で連続となる。

$f'(a)\neq 0$ ならば $f(a+h)-f(a)=f'(a)h+h\delta(h)$ となり、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\delta'=\dfrac{\varepsilon}{2|f'(a)|}$ とすれば、$0<|a+h-a|=|h|<\delta'$ ならば

$|h|<\dfrac{\varepsilon}{2|f'(a)|}\ \to\ |hf'(a)|\leqq|h||f'(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2|f'(a)|}\cdot|f'(a)|=\dfrac{\varepsilon}{2}$

となる。また、$\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}\delta(h)=0$ なので、ある $\delta''>0$ が存在して

$0<|h-0|=|h|<\delta''$ ならば　$|\delta(h)|<|f'(a)|$ とすることができる。

よって、$\delta=min\{\delta',\delta''\}$ とすれば、$0<|h|<\delta$ ならば

$|f(a+h)-f(a)|=|hf'(a)+h\delta(h)|\leqq|h||f'(a)|+|h||\delta(h)|$

$<\dfrac{\varepsilon}{2|f'(a)|}\cdot|f'(a)|+\dfrac{\varepsilon}{2|f'(a)|}\cdot|f'(a)|=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

よって　$\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}f(a+h)=f(a)$ となり、a で連続となる。

(P.84　例5　行列式の微分)

$(fgh)'=f'(gh)+f(gh)'=f'gh+fg'h+fgh'$　から帰納的に

$|\,D\,| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}x_{\sigma(3)3}\cdots x_{\sigma(n)n}$ なので

$|\,D\,|' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\{\, x'_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}x_{\sigma(3)3}\cdots x_{\sigma(n)n} + x_{\sigma(1)1}x'_{\sigma(2)2}x_{\sigma(3)3}\cdots x_{\sigma(n)n} +$

$+\cdots+ x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}x_{\sigma(3)3}\cdots x'_{\sigma(n)n}\}$

これを行列 D の各列ベクトル f_i に置き換えると

$|\,D\,|' = \sum_{k=1}^{n} det\,(\,f_1(t),\cdots,f\,'_k(t),\cdots,f(t)_n\,)$ を得る。

（P.84　例5　外積の微分）

佐武一郎の線形代数学に詳しく書いてある。ベクトル積に応用すると、次の等式を得る。

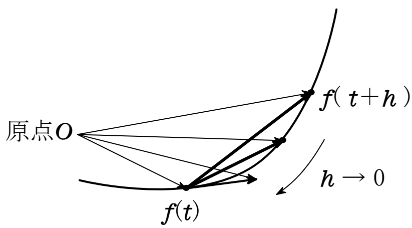
$$a\times b = \begin{pmatrix} det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \\ det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ なので } (\,a\times b\,)' = \begin{pmatrix} det\begin{pmatrix} a'_2 & b_2 \\ a'_3 & b_3 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_2 & b'_2 \\ a_3 & b'_3 \end{pmatrix} \\ det\begin{pmatrix} a'_3 & b_3 \\ a'_1 & b_1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_3 & b'_3 \\ a_1 & b'_1 \end{pmatrix} \\ det\begin{pmatrix} a'_1 & b_1 \\ a'_2 & b_2 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 & b'_1 \\ a_2 & b'_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$= a'\times b + a\times b'$ となる。（ P.90の 3)の（ix）が証明された。）

（P.85　接ベクトルのイメージ）

$$f\,'(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(\,t+h\,)-f(t)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\begin{pmatrix} f_1(\,t+h\,)-f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(\,t+h\,)-f_n(t) \end{pmatrix}$$



つまり、$f\,'(t)$ は $f(t)$ における方向ベクトルとなる。したがって、$f(t)$ を通り $f\,'(t)$ を方向ベクトルとする直線 ℓ は次のようになる。

$x(s) = f(t) + sf\,'(t)$　（ $s \in R$ ）

$f(x)$ が一変数実数値関数の場合グラフ上の点P（a , $f(a)$）における接線の傾きは $f'(a)$ であった。

このことは、$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ であった。 つまり、xの増加量でyの増加量を割った極限であった。しかし、ここでは、t をパラメータとして、点P$(x(t)\ ,\ f(x(t)))$の動きを考えることになっていることに注意したい。つまり、(x , y)座標上に t 軸はないのに接線の傾きをどの様にイメージできるかである。

このことに対しては、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ であるので問題ないことがわかる。

例えば、$f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t^2 \end{pmatrix}$ としたとき、$y = x^2$ である。

$\dfrac{dy}{dx} = 2x = 4t$ となる。このとき、接ベクトルは$\begin{pmatrix} 2 \\ 8t \end{pmatrix}$であって、$\dfrac{8t}{2} = 4t$ となり一致する。つまり、t をパラメータとして、点P($x(t)$, $f(x(t))$) の動きをtで微分しても傾きをベクトル表現しただけで変わらないことがわかる。特に、$x(t) = t$ とすれば $\dfrac{dx}{dt} = 1$ なので、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ となり、高校で学習した接線の傾きと一致する。

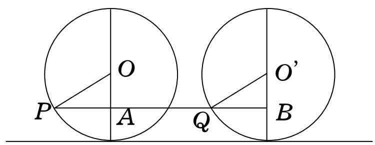
(P.85　例9　サイクロイド)

$$f(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} a(1-\cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1-\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2} \\ 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} = 2a\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$\triangle OPA \equiv \triangle O'QB$ なので

$\angle POA = \angle QO'B = t$

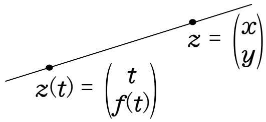


(P.86　例10)

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{pmatrix} t\cos\frac{1}{t} \\ t\sin\frac{1}{t} \end{pmatrix} \qquad \left|t\cos\frac{1}{t}\right| , \left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqq |t| \to 0 \ (t \to 0)$$

(P.86　例11)

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\f(t)\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\f\,'(t)\end{pmatrix}$　（$k \in R$）



$x = t+k \ \to\ k = x-t$

$y = f(t)+f\,'(t)(x-t) \to\ y-f(t) = f\,'(t)(x-t)$

(P.87　命題1．4　a) ⇒ b))

$$g(t) = \begin{cases} f(b)+f_-'(b)(t-b) & ,\ t > b \\ f(t) & ,\ a \leqq t \leqq b \\ f(a)+f_+'(a)(t-a) & ,\ t < a \end{cases}$$

$$\frac{g(b+h)-g(b)}{h} = \frac{f(b)+f_-'(b)(b+h-b)-(f(b)+f_-'(b)(b-b))}{h} = f_-'(b)$$

$$\frac{g(b-h)-g(b)}{-h} = \frac{f(b)+f_-'(b)(b-h-b)-(f(b)+f_-'(b)(b-b))}{-h} = f_-'(b)$$

故に、$g_+'(b) = f_-'(b) = g_-'(b)$

(P.88　ライプニッツの公式)

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{f^{(k)}g^{(n-k)}$　を認めたとすれば（帰納法）

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}\}$$

$$= \binom{n}{0}f^{(1)}g^{(n)}+\cdots+\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\cdots+\binom{n}{n-1}f^{(n)}g^{(1)}+\binom{n}{n}f^{(n+1)}g^{(0)}$$

$$+\binom{n}{0}f^{(0)}g^{(n+1)}+\binom{n}{1}f^{(1)}g^{(n)}+\cdots+\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\cdots+\binom{n}{n}f^{(n)}g^{(1)}$$

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)\times k}{k(k-1)!}+\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)\times\{k+(n-k+1)\}}{k!}$$

$= \dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)\times(n+1)}{k!}$

$= \dfrac{(n+1)\times n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)}{k!} = \dbinom{n+1}{k}$ なので

$(fg)^{(n+1)} = \dbinom{n}{0}f^{(0)}g^{(n+1)} + \dbinom{n+1}{1}f^{(1)}g^{(n)} + \cdots + \dbinom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)} + \cdots +$

$\dbinom{n}{n}f^{(n+1)}g^{(0)}$

また、$\dbinom{n+1}{0} = \dbinom{n}{0} = 1$, $\dbinom{n+1}{n+1} = \dbinom{n}{n} = 1$ なので

$(fg)^{(n+1)} = \dbinom{n+1}{0}f^{(0)}g^{(n+1)} + \dbinom{n+1}{1}f^{(1)}g^{(n)} + \cdots + \dbinom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)} + \cdots$

$+ \dbinom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}g^{(0)}$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$

（P.93　定理2．2の証明における x の必要性）

f は一点 $c\in I$ で最大値に達する。このとき、$c = a$ となる可能性がある。しかし、$f(c) \geqq f(x) > f(a) = f(b)$ なので、$f(a) > f(a)$ となり矛盾する。よって、$c \neq a$ となる。$c = b$ についても同様である。よって、$a < c < b$ となり c が I の内点となる。

（P．95　定理2．4では注意5に惑わされないように！）

一点 a を固定し、任意の $t\in I$ に対し、$[a , t]\in I$　を区間として平均値の定理を適用している。

$f(t)$ の各成分 $f_i(t)$ が各 $c_i\in I$ に対して $f_i(t) - f_i(a) = f_i'(c_i)(t - a) = 0$　したがって、それぞれの $c_i \neq c_j$ であっても $\forall c_i , c_j \in I$ で $f_i'(c_i) = 0$, $f_j'(c_j) = 0$ なので $f_i(t) - f_i(a) = 0$, $f_j(t) - f_j(a)= 0$ となり、$f(t) = f(a)$ 、つまり定数となる。

I は区間であって、半開区間でも無限開区間でもよい。

（P. 95　注意6）

仮に $t = b$ であっても、f が $I = [a\ ,\ b\ ]$ で連続、$(a\ ,\ b)$ で微分可能なので平均値の定理が適用でき、$c \in \mathring{I}$ が存在する。$t = a$ についても $(t\ ,\ b)$ に適用すれば同様に証明できる。この場合、 定理2. 4の b)は、$f\ '(t) = 0\ (\forall t \in \mathring{I})$ となる。

（P. 95　定理2. 5　2) の ⇐ の証明）

任意の $x < y$ となる $x\ ,\ y \in I$ に対し、$f(x) = f(y)$ だとしたら、f は単調増加なので、任意の $x < x' < y$ に対し $f(x) \leqq f(x') \leqq f(y)$ のはずだが、$f(x) = f(y)$ なので $f(x) = f(x') = f(y)$ となり、f は J 上で定数となる。

（P. 95　定理2. 5系）

区間 I の各点 x で $f\ '(x) > 0$ とあるが、$\mathring{I}$ の各点 x で $f\ '(x) > 0$ で十分であると考えられる。

（P.96　例2）

$$f\ '(x) = (\ 2 - sin(\ell og\ x) - cos(\ell og\ x)\ ) + x(\ -\frac{1}{x}cos(\ell og\ x) + \frac{1}{x}sin(\ell og\ x)\ )$$

$$= 2(\ 1 - cos(\ell og\ x)\ )$$

$f(x)$ は x=0 でなぜ連続か？

$\forall\ \varepsilon > 0$ に対し、$\delta\ = \frac{\varepsilon}{4}$ とすれば、$0 < |\ x - 0\ | = |\ x\ | < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ならば

$|\ f(x) - f(0)\ | = |\ x[\ 2 - sin\ell og\ x - cos\ell og\ x\ ]\ |$

$\leqq |\ 2x\ | + |\ x(sin\ell og\ x + cos\ell og\ x)\ |$

ここで、$sin\ell og\ x + cos\ell og\ x \leqq 2$ なので

$\leqq |\ 2x\ | + |\ 2x\ | \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

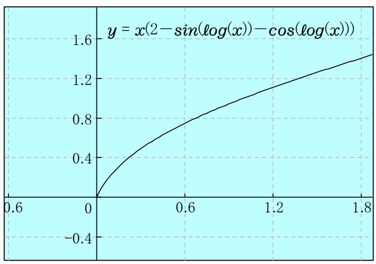
$f\ '(x) = 0 \leftrightarrow \ell og\ x = -2n\pi$

なぜ（マイナス）なのかについては

もし、$2n\pi$ ならば、$x = e^{2n\pi}$ となり

$x \geqq 1$ であり、$x \leqq 1$ としたいからである。

実際 f のグラフは右図のようになる。



（P.97　定理2．6）

$(a, a+\delta) \subset [a, a+\delta] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ なので、f は $(a, a+\delta)$ で微分可能であって、$[a, a+\delta]$ で連続である。そこで、定理2．5系によって、$[a, a+\delta]$ で狭義単調増加となるが、$[a, a+\delta)$ としたのは、a が内点であることを強調するためであろう。（極値点の定義）

（P.97　例3）

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & , x \leqq 0 \end{cases} \quad \to \quad x < 0 \text{ で } f'(x) = 0 \text{ つまり } f^{(n)}(x) = 0$$

$x > 0$ ならば

$t = -\dfrac{1}{x}$ とすれば $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$ なので $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

$$f^{(n+1)} = \frac{x^{2n}\left(P_n'(x)e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x)\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\right) - 2nx^{2n-1}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{(x^{2n})^2}$$

$$= \frac{P_n'(x)x^{2n}e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x)x^{2n}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - p_n(x)2nx^{2n-1}e^{-\frac{1}{x}}}{(x^{2n})^2}$$

$$= \frac{P_n'(x)x^{2n} - p_n(x)\cdot 2nx^{2n-1}}{(x^{2n})^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \frac{p_n(x)}{x^{2n}}$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{P_n'(x) - p_n(x)\cdot 2nx^{-1}}{x^{2n}} + \frac{p_n(x)}{x^{2n+2}} \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{P_n'(x)x^2 - p_n(x)\cdot 2nx + p_n(x)}{x^{2(n+1)}} \right) = \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

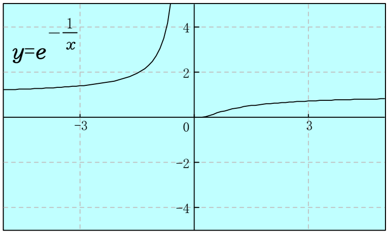
そこで、f は R で連続であるので 0 の近傍 $U = (0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ で連続である。0 以外の U の各点で微分可能で、しかも $\lim_{x \to 0,\, x \neq 0} f'(x) = 0$ よって、定理2．7から f は 0 で微分可能で $f'(0) = 0$，f' は 0 で連続となる。このことを繰り返すと

f' は R で連続であるので 0 の近傍 $U=(0-\varepsilon\,,0+\varepsilon)$ で連続である。

0 以外の U の各点で微分可能で、しかも $\displaystyle\lim_{x\to0\,,\,x\neq0} f''(x)=0$ よって、定理2．7 から f' は 0 で微分可能で $f''(0)=0$, f'' は 0 で連続となる。

以下、帰納的に f は任意回 0 で微分可能で $f^{(n)}(0)=0$ となることがわかる。

実際 $e^{-\frac{1}{x}}$ のグラフは右図のようになる。0 で不連続なので $f(x)=0$ ($x\leqq 0$) と定義している。そうすると、0 で連続ということになり定理2．7が使えることになる。



（P.98　定理2．8の証明で $c=a$ にならない理由）

$I=[\,a\,,b\,]$ の1点 c で最小値に達する。でもこの c が a であっては証明にならない。

そこで、a よりも大きく、いくらでも近い x に対して、$\phi(x)<\phi(a)$ であることを示せば、$\phi(c)$ が最小値となることから $c>a$ でなければならないことになる。

注意 7

$f'(a)>0$ ならば $|\,x-a\,|$ が十分小さいとき、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \text{ なので } x>a \ \to\ f(x)-f(a)>0 \ \to\ f(x)>f(a)$$

$$x<a \ \to\ f(x)-f(a)<0 \ \to\ f(x)<f(a)$$

$f'(a)>0$ ならば $|\,x-a\,|$ が十分小さいとき、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0 \text{ なので } x>a \ \to\ f(x)-f(a)<0 \ \to\ f(x)<f(a)$$

$$x<a \ \to\ f(x)-f(a)>0 \ \to\ f(x)>f(a)$$

(P.99　$\phi(a)=\phi(b)$)

$$\phi(a)=\{\,g(b)-g(a)\,\}f(a)-\{\,f(b)-f(a)\,\}g(a)$$
$$=g(b)f(a)-g(a)f(a)-f(b)g(a)+f(a)g(a)=g(b)f(a)-f(b)g(a)$$
$$\phi(b)=\{\,g(b)-g(a)\,\}f(b)-\{\,f(b)-f(a)\,\}g(b)$$
$$=g(b)f(b)-g(a)f(b)-f(b)g(b)+f(a)g(b)=g(b)f(a)-f(b)g(a)$$

（P.100　テーラーの定理の証明）

$$\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right)^{(k)}=\frac{f^{(k)}(a)}{0!}(x-a)^{0}$$

$$\left(\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}\right)^{(k)}=\frac{f^{(k+1)}(a)}{1!}(x-a)^{1}$$

$$\left(\frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}(x-a)^{k+2}\right)^{(k)}=\frac{f^{(k+2)}(a)}{2!}(x-a)^{2}$$

↓

$$\left(\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right)^{(k)}=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1-k)!}(x-a)^{(n-1-k)}$$

よって、右辺の和は

$\displaystyle\sum_{p\geqq k}^{n-1}\frac{f^{(p)}(a)}{(p-k)!}(x-a)^{(p-k)}$　となる。だから

$$\phi^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-\sum_{p\geqq k}^{n-1}\frac{f^{(p)}(a)}{(p-k)!}(x-a)^{(p-k)}\qquad 1\leqq k\leqq n-1$$

また、$g(x)=(x-a)^n$ とすれば、$x\neq a$ ならば、$g(x)\neq 0$ なので、$\phi(a)=g(a)=0$ なので、コーシーの平均値定理から

$\displaystyle\frac{\phi(x)-\phi(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\phi(x)}{(x-a)^n}=\frac{\phi'(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}}$ となる $x_1\in[\,a\,,x\,]$ が存在する。

あとはこれを繰り返す。

（P.100　例4）

f が I で C^n 級であるとき

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x)$$

(2.9)　$\displaystyle R_n(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$　と書くことができる。

$n=1$ であれば f は 1 回微分可能で連続なので、$\displaystyle\int_a^x f'(t)dt$ は積分可能で

$\displaystyle f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ と表すことができる。したがって、(2.9) は成り立つ。

n に対して (2.9) の形の剰余項を持つテイラーの公式が成り立つ C^{n+1} 級関数 f があれば、$f'g=(fg)'-fg'$ から $g=f^{(n)}(x)$ と置けるから部分積分可能となる。したがって

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

となり、$n+1$ の場合も (2.9) が成り立つことになる。テイラーの定理との違いは、n 回微分可能だけでなく連続でなければならない点である。つまり、C^n 級でなければならない。

（P．101　定理2．11の証明　*ratio　test*）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{CM^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}}{\dfrac{CM^n}{n!}|x-a|^n}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}|x-a|=0<1$$

よって、$\sum\dfrac{CM^n}{n!}|x-a|^n$ は収束する。

（P．102　定理2．12の証明）

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^n}=\frac{\phi^{(1)}(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}}=\frac{\phi^{(2)}(x_2)}{n\times(n-1)\times(x_2-a)^{n-2}}=$$

$$\frac{\phi^{(3)}(x_3)}{n\times(n-1)\times(n-2)\times(x_3-a)^{n-3}}=$$

$$\frac{\phi^{(k)}(x_k)}{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(k-1))\times(x_k-a)^{n-k}}$$

$k=n-1$ とすれば

$$=\frac{\phi^{(n-1)}(x_{n-1})}{n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times(x_{n-1}-a)^1}=\frac{\phi^{(n-1)}(x_{n-1})}{n!(x_{n-1}-a)}$$

ここで、$x_{n-1}=c$ とすれば、$\phi^{(n-1)}(a)=0$ なので

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^n}=\frac{\phi^{(n-1)}(c)}{n!(c-a)}=\frac{1}{n!}\left(\frac{\phi^{(n-1)}(c)-\phi^{(n-1)}(a)}{c-a}\right)$$

と書ける。仮定より、$f^{(n)}(a)$ は存在するので $\phi^{(n)}(a)$ も存在し、$x \to a$ ならば $c \to a$ なので、上式の右辺は、$\dfrac{\phi^{(n)}(a)}{n!}$ となる。したがって

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{\phi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\phi^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

次に

$$\phi(x) = f(x) - \{ f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

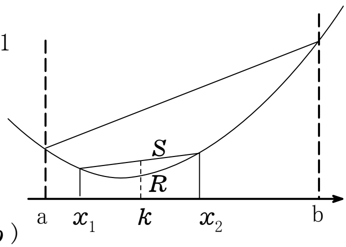
なので、$\phi(x) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \quad \to \quad r_n(x) = \phi(x) - \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ となる。

（P. 103　内分する点の内分点は、また、$x=ta+(1-t)b$ となる）

（例）　右図で、$a < x_1 < k < x_2 < b$ となる任意の区間 $[\,x_1\,,\,x_2\,]$ において、$0 < t_1\,,\,t_2 < 1$

$x_1 = t_1a+(1-t_1)b\ ,\ x_2 = t_2a+(1-t_2)b$

とすれば、任意の k は次のように表すことができる。$0 < t < 1$　として、



$k = t(\,t_1a+(1-t_1)b\,) + (1-t)(\,t_2a+(1-t_2)b\,)$

$= tt_1a+tb-tt_1b+(1-t)(\,t_2a+b-t_2b\,)$

$= tt_1a+tb-tt_1b+t_2a+b-t_2b-tt_2a-tb+tt_2b$

$= (tt_1+t_2-tt_2)a+(1-tt_1-t_2+tt_2)b$

$= (tt_1+t_2-tt_2)a+(\,1-(tt_1+t_2-tt_2)\,)b$

ここで、$tt_1+t_2-tt_2 = tt_1+(1-t)t_2$ なので、$tt_1+t_2-tt_2$ は t_1 と t_2 を内分する点となる。

よって、$0 < tt_1+t_2-tt_2 < 1$ となる。つまり、k は区間 $[\,a\,,\,b\,]$ を $(\,1-(tt_1+t_2-tt_2)\,) : tt_1+t_2-tt_2$ に内分する点である。

不思議だと感じるのは私だけであろうか？　また、簡単な事実ではあるが、
$f(at+(1-t)b)=tf(a)+(1-t)f(b)$ となるのは、f が一次関数のときである。

（P．103　定理2．13の途中計算）

(2.15)　$f(x) \geqq f(a)+f'(a)(x-a)$ ← a を中心とするテーラーの定理より

x を中心とするテーラーの定理より　$f(a) \geqq f(x)+f'(x)(a-x)$

したがって、$f(b) \geqq f(x)+f'(x)(b-x)$ となる。

$t(a-x)+(1-t)(b-x)=t\{a-(ta+(1-t)b)\}+(1-t)\{b-(ta+(1-t)b)\}$

$=t\{a-at-b+bt\}+(1-t)\{b-at-b+bt\}$

$=t\{a-at-b+bt\}+(1-t)\{-at+bt\}=t\{(a-b)-t(a-b)\}+t(1-t)(b-a)$

$=(a-b)\{t-t^2-t(1-t)\}=0$

$a) \Rightarrow b)$

$$\frac{tf(a)+(1-t)f(b)-f(a)}{ta+(1-t)b-a}=\frac{(1-t)f(b)-f(a)(1-t)}{(1-t)b-a(1-t)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{f(b)-(tf(a)+(1-t)f(b))}{b-(ta+(1-t)b)}=\frac{f(b)-tf(a)-f(b)+tf(b)}{b-ta-b+tb}=\frac{t(f(b)-f(a))}{t(b-a)}$$

（P．104　例6）

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right)=f\left(t_1x_1+\cdots+t_{n-1}x_{n-1}+\{t_n+t_{n+1}\}\times\left\{\frac{t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}}{t_n+t_{n+1}}\right\}\right)$$

ここで、$t_1+\cdots+t_{n-1}+(t_n+t_{n+1})=1$ であるから、帰納法の仮定から

$$\leqq \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)+(t_n+t_{n+1})\times f\left(\frac{t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}}{t_n+t_{n+1}}\right)$$

$\dfrac{t_n}{t_n+t_{n+1}}+\dfrac{t_{n+1}}{t_n+t_{n+1}}=1$ なので、またもや帰納法の仮定から

$$\leqq \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)+(t_n+t_{n+1})\times\left\{\frac{t_n}{t_n+t_{n+1}}f(x_n)+\frac{t_{n+1}}{t_n+t_{n+1}}f(x_{n+1})\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$$

特に $f(x)=-\ell og\, x$ は $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$ だから、$I=(0, \infty)$ で狭義凸である。

そこで特に (2.16) で $t_i=\dfrac{1}{n}>0$ とすると

$$\ell og\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell og\, x_i = \ell og\,(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

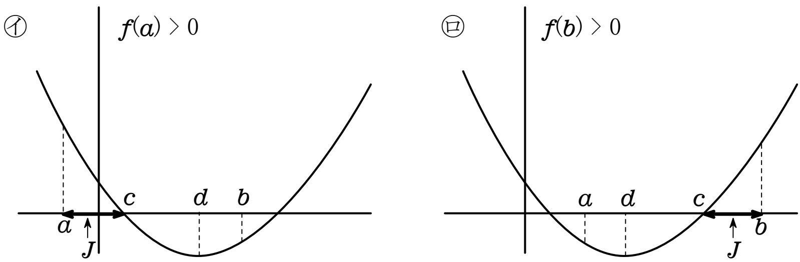
となる。$\ell og\ x$ は狭義単調増加だから

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

を得る。= になるのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときのみである。

（P. 105　定理2. 14（ニュートンの逐次近似法の証明）

条件から関数のイメージは次の2つのようになる。



$f''>0$ なので f' は狭義単調増加、よって、$f'(x)=0$ となる x の値はあっても 1 つしかない。それを d とすれば $d\in I$ は f の最小点となる。$f(a)f(b)<0$ 、このことから $f(a)$, $f(b)$ のどちらかが正で他は負であり、$f(a)$, $f(b) \neq 0$ がいえる。つまり $f(d)<0$ となる。したがって $J=\{\, x \in I \mid f(x) \geqq 0 \,\}$ は d を含まない。よって、J 上で $f' \neq 0$ である。そのことは、f' は連続なので J 上で常に $f'>0$ または $f'<0$ ということになる。

イ）中間値の定理により、$a<d \leqq x<c$ となる d が登場するが、ここで、最小点である d と混同してはいけない。別物である。

次に、f' が J 上定符号であることだが、平均値の定理より、$a<e<c$ なる e が存在して、$f(c) - f(a) = (c-a)f'(e)$ とすることができる。

$f(c) = f(a) + (c-a)f'(e)$ となり、$f'>0$ ならば、$c - a > 0$ より、$0 = f(c) > f(a)$ となって、$f(a) > 0$ に矛盾してしまう。よって、$f'<0$ となる。

ロ）については、$c<x<b$ なる x に対し $f(x) \leqq 0$ ならば、$c<x \leqq d<b$ （d は

最小点ではない)，$f(d) = 0$ となる d が存在して、唯一の零点 c に矛盾する。あとは同様にして、$J = [\ c\ ,\ b\ ]$ となる。次に、J 上で $f\ ' > 0$ であることだが、平均値の定理より、$c < e < b$ なる e が存在して、$f(b) - f(c) = (\ b-c\ )f\ '(e)$ とすることができる。$f(c) = f(b) - (\ b-c\ )f\ '(e)$ となり、$f\ ' < 0$ ならば $b-c > 0$ から、$0 = f(c) > f(b)$ となり、$f(b) > 0$ に矛盾してしまう。よって、$f\ ' > 0$ である。

(2．18) イ)であるが、$f(c) > f(x_n) + (\ c - x_n\ )f\ '(x_n)$ だから、$f\ '(x_n) < 0$ より

$$\frac{f(c)}{f\ '(x_n)} < \frac{f(x_n) + (\ c - x_n\ )f\ '(x_n)}{f\ '(x_n)} \text{ なので } c - x_{n+1} = c - (\ x_n - \frac{f(x_n)}{f\ '(x_n)}\ )$$

$$= \frac{f(x_n) + (\ c - x_n\ )f\ '(x_n)}{f\ '(x_n)} > \frac{f(c)}{f\ '(x_n)} = 0$$ を得る。

ロ) $f\ '(x_n) > 0$ だから、$f(x_0) > 0$ から、$x_{n+1} < x_n$ がわかる。また、イ)と同様に

$$\frac{f(c)}{f\ '(x_n)} > \frac{f(x_n) + (\ c - x_n\ )f\ '(x_n)}{f\ '(x_n)} \text{ なので } c - x_{n+1} = c - (\ x_n - \frac{f(x_n)}{f\ '(x_n)}\ )$$

$$= \frac{f(x_n) + (\ c - x_n\ )f\ '(x_n)}{f\ '(x_n)} < \frac{f(c)}{f\ '(x_n)} = 0$$ を得る。

(P．106　例7)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2}{2x_n} - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}(\frac{x_n^2 + a}{x_n}) = \frac{1}{2}(\ x_n + \frac{a}{x_n}\ )$$ となる。また

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(\frac{x_n^2 + a}{x_n}) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{(\ x_n - \sqrt{a}\ )^2}{2x_n}$$

つまり、$x_{n+1} - \sqrt{a}$ は、$(\ x_n - \sqrt{a}\ )^2$ 程度に減少していくことになる。

(P．107　方向微分)

ここでは、f は R^n から R^m への関数であるが、$g(t) = f(a+te)$ とおくことで R から R^m への一変数ベクトル値関数の微分に結びつけている。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a_1+te_1 \\ a_2+te_2 \\ \vdots \\ a_n+te_n \end{pmatrix},\ g(t) = f(a+te) = \begin{pmatrix} f_1(a+te) \\ f_2(a+te) \\ \vdots \\ f_m(a+te) \end{pmatrix}$$

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\frac{f(a+he)-f(a)}{h}=\begin{pmatrix}\dfrac{f_1(a+he)-f_1(a)}{h}\\ \vdots \\ \dfrac{f_m(a+he)-f_m(a)}{h}\end{pmatrix}$$

しかし、P. 82の微分の定義では

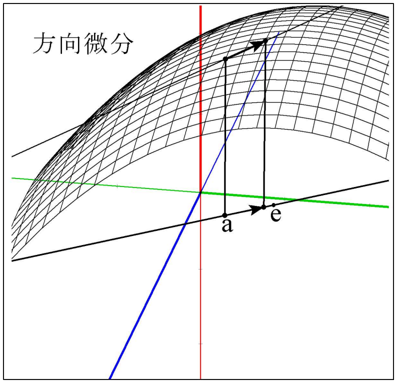
$e\neq 0$ のとき $u=\dfrac{e}{|e|}$ とすれば

$(D_e f)(a)=|e|(D_u f)(a)$ となることは

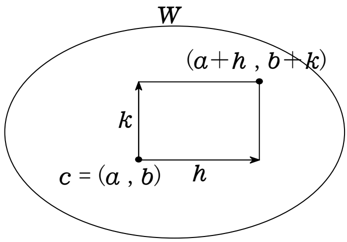
説明できない。

P. 121に譲るとしたほうがよい。

次の偏微分については問題ない。



(P. 110　定理3. 2の証明)



$\phi(x)=f(x\ ,\ b+k)-f(x\ ,\ b)$ と置けば

$\phi'(x)=f_x(x\ ,\ b+k)-f_x(x\ ,\ b)$ であり、

$\phi(a+h)=f(a+h\ ,\ b+k)-f(a+h\ ,\ b)$

$\phi(a)=f(a\ ,\ b+k)-f(a\ ,\ b)$

となる。したがって、

$\Delta(\ell)=\Delta(h,k)=f(a+h\ ,\ b+k)-f(a+h\ ,\ b)-f(a\ ,\ b+k)+f(a\ ,\ b)$

$=\phi(a+h)-\phi(a)$

$f_{x,y}$ は存在して c で連続なので

$\begin{pmatrix}a+\theta h\\ b+\theta' k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=c$ ならば、$f_{x,y}(a+\theta h\ ,\ b+\theta' k)=\dfrac{\Delta(h,k)}{hk}$ から、左辺は $f_{x,y}(c)$ に収束する。よって、右辺も存在し $\displaystyle\lim_{(h,k)\to 0,h,k\neq 0}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=f_{x,y}(c)$ となる。また、$\phi(y)=f(a+h\ ,\ y)-f(a\ ,\ y)$ と置けば

$\phi'(y)=f_y(a+h\ ,\ y)-f_y(a\ ,\ y)$ となり

$\phi(b+k)=f(a+h, b+k)-f(a, b+k)$ 、 $\phi(b)=f(a+h, b)-f(a, b)$となる。したがって、$\Delta(h,k)=\phi(b+k)-\phi(b)$ 、以下は同様にしてわかる。

（P. 111　定義4の補足）

R^n の開集合 U で定義された関数 f は当然ベクトル値関数でもよく

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & f_{x,x,x} & \\
 & f_{x,x} & \to & f_{x,x,y} & \\
 & & & f_{x,x,z} & \\
f_x \to & f_{x,y} & \to & \vdots & \\
 & f_{x,z} & \to & \vdots &
\end{array}
$$

$n=3$, $k=3$ の場合

$3+3^2+3^3$ 個となる。

（P. 111　定理3．3の証明補足）

解析概論 P.59（高木貞治 著）では

$f_{xxy}=(f_x)_{xy}=(f_x)_{yx}=f_{xyx}$ のように相接する二つの添字を交換してもよいのでそれを繰り返して

$f_{xyz}=(f_x)_{yz}=(f_x)_{zy}=f_{xzy}=(f_{xz})_y=(f_{zx})_y=f_{zxy}=f_{zyx}=f_{yzx}=f_{yxz}$

x , y , z を x_1 , x_2 , x_3 とし、$\sigma\in S_3$（対称群）とすれば、任意の $\sigma\in S_3$ に対し

$f_{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}}=f_{x_1x_2x_3}$

言いかえれば、任意の順（順列）で偏微分しても結果は等しいということにである。

一般に f が C^k 級関数として証明すると、次のようになる。$p\leqq k$ として

置換　p 個の元から成る集合、たとえば $\{1,2,\cdots,p\}$ の一対一変換（全単射）を p 文字の置換という。それは、$1,2,\cdots,p$ を並びかえる操作と同じである。よって、p 文字の置換は $p!$ 個ある。

一般に次のように表す。

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p\end{pmatrix}$　と書き、$\sigma(1)=i_1$, $\sigma(2)=i_2$, $\cdots$, $\sigma(n)=i_n$ となる。

$f:R^n\to R^m$ なので、x_1 , x_2 , $\cdots$, x_n の n 個の変数がある。f はベクトル値関数であるが、成分ごとに分けて考えればよいので、$m=1$ とする。n 個の変数の中から p 個の変数を選ぶので、x_1 , x_1 , x_2 , x_3 , $\cdots$ というように同じ変数があってもよい。したがって n^p 個の選び方がある。

さて、p 個の変数を $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}\}$ とする。同じ変数があってもよい。また、見やすくするため、$f_{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}} \to (f)x(i_1)x(i_2)\cdots x(i_p)$ （f を $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}$ の順で偏微分するという意味）で表すとする。証明したいことは、任意の $\sigma \in S_p$ に対し

(3.3)　$(f)x(i_{\sigma(1)})x(i_{\sigma(2)})\cdots x(i_{\sigma(p)}) = (f)x(i_1)x(i_2)\cdots x(i_p)$

が成り立つことである。p で成り立つと仮定し、帰納法で証明する。

(ｉ) $\sigma(1)=1$　すなわち $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & \sigma(2) & \cdots & \sigma(p) \end{pmatrix}$ とした場合

$(f)x(i_{\sigma(1)})x(i_{\sigma(2)})\cdots x(i_{\sigma(p)}) = (f)x(i_1)x(i_{\sigma(2)})\cdots x(i_{\sigma(p)})$

帰納法の仮定から

$= (f_{x_{i_1}})x(i_{\sigma(2)})\cdots x(i_{\sigma(p)}) = (f_{x_{i_1}})x(i_2)\cdots x(i_p) = (f)x(i_1)x(i_2)\cdots x(i_p)$

そこで、任意の $\sigma(1) \neq 1$ に対して、$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \sigma(1) & \cdots & p \\ 1 & \sigma(1) & 3 & \cdots & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$ とすれば、(ｉ)より $\mu(1)=1$ なので

$(f)x(i_1)x(i_2)\cdots x(i_p)$

$= (f)x(i_{\mu(1)})x(i_{\mu(2)})\cdots x(i_{\mu(\sigma(1))})\cdots x(i_{\mu(p)}) = (f)x(i_1)x(i_{\sigma(1)})x(i_3)\cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma(1)\text{番目}}}{x(i_2)}\cdots x(i_p)$

$= (f_{x_{i_1}x_{i_{\sigma(1)}}})x(i_3)\cdots x(i_2)x(i_p)$

ここで、$x_{i_1} = x_{i_{\sigma(1)}}$ ならば、同じ変数で2回続けて偏微分することになり、$i_1 \neq i_2$ ならば、定理3．2より

$= (f_{x_{i_{\sigma(1)}}x_{i_1}})x(i_3)\cdots x(i_2)\cdots x(i_p)$

$= (f)x(i_{\sigma(1)})x(i_1)x(i_3)\cdots x(i_2)\cdots x(i_p)$

$x(i_1)x(i_3)\cdots x(i_2)\cdots x(i_p)$ は帰納法の仮定からどの様な順にしてもよいので、まだ使われていない $x(i_{\sigma(2)})x(i_{\sigma(3)})\cdots x(i_{\sigma(p)})$ 順に並び替えることができる。よって

$= (f)x(i_{\sigma(1)})x(i_{\sigma(2)})x(i_{\sigma(3)})\cdots x(i_{\sigma(p)})$

最後の等式が成り立つことがわかりにくいかもしれない。例えば、$p=5$ で

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$\sigma(1)=4$ なので $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ になる。

$\mu(1)=1$ なので（ｉ）より

$(f)x(i_1)x(i_2)x(i_3)x(i_4)x(i_5)=(f)x(i_{\mu(1)})x(i_{\mu(2)})x(i_{\mu(3)})x(i_{\mu(4)})x(i_{\mu(5)})$

$=(f)x(i_1)x(i_4)x(i_3)x(i_2)x(i_5)=(f_{x_{i_1}x_{i_4}})x(i_3)x(i_2)x(i_5)=(f_{x_{i_4}x_{i_1}})x(i_3)x(i_2)x(i_5)$

$=(f)x(i_4)x(i_1)x(i_3)x(i_2)x(i_5)$

$=(f)x(i_4)x(i_5)x(i_3)x(i_1)x(i_2)$

$=(f)x(i_{\sigma(1)})x(i_{\sigma(2)})x(i_{\sigma(3)})x(i_{\sigma(4)})x(i_{\sigma(5)})$

解析概論では、「…等」で終わっているが、任意の置換は相接する互換の積に分解できるという性質を使えばもっと簡単に証明できそうである。例えば

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$ ならば

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}(3,4)(2,3)(1,2)(4,5)(3,4)(2,3)(4,5)(4,3)$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=1 \quad\rightarrow\quad \sigma=(4,3)(4,5)(2,3)(3,4)(4,5)(1,2)(2,3)(3,4)$

証明の中の（ⅱ）や $D(i)$ もわかりにくいと思い使わなかった。

（P．114　例3）

$\dfrac{|x^2+y^2|}{|x|+|y|}=\dfrac{|x|^2+|y|^2}{|x|+|y|}=\dfrac{|x|^2}{|x|+|y|}+\dfrac{|y|^2}{|x|+|y|}\leqq\dfrac{|x|^2}{|x|}+\dfrac{|y|^2}{|y|}=|x|+|y|\rightarrow 0\ ((x,y)\rightarrow 0)$

（P．114　例5）

$\ell og\ x=z$ と置けば、$\ell og\ x^b=b\ell og\ x=bz\ \rightarrow x^b=e^{bz}$ なので、$\dfrac{\ell og\ x}{x^b}=\dfrac{z}{e^{bz}}$ $\rightarrow 0\ (z\rightarrow 0)$

（P．116　命題4．3）

$f(x)=\sum_{m=0}^{n}\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+o((x-a)^n)$

$=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$

$g(x)=\sum_{m=0}^{n}\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+o((x-a)^n)$

$=\dfrac{g^{(\ell)}(a)}{\ell!}(x-a)^\ell+\cdots+\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$

(P. 116　例11)

$$g(x) = x - \tan x = x - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \cos^{-2} x$$

$$g''(x) = -1 \times (-2\cos^{-3} x) \times (-\sin x) = -2\cos^{-3} x \sin x$$

$$g'''(x) = 6\cos^{-4} x \times (-\sin x) \times \sin x - 2\cos^{-3} x \times \cos x$$

$$= -6\cos^{-4} x \sin^2 x - 2\cos^{-2} x$$

$$\lim_{x \neq 0, x \to 0} g'''(x) = -2$$

(P. 117　例13)

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots \quad (|t| < 1)$$

左辺は、$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = [\log(1+t)]_0^x = \log(1+x)$

右辺は、$\displaystyle\int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)\, dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

よって、$\displaystyle\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$　$(|x| < 1)$　そこで

$$\frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{1}{x}\{\log((1+\frac{1}{x})x)\} = \frac{1}{x}\{\log x + \log(1+\frac{1}{x})\}$$

$$= \frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x}\log(1+\frac{1}{x})$$

$\displaystyle|\frac{1}{x}| < 1$ $(x \to \infty)$ なので、第二項を展開すると

$$\frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x}\{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2}) + o(\frac{1}{x^2})\}$$

$$= \frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3}) \quad (x \to \infty)$$

ここで、主要部 $\displaystyle\frac{1}{x}\log x$ が x^a の形の関数の一次結合で表すことができないこと

は、P. 115の例5よりわかる。なぜなら、仮に、$\frac{1}{x}\,\ell og\;x = c_1x^{a_1}+c_2x^{a_2}+\cdots+c_n x^{a_n}+o(x^{a_n})$ （$x\to\infty$） （$a_i\in R$）と置けたとすれば、主要部は $c_1x^{a_1}$であり、$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}\ell og\;x}{c_1x^{a_1}}=1$ とならなければならない。しかし、$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell og\;x}{x^{a_1+1}}$ は $a_1+1\leqq 0$ であれば $+\infty$ となり、$a_1+1>0$ ならば 0 となってしまうため、同値とはならない。つまり、このときの関数族は $\{\,x^n(\ell og\;x)^m \mid n,m$ は整数$\,\}$である。$m=0$ とすれば、$\frac{1}{x^2}=x^{-2}(\ell og\;x)^0$ 、他も同様にすればよい。

ここで漸近展開をするときの注意であるが

ｉ）$f=c_1g_1+\cdots+c_ng_n+o(g_n)$ （$c_i\neq 0$, $x\to a$）

ⅱ）$g_{k+1}=o(g_k)$ （$x\to a$, $1\leqq k\leqq n-1$）

a が特定の数であるか、また、$+\infty$ であるか、また、f が無限小であるか無限大であるかによって、g_i の添字（何というべきか？）が大きい順か小さい順に交換しなければいけないことに注意したい。

関数 f の a における Φ に関する漸近展開の主要部 c_1g_1 は f と同値な無限小（または、無限大）である。なぜなら、f が漸近展開できたとすれば

$f=c_1g_1+\cdots+c_ng_n+o(g_n)$ （$g_k\in\Phi$）と表すことができるので

$$\frac{f}{c_1g_1}=1+\frac{c_2g_2+\cdots+c_ng_n+o(g_n)}{c_1g_1}\to 1 \ (x\to a)$$

よって、$f\sim c_1g_1$ となるはずである。

(4.2)　$g\,,g'\in\Phi\,,\,g\sim cg'\Rightarrow g=g'\,,\,c=1$

という性質を Φ が持つとき、主要部は一意的に定まるとあるが、実際、仮に f が漸近展開できたとして、その主要部が c_1g_1 , $c'_1g'_1$ とする。

$f\sim c_1g_1\sim c'_1g'_1$ なので $\frac{c_1g_1}{c'_1g'_1}\to 1$ （$x\to a$） つまり $\frac{g_1}{g'_1}\to\frac{c'_1}{c_1}$ （$x\to a$）

$\frac{c'_1}{c_1}=c$ とすれば、$g_1\sim cg'_1$ ということになり、(4.2) から、$g_1=g'_1$, $c_1=c'_1$ とな

る。あとは帰納法で、f の第 n 項までの漸近展開が $c_1g_1+\cdots+c_ng_n$ において、第 $(k-1)$ 項までが一意的に定まるとすれば、$f-(c_1g_1+\cdots+c_{k-1}g_{k-1})$ の主要部は c_kg_k なので、c_kg_k も一意的に定まることになる。

（P. 117　例14）

$\Phi=\{\, x^a(\,\log x\,)^b e^{p(x)} \mid a\,,b\in R\,,p(x)$ は多項式で $p(0)=0\,\}$ も (4.2) をみたすとあるが、$a\,,b\in R$ でよいのか疑問である。$a\,,b\in Z$ ではないだろうか？

ここで、練習問題にもある $(\,\sin x\,)^x\ (\,x\to+0\,)$ を漸近展開してみると

$f(x)=(\,\sin x\,)^x$

$\log f(x)=x\log(\sin x)$

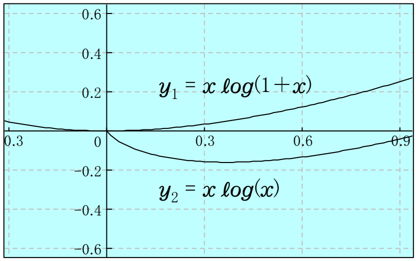
$\sin x=x+o(x)\ \ (\,x\to+0\,)$

$f(x)=e^{x\log(\sin x)}=e^{x\log(x+o(x))}$

$=e^{x\log\{\,x(\,1+\frac{o(x)}{x}\,)\,\}}$

$=e^{x\log x\,+\,x\log(1+\frac{o(x)}{x})}$

$=e^{x\log x}\times e^{x\log(1+\frac{o(x)}{x})}$



ここで、$o(\,x\,)$ を x^2 とおいて、$x\log x$ と $x\log(1+x)$ を比べると $x\to0$ ならば、$x\log(1+x)\to0$　多少強引だが、ほとんど無視できるので

$f(x)\cong e^{x\log x}=1+x\log x+\frac{1}{2}(x\log x)^2+o((x\log x)^2)$

となる。

（P. 117　例15）

$\log(\,x-1\,)=\log x+\log(\,1-\frac{1}{x}\,)=\log x+(-\frac{1}{x})-\frac{1}{2}(-\frac{1}{x})^2+o((\,-\frac{1}{x}\,)^2)$

$=\log x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\ \ (\,x\to+\infty\,)$

（P. 120　定義 1 (多変数実数値関数の微分法)）

もし、

$$\lim_{h\to0,h\neq0}\frac{f(a+h)-f(a)}{|h|}=\alpha$$

が存在するとき、$f(x)$ の点 a における微分係数と定義するのが自然のような気がするが、$f(x)=\ell(x_1-b_1)+m(x_2-b_2)$ ($a=(a_1, a_2)$, $h=(h_1, h_2)$) とすると

$h_2=0$, $h_1\to 0$ ($h_1\neq 0$) とした場合

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{|h|}$$

$$=\lim_{h_1\to 0, h_1\neq 0}\frac{\ell(x_1+h_1-b_1)+m(x_2+h_2-b_2)-(\ell(x_1-b_1)+m(x_2-b_2))}{|h_1|}$$

$$=\lim_{h_1\to 0, h_1\neq 0}\frac{\ell(x_1+h_1-b_1)+m(x_2-b_2)-(\ell(x_1-b_1)+m(x_2-b_2))}{|h_1|}=\pm\ell$$

$h_1=0$, $h_2\to 0$ ($h_2\neq 0$) とした場合

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{|h|}$$

$$=\lim_{h_2\to 0, h_2\neq 0}\frac{\ell(x_1+h_1-b_1)+m(x_2+h_2-b_2)-(\ell(x_1-b_1)+m(x_2-b_2))}{|h_2|}$$

$$=\lim_{h_2\to 0, h_2\neq 0}\frac{\ell(x_1-b_1)+m(x_2+h_2-b_2)-(\ell(x_1-b_1)+m(x_2-b_2))}{|h_1|}=\pm m$$

となり、極限値が一つに定まらない。

そこで、次のように定義している。

n 項横ベクトル $c=(c_1, \cdots, c_n)$ が存在して

$f(a+h)-f(a)=ch+o(|h|)$ 　($h\to 0$)

このとき、c を f の a における微分係数と定義する。

このようにすると、上の例は

$f(a+h)-f(a)=\ \ell((a_1+h_1)-b_1)+m((a_2+h_2)-b_2)-(\ \ell(a_1-b_1)+m(a_2-b_2)\ )$

$=\ell h_1+mh_2=(\ell\quad m)\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$, $o(|h|)=0$

$h_2=0$, $h_1\to 0$ としても $h_1=0$, $h_2\to 0$ であっても

微分係数は $c=(\ell, m)$ となり、一つに定めることができる。

（P. 121　定理 5. 2）

実数値関数 f が、$x \in U$ で微分可能であるとき、f は x で任意の e 方向に微分可能であって、逆は言えないことに注意したい。

P. 107 に突然出てきた e 方向の微分がこれで定義できることになる。

$g(t) = f(a + te)$ （ $t \in R$ ）

としたとき、$t = 0$ で微分可能なとき、f は a において e 方向に微分可能という。

$e \neq 0$ のとき、$h = te$ とおくと、$h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$, $h \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$ である。

そして、f が a で微分可能であれば

$f(a + h) - f(a) = ch + o(|h|)$

が成り立つから

(5.4) $$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(a+h)-f(a) - ch}{|h|} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{o(|h|)}{|h|} = 0$$

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \left| \frac{f(a+te)-f(a)}{t} - f'(a)e \right| = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \left| \frac{f(a+te)-f(a)-f'(a)te}{t} \right|$$

$$= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|}{|h|} |e|$$

$$= |e| \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|}{|h|} = 0$$

したがって、$(D_e f) = f'(a)e$ となる。

このことによって、P. 108の $e \neq 0$ のとき $u = \dfrac{e}{|e|}$ とおけば、$e = |e|u$ なので

$(D_e f) = (D_{|e|u} f) = f'(a)|e|u = |e| f'(a)u = |e| (D_u f)$

（P. 121　例2） (注　行ベクトル表示)

$A = (1, 0, a)$, $B = (0, 1, b)$

$C = (1, 1, a+b)$

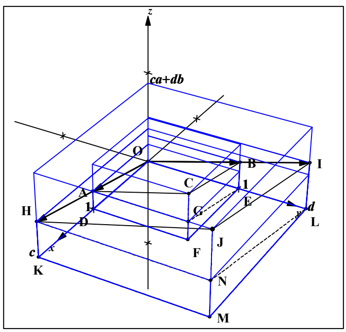
$H = (c, 0, ca)$, $I = (0, d, db)$

$J = (c, d, ca+db)$

$E = (0, 1, 0)$, $G = (1, 1, a)$

$\overrightarrow{EG} = (1, 0, a)$

$L = (0, d, 0)$, $N = (c, d, ca)$



$\overrightarrow{LN}=(c\,,0\,,ca)=c(1\,,0\,,a)$　よって　$\overrightarrow{OA}\,//\,\overrightarrow{LN}\,//\,\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{IJ}=(c\,,0\,,ca)=c(1\,,0\,,a)$ よって　$\overrightarrow{IJ}\,//\,\overrightarrow{LN}$

$|\overrightarrow{IJ}|=|\overrightarrow{LN}|=|\overrightarrow{OH}|$ なので四角形 $OHJI$ は平行四辺形となる。

したがって、$z=ax+by$ は　四角形$OHJI$ を含む平面ということになる。

4 次元だったら、

$A=(x\,,0\,,0\,,ax)=x(1,0,0,a)$, $B=(0\,,y\,,0\,,by)=y(0\,,1\,,0\,,b)$

$C=(0\,,0\,,z\,,cz)=z(0\,,0\,,1\,,c)$, $O=(0\,,0\,,0\,,0)$ とした場合

$D=(x\,,y\,,z\,,ax+by+cz)$ で 5 点あり、3 次元のようにイメージすることは大変である。くどくなったが調べたくなってしまうのも私が素人だからである。

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}x=c\\y=d\\z=ac+bd\end{cases}\quad\Rightarrow\ z=ax+by$$

$n+1$ 次にすると、

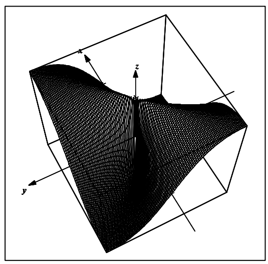
$$\begin{pmatrix}x_1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_{n+1}\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_2\end{pmatrix}+\cdots+t_n\begin{pmatrix}0\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\\a_n\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=t_1\\x_2=t_2\\\quad\cdot\\\quad\cdot\\x_n=t_n\\x_{n+1}=t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n\end{cases}$$

よって、 $x_{n+1}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ となる。

$a_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ とすれば、接超平面を表すことになる。

（P．122　例3）

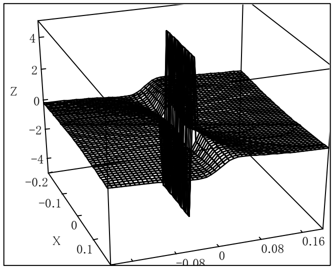
$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ の3Dグラフは右図のようになる。グラフを見ると x 軸、y 軸が曲面上にあることがわかる。不連続処理をしていない。（function　view による）



（P．122　例4）

$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ の3Dグラフは右図のようになる。 不連続処理をしている。

（カルキングProによる）



（P．123　定理5．3）

1 点 x だけでなく x のある近傍で C^1 であることから、平均値の定理が使えるメリットがある。

$$h_{(1)}=\begin{pmatrix}h_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ h_n\end{pmatrix},\ h_{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ h_2\\ h_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ h_n\end{pmatrix},\ h_{(3)}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ h_3\\ h_4\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ h_n\end{pmatrix},\ \cdots,\ h_{(i)}=\begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ h_i\\ \cdot\\ \cdot\\ h_n\end{pmatrix},\ \cdots,\ h_{(n)}=\begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ h_n\end{pmatrix},\ h_{(n+1)}=\begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}$$

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\{f(x+h(i))-f(x+h(i+1))\}$$

$$=f(x+h(1))-f(x+h(2))+f(x+h(2))-f(x+h(3))\cdots$$

$$+f(x+h(\mathrm{n}))-f(x+h(\mathrm{n}+1))$$

ここで

$${}^t(x+h(i))-{}^t(x+h(i+1))=(0,\cdots,0,h_i,0,\cdots,0)$$

この隙間に平均値の定理を使い

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\widetilde{h(i)})$$

を得る。続きは、

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}h_i\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\widetilde{h(i)})-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\}$ の式が内積であることからシュワルツの不等式が適用できる。

次の例5から例7までは、まだ証明されていない定理6．6の連鎖律を使っている。

（P. 124　例5）

$t = r^2 - x^2 - y^2$ とすれば、$f(x,y) = t^{\frac{1}{2}}$ となるので、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{f}$

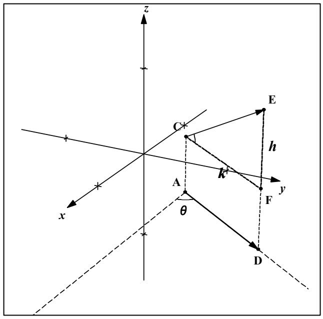
同様に $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{y}{f}$ となる。ここで、$c = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2}$ とすれば、超接平面は

$$z - c = \left(-\frac{a}{c} , -\frac{b}{c} \right) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$z - c = -\frac{a}{c}(x-a) - \frac{b}{c}(y-b)$$

したがって $a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0$ となる。

（P. 125　定義 3 勾配）（注　行ベクトル表示）



$A = (x, y, 0)$, $e = (k\cos\theta, k\sin\theta)$

$D = (x + k\cos\theta, y + k\sin\theta, 0)$

$C = (x, y, ax + by)$ とする。

$E = (x + k\cos\theta, y + k\sin\theta, a(x + k\cos\theta) + b(y + k\sin\theta))$

$h = ak\cos\theta + bk\sin\theta = EF$

$k = AD$, $(a, b, k \in R)$

$\dfrac{h}{k} = a\cos\theta + b\sin\theta$ となる。次に $\dfrac{h}{k}$ が最大になるときの θ を求めることにする。

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ としてよい。

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \div \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ である。

$$\frac{h}{k} = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\theta \right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} (\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = \sqrt{a^2+b^2} \cos(\theta - \alpha)$$

よって、$\theta - \alpha = 0$ のとき最大で、最大値は $\sqrt{a^2+b^2}$ となる。

このことは、$\vec{AD} = e$ の向きが ${}^t(a, b)$ に一致することを意味する。

${}^t(a, b) = {}^t\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ とすれば、その方向が最大方向微分係数となり、f は

スカラー場だったので、ベクトル場を与えることになる。これを**スカラー場 f の勾配**と呼び、∇f と表す。∇ はナブラと読み、$grad\, f$ とも書く。

（P. 125　例6）

$f(x)=|x-a|=r=\sqrt{t}$　ここで　$t=(x-a)^2=(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2$ とする。

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(x_i-a_i)=\dfrac{(x_i-a_i)}{r}$ したがって $|x|=r$ ならば $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}=\dfrac{x_i}{r}$ となり、例7以降で使える。

（P. 125　例7）

$f(x)=\dfrac{1}{r}$　ならば、$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=-1\cdot r^{-2}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x_i}=-1\cdot r^{-2}\cdot\dfrac{x_i}{r}=-\dfrac{x_i}{r^3}$ となる。$|x|=r$ なので　、$grad\, f(x)=-\dfrac{x}{r^3}$ より、その大きさは，$\left|-\dfrac{x}{r^3}\right|=\dfrac{1}{r^2}$ となり、原点からの距離の自乗に反比例し、原点の方を向くベクトルを表す。

重力場ポテンシャル

$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{m_i}{|x-a_i|}$ ラプラスの方程式 $\Delta f=\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=0$ をみたすことを示す。

ここで、解析入門の本文にあるように $f(x)=\dfrac{m_1}{|x-a_1|}+\dfrac{m_2}{|x-a_2|}+\cdots+\dfrac{m_k}{|x-a_k|}$　なので 例 6、7 と m_k は定数であることから $f(x)=\dfrac{1}{r}$ のときを確かめれば十分であることがわかる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{x_i}{r^3}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{r^3}\cdot x_i\right)=-\frac{1}{r^3}-x_i\left\{-3r^{-4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}\right\}$$

$$=-\frac{1}{r^3}-x_i\left\{-3r^{-4}\cdot\frac{x_i}{r}\right\}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x_i^2}{r^5}$$

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x_1^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x_2^2}{r^5}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x_3^2}{r^5}\right)$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

$f(x) = \dfrac{1}{r^{n-2}}$ の場合は同様にして

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = (-n+2)r^{-n+1}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = (-n+2)r^{-n+1}\frac{x_i}{r} = \frac{(-n+2)x_i}{r^n}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{(-n+2)}{r^n} + x_i\left\{(-n+2)(-n)r^{-n-1}\frac{x_i}{r}\right\}$$

$$= \frac{(-n+2)}{r^n} + \frac{x_i^2(n^2-2n)}{r^{n+2}}$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{n(-n+2)}{r^n} + \frac{(n^2-2n)\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{r^{n+2}} = \frac{-n^2+2n}{r^n} + \frac{(n^2-2n)r^2}{r^{n+2}} = 0$$

（P．128　ベクトル値関数の微分可能の定義）

(6.1)　$f(x+h)-f(x) = Mh + o(|h|)$　$(h \to 0)$

この $o(|h|)$ であるが、これはベクトル値関数であることに注意したい。また

(6.2)　$$\lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{f(x+h)-f(x)-Mh}{|h|} = 0$$

の右辺の 0 もベクトルである。前ページの無限小についての内容はそれを確認するためのものである。

（P．128　定理6．1）

本来、$-\varepsilon < t < \varepsilon$ であるが、微分可能であるので、$0 < t < \varepsilon$ とおけることに注意したい。なので

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0}\frac{(M-N)tu}{|tu|} = \lim_{t\to 0, t\neq 0}\frac{(M-N)tu}{t|u|} = \frac{(M-N)u}{|u|} = 0$$

（P．130　命題6．5）

$$\sum_{i=1}^{m}|{}^t a_i|^2 = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \|A\|^2$$

$a_{ij}^2 = |a_{ij}|^2$ としているのは、複素数になった場合のことも考えてのことだろう。

ここでの $\|A\| \neq \det A$ であり、ノルムである。

（P．131　定理6．6（連鎖律））

f は x で微分可能なので（6．2）から

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{|h|} = 0$$

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{|h|} \quad (h\neq 0)$$

とおくと、$g(y)$ についても同様に

$$(6.12)\quad f(x+h) - f(x) - f'(x)h = |h|\,\varepsilon(h) \quad (h\neq 0)$$

$$g(y+k) - g(y) - g'(y)k = |k|\,\delta(k) \quad (k\neq 0)$$

とすることができる。$\varepsilon(h)$，$\delta(k)$ は R^n，R^m における 0 のある除外近傍で定義されており、

$$(6.13)\quad \lim_{h\to 0, h\neq 0} \varepsilon(h) = 0 \;,\; \lim_{k\to 0, k\neq 0} \delta(k) = 0$$

が成り立つ。いま $\varepsilon(0) = 0$，$\delta(0) = 0$ として、0 でも ε, δ を定義すれば ε, δ は 0 で連続になる。次に

$f(x+h) - f(x) = k = k(h)$ とおけば、f は x で微分可能なので x で連続であるから、

(6.14) $h \to 0$ のとき $k = k(h) \to 0$

が成り立つ。

ここで、なぜ（$h \to 0$, $h \neq 0$）を（$h \to 0$）にしておくかは、I 章 定理 6．7の注意 3 から、$\delta(k(h))$ は合成関数であり、$\lim_{h\to 0} \delta(k(h)) = 0$ を保証するためである。

$f(x) = y$ なので、$f(x+h) - y = k$ から $f(x+h) = y + k$ となる。

そこで、独立変数が x から $x+h$ まで変化したときの合成関数 $\phi = g \circ f$ の増分は、

$$\phi(x+h) - \phi(x) = g(f(x+h)) - g(f(x))$$

$$= g(y+k) - g(y)$$

$$= g'(y)k(h) + |k(h)|\,\delta(k(h))$$

$$= g'(y)(f(x+h) - f(x)) + |k(h)|\,\delta(k(h))$$

$= g'(y)(f'(x)h + |h|\varepsilon(h)) + |k(h)|\delta(k(h))$

$= g'(y)f'(x)h + |h|g'(y)\varepsilon(h) + |k(h)|\delta(k(h))$

$= g'(y)f'(x)h + |h|\left(g'(y)\varepsilon(h) + \dfrac{|k(h)|}{|h|}\delta(k(h))\right)$

$= g'(y)f'(x)h + |h|\rho(h)$ … ①

ここで、$\rho(h) = g'(y)\varepsilon(h) + \dfrac{|k(h)|}{|h|}\delta(k(h))$ は分母に $|h|$ があるので、$h = 0$ の除外近傍で定義されている関数である。

$\varepsilon(h)$, $\delta(k)$ はそれぞれ、ベクトル値関数なので、命題6．5によって

$|k(h)| = |f'(x)h + |h|\varepsilon(h)| \leqq |f'(x)h| + |h||\varepsilon(h)|$

$\leqq \|f'(x)\||h| + |h||\varepsilon(h)| = (\|f'(x)\| + |\varepsilon(h)|)|h|$

1つ目の不等号は三角不等式で、2つ目は、命題6．5を使っている。よって

$\dfrac{|k(h)|}{|h|} \leqq (\|f'(x)\| + |\varepsilon(h)|)$

微分可能とは、$g'(y)$, $f'(x)$ が<u>有限確定</u>を意味するので、$\dfrac{|k(h)|}{|h|}$ は 0 のある除外近傍で有界であることがわかる。よって $\displaystyle\lim_{h\neq 0,\, h\to 0} \rho(h) = 0$ がわかった。

①の式から、$\phi(x)$ が x で微分可能であり、$\phi'(x) = g'(y)f'(x)$ となることが示されたことになる。

$\phi'(x) = g'(y)f'(x)$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial g_r}{\partial y_1}} & \boldsymbol{\dfrac{\partial g_r}{\partial y_2}} & \cdots & \boldsymbol{\dfrac{\partial g_r}{\partial y_m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \boldsymbol{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \boldsymbol{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \boldsymbol{\dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \vdots & \cdots & \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_1}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \boldsymbol{\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_p}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \vdots & \cdots & \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_p}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ となる。

$\phi = f(g(x)) = \begin{pmatrix} g_1(f_1, \cdots, f_m) \\ \vdots \\ g_p(f_1, \cdots, f_m) \end{pmatrix}$ なので、 $\dfrac{\partial \phi_r}{\partial x_j} = \boldsymbol{\sum_{\ell=1}^{m} \dfrac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\dfrac{\partial f_\ell}{\partial x_j}}$ （r, j）成分となる。

（例）$f : R^3 \to R^2$, $g : R^2 \to R^2$ が

$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $g(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}$ とすると、f , g は C^∞ 級で

で、合成関数 $\phi = g \circ f$ は微分可能であるので

$$\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz+x+y+z \\ xyz(x+y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xyz+x+y+z \\ x^2yz+xy^2z+xyz^2 \end{pmatrix}$$

$$\phi'(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz+1 & xz+1 & xy+1 \\ 2xyz+y^2z+yz^2 & x^2z+2xyz+xz^2 & x^2y+xy^2+2xyz \end{pmatrix}$$

これを連鎖律で計算すると

$\phi'(a) = g'(f(x))f'(x)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x+y+z & xyz \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} yz+1 & xz+1 & xy+1 \\ 2xyz+y^2z+yz^2 & x^2z+2xyz+xz^2 & x^2y+xy^2+2xyz \end{pmatrix}$$

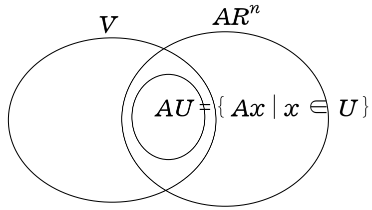
一致することが確認できた。

（P. 134　例4）

$U = \{ x \in R^n \mid Ax \in V \}$ が開集合となる。それは、V が R^m の開集合なので、

$\forall\ x \in U$ ならば、$y = Ax \in V$ で、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(y, \varepsilon) \subset V$ とすることができる。このとき、$U\left(x, \dfrac{\varepsilon}{|A|+1}\right)$ という近傍をとると

$U\left(x, \dfrac{\varepsilon}{|A|+1}\right) \subset U$ とすることができる。なぜなら、$\forall z \in U\left(x, \dfrac{\varepsilon}{|A|+1}\right)$ に対し、$|x-z| < \dfrac{\varepsilon}{|A|+1}$ なので



$|y-Az| = |Ax-Az|$

$\leqq |A||x-z| < \dfrac{|A|\varepsilon}{|A|+1} < \varepsilon$

よって、$Az \in U(y, \varepsilon)$

つまり、$Az \in V$ となり、$z \in U$ したがって、$U\left(x, \dfrac{\varepsilon}{|A|+1}\right) \subset U$ 、U は開集合となる。したがって、$f = g(Ax) : U \to R$ は合成可能である。

次に、$f(x) = g(Ax) \in R$ についてだが

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \leftarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = a_{k,j} \leftarrow k \text{ 行 } j \text{ 列}$$

$$f'(x) = g'(y)(Ax)' \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial y_m} \right) \begin{array}{c} \qquad j\text{ 列} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{kj} & \vdots \\ a_{m1} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{k1}\dfrac{\partial g}{\partial y_k} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\dfrac{\partial g}{\partial y_k} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{kn}\dfrac{\partial g}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

$f'(x)$ の j 列は、$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\dfrac{\partial g}{\partial y_1}, \dfrac{\partial g}{\partial y_2}, \cdots, \dfrac{\partial g}{\partial y_m} \right) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$= a_{1j}\dfrac{\partial g}{\partial y_1} + \cdots + a_{mj}\dfrac{\partial g}{\partial y_m}$ となる。

次に、$\widetilde{g}(y)=\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\dfrac{\partial g}{\partial y_k}$ ，$\widetilde{f}(x)=\widetilde{g}(\,Ax\,)\in R$ とする。

$(\,Ax\,)'=\begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{kj} & \vdots \\ a_{m1} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ だったので、その i 列 $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ との内積をとればよい

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m} a_{k,j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_k}\ ,\cdots,\ \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_k}\ ,\cdots,\ \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_k}\right)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} a_{1i}a_{kj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m} a_{\ell i}a_{kj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m} a_{mi}a_{kj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_k}$$

$$=\sum_{\ell=1,k=1}^{m} a_{\ell i}a_{k j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_k}\quad\cdots(6.\ 23)$$

ここで、$\sum_{\ell=1,k=1}^{m} a_{\ell i}a_{k j}\dfrac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_k}$ だけを代数的にみると

$$\sum_{\ell=1,k=1}^{m} a_{\ell i}a_{k j}\frac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_k}$$

$$=\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell i}\left(a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_m}\right)$$

$$\begin{aligned}
&=a_{1i}\left(a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_m}\right)\\
&+a_{2i}\left(a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_m}\right)\\
&+a_{3i}\left(a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_m}\right)\\
&\qquad\vdots\\
&+a_{m i}\left(a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_m}\right)
\end{aligned}$$

（ $\dfrac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_k}=\dfrac{\partial}{\partial y_\ell}\times\dfrac{\partial}{\partial y_k}$ としてみると ）

$$= a_{1i}\frac{\partial}{\partial y_1}(a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_m})$$
$$+a_{2i}\frac{\partial}{\partial y_2}(a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_m})$$
$$+a_{3i}\frac{\partial}{\partial y_3}(a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_m})$$
$$\vdots$$
$$+a_{mi}\frac{\partial}{\partial y_m}(a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_m})$$
$$=(a_{1i}\frac{\partial}{\partial y_1}+a_{2i}\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+a_{m\,i}\frac{\partial}{\partial y_m})(a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_1}+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+a_{1j}\frac{\partial}{\partial y_m})$$
$$=(\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,i}\frac{\partial}{\partial y_\ell})(\sum_{k=1}^{m} a_{k\,j}\frac{\partial}{\partial y_k})$$

したがって次の様に書くこともできる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=(\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,i}\frac{\partial}{\partial y_\ell})(\sum_{k=1}^{m} a_{k\,j}\frac{\partial}{\partial y_k})g$$

このような、$(\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,i}\frac{\partial}{\partial y_\ell})$ や $(\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,i}\frac{\partial}{\partial y_\ell})(\sum_{k=1}^{m} a_{k\,j}\frac{\partial}{\partial y_k})$ を微分作用素とよぶ。上手くできている。

次に、(6．24) $H_{f(x)}={}^tAH_{g(y)}A$ という関係が成り立つことを証明する。

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\sum_{\ell=1,k=1}^{m} a_{\ell\,i}a_{k\,j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_k}$ を $(i\,,j)$ 成分とする n 次正方行列が $H_{f(x)}$ であり、$\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_k}$ を $(\ell\,,k)$ 成分とする m 次正方行列が $H_{g(y)}$ なので

${}^tAH_{g(y)}A$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{m\,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m\,j} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

$H_{g(y)}A$ の j 列は

全部で m 行ある $\begin{pmatrix} a_{1j}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_1} + a_{2j}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2} + \cdots + a_{mj}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_m} \\ a_{1j}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1} + a_{2j}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_2} + \cdots + a_{mj}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_m} \\ \vdots \\ a_{1j}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_1} + a_{2j}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_2} + \cdots + a_{mj}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_m} \end{pmatrix}$

${}^tAH_{g(y)}A$ の（i , j）成分は、$H_{g(y)}A$ の j 列と A の i 行との内積になるので

（i , j ）成分は

$$a_{1i}a_{1j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_1} + a_{1i}a_{2j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2} + \cdots + a_{1i}a_{mj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_m} + a_{2i}a_{1j}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1} + a_{2i}a_{2j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_2} + \cdots + a_{2i}a_{mj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_m} + a_{mi}a_{1j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_1}$$

$$+ a_{mi}a_{2j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_2} + \cdots + a_{mi}a_{mj}\frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_m}$$

$= \sum_{\ell=1,k=1}^{m} a_{\ell i}a_{kj}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_k}$ これは、(6. 23)に等しいので、$H_{f(x)} = {}^tAH_{g(y)}A$ となる。

次に、$Tr(AB) = Tr(BA)$ を証明する。（本当は線形代数の本に任せたいが…）

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ （n , n 型）

とおけば

AB の（i , j）成分は、$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ → （i , i）成分は、$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$

BA の（i , j）成分は、$\sum_{\ell=1}^{n} b_{i\ell}a_{\ell j}$ → （i , i）成分は、$\sum_{\ell=1}^{n} b_{i\ell}a_{\ell i} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell i}b_{i\ell}$

$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + a_{i3}b_{3i} + \cdots + a_{in}b_{ni}\right)$

$= + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$

$+ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2}$

$+ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{2,3} + a_{33}b_{33} + \cdots + a_{3n}b_{n3}$

$\vdots$

$+ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \cdots + a_{n\,n}b_{n\,n}$

縦に加えると

$= \sum_{i=1}^{n}(a_{1\,i}b_{i\,1} + a_{2\,i}b_{i\,2} + a_{3\,i}b_{i\,3} + \cdots + a_{n\,i}b_{i\,n})$

$= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell\,i}b_{i\,\ell}) = Tr(BA)$

以上のことから、A が n 次正方行列で正則ならば、$Tr(A^{-1}BA) = Tr(A^{-1}AB) = Tr(B)$

また、直交行列ならば、${}^tA = A^{-1}$ なので、

$Tr(H_{f(x)}) = Tr({}^tAH_{g(y)}A) = Tr(A^{-1}H_{g(y)}A) = Tr(H_{g(y)})$

つまり、 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2}(y)$ （6．25）がいえる。

（P．135　定理6．8）

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} \quad \cdots \quad (6.\ 11)$$

（6．11）の両辺を x_i について微分するわけだが、$\frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}$ 、 $\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}$ それぞれ、実数値関数であり、その積の和なので、$\frac{\partial \phi_r}{\partial x_j}$ は R^n で定義された実数値関数となる。よって、命題（6．7）から

$$\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}) = \sum_{\ell=1}^{m} \{ \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} + \frac{\partial g_r}{\partial y_\ell} \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i \partial x_j} \}$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial g_r}{\partial y_\ell})$ に連鎖律を適用する。

$g_r(y_1,\cdots,y_m)$ は $R^m \to R$ ， $\dfrac{\partial g_r}{\partial y_\ell}(y_1,\cdots,y_m)$ は $R^m \to R$

$\dfrac{\partial g_r}{\partial y_\ell}(y_1,\cdots,y_m) = h(y_1,\cdots,y_m)$ とすれば、$R^n \underset{f}{\to} R^m \underset{h}{\to} R$

$(h(f))' = h'(y)f'(x)$ なので、

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial h}{\partial y_m}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\right) = \frac{\partial h}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g_r}{\partial y_k \partial y_\ell}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

したがって

$$\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g_r}{\partial y_k \partial y_\ell}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} + \frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$$

$$= \sum_{\ell=1,k=1}^{m}\frac{\partial^2 g_r}{\partial y_k \partial y_\ell}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^{m}\frac{\partial g_r}{\partial y_\ell}\frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i \partial x_j}$$

(P. 136　注意 2)

例4では、$y = Ax$ だったので、$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\dfrac{\partial g}{\partial y_k}$ であって、a_{kj} が定数なので(6.28) の第二項が現れなかった。

(P. 136　例5)

$\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 、$f(x,y)$ が微分可能であるとき、$g = f\circ\phi$ としたとき

$$g' = \left(\frac{\partial g}{\partial r} \ ,\ \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = f'(x,y) \times \phi'(r,\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & , & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\cdots \quad (6.\,30)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

次に、f が C^2 級のとき g も C^2 級なので、**連鎖律**を使い、g の二階偏導関数を求めてみる。

$x_{r,r} = y_{r,r} = 0$, $x_{r,\theta} = x_{\theta,r} = -\sin\theta$, $y_{r,\theta} = y_{\theta,r} = \cos\theta$

$x_{\theta,\theta} = -r\cos\theta$, $y_{\theta,\theta} = -r\sin\theta$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right\} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial r} \right\} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r} \right\}$$

$$= x_{r,r}f_x + x_r(f_{x,x}x_r + f_{x,y}y_r) + y_{r,r}f_y + y_r(f_{y,x}x_r + f_{y,y}y_r)$$

$$= x_{r,r}f_x + f_{x,x}x_r^2 + f_{x,y}x_r y_r + y_{r,r}f_y + f_{y,x}x_r y_r + f_{y,y}y_r^2$$

$$= x_{r,r}f_x + f_{x,x}x_r^2 + 2f_{x,y}x_r y_r + y_{r,r}f_y + f_{y,y}y_r^2$$

$$= \cos^2\theta\, f_{x,x} + 2\cos\theta\sin\theta\, f_{x,y} + \sin^2\theta\, f_{y,y}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r}\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right\} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta}\} + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\}$$

$$= x_{r,\theta}f_x + f_{x,x}x_r x_\theta + f_{x,y}x_r y_\theta + y_{r,\theta}f_y + f_{y,x}x_\theta y_r + f_{y,y}y_r y_\theta$$

$$= -sin\,\theta\, f_x - rsin\,\theta\, cos\,\theta\, f_{x,x} + rcos^2\theta\, f_{x,y} + cos\,\theta\, f_y - rsin^2\theta\, f_{y,x}$$

$$+ rsin\,\theta\, cos\,\theta\, f_{y,y}$$

$$= g_{\theta,r}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial f}{\partial x})\} + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial f}{\partial y})\}$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta}\} + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial\theta}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\}$$

$$= x_{\theta,\theta}f_x + f_{x,x}x_\theta^2 + f_{x,y}x_\theta y_\theta + y_{\theta,\theta}f_y + f_{y,x}x_\theta y_\theta + f_{y,y}y_\theta^2$$

$$= -rcos\,\theta\, f_x + r^2 sin^2\theta\, f_{x,x} - 2r^2 sin\,\theta\, cos\,\theta\, f_{x,y} - rsin\,\theta\, f_y + r^2 cos^2\theta\, f_{y,y}$$

(6．30)を f_x，f_y について解くと、$r \neq 0$ として

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r} \;,\; \frac{\partial g}{\partial\theta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;,\; \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} cos\,\theta & -rsin\,\theta \\ sin\,\theta & rcos\,\theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r} \;,\; \frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r}\begin{pmatrix} rcos\,\theta & rsin\,\theta \\ -sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;,\; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \;,\; \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r} \;,\; \frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ \frac{-sin\,\theta}{r} & \frac{cos\,\theta}{r} \end{pmatrix}$$

r，θ を（x，y）の関数と考えると

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial r}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$

同様に、連鎖律を使って、$f_{x,x}$ と $f_{y,y}$ を求めてみる。ここで、$g_{r,\theta}=g_{\theta,r}$ に注意したい。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial \theta}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial r}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right\}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial \theta}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right\}$$

$$=r_{x,x}g_r+r_x\{g_{r,r}r_x+g_{r,\theta}\theta_x\}+\theta_{x,x}g_\theta+\theta_x\{g_{\theta,r}r_x+g_{\theta,\theta}\theta_x\}$$

$$=r_{x,x}g_r+g_{r,r}r_x^2+2g_{r,\theta}\theta_x r_x+\theta_{x,x}g_\theta+g_{\theta,\theta}\theta_x^2$$

逆関数の定理を使ってしまうが、$P.$ 142 の (6.50) から

$$r_x=\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta\ ,\ r_y=\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta\ ,\ \theta_x=\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r}$$

$$,\ \theta_y=\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$$ なので

$$r_{x,x}=-\sin\theta\times\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\sin^2\theta}{r}\ ,\ r_{y,y}=\frac{\partial \theta}{\partial y}\cos\theta=\frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$r_{x,y}=-\frac{\partial \theta}{\partial y}\sin\theta=-\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{r}=r_{y,x}=\frac{\partial \theta}{\partial x}\cos\theta=\frac{-\sin\theta\cos\theta}{r}$$

$$\theta_{x,x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}(-\sin\theta)+\frac{1}{r}(-\cos\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}=\frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

$$\theta_{x,y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}(-\sin\theta) + \frac{1}{r}(-\cos\theta)\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\sin^2\theta}{r^2} - \frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

$$\theta_{y,x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta + \frac{1}{r}(-\sin\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$\theta_{y,y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta + \frac{1}{r}(-\sin\theta)\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} = -\frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r_{x,x}g_r + g_{r,r}r_x^2 + 2g_{r,\theta}\theta_x r_x + \theta_{x,x}g_\theta + g_{\theta,\theta}\theta_x^2$ に代入して

$$= \frac{\sin^2\theta}{r}g_r + \cos^2\theta\, g_{r,r} - \frac{\sin 2\theta}{r}g_{r,\theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r^2}g_{\theta,\theta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$+ \frac{\partial \theta}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\}$$

$$= r_{y,y}g_r + r_y\{g_{r,r}r_y + g_{r,\theta}\theta_y\} + \theta_{y,y}g_\theta + \theta_y\{g_{\theta,r}r_y + g_{\theta,\theta}\theta_y\}$$

$$= r_{y,y}g_r + g_{r,r}r_y^2 + 2g_{r,\theta}r_y\theta_y + \theta_{y,y}g_\theta + g_{\theta,\theta}\theta_y^2$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{r}g_r + \sin^2\theta\, g_{r,r} + \frac{\sin 2\theta}{r}g_{r,\theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r^2}g_{\theta,\theta}$$

よって、ラプラシアン Δ に対し

$$\Delta f = f_{x,x} + f_{y,y}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{r}g_r + \cos^2\theta\, g_{r,r} - \frac{\sin 2\theta}{r}g_{r,\theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r^2}g_{\theta,\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$g_r + \sin^2\theta\, g_{r,r} + \frac{\sin 2\theta}{r}g_{r,\theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r^2}g_{\theta,\theta}$$

$= \frac{1}{r} g_r + g_{r,r} + \frac{1}{r^2} g_{\theta,\theta}$ という関係が得られる。

次に、本文(解析入門)にあるように、**微分作用素**に変換されるという方法で求めてみる。

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = (\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y})(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}) f$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \cos^2\theta f_{x,x} + 2\sin\theta\cos\theta f_{x,y} + \sin^2\theta f_{y,y}$$

この計算はまるで正しいようであるが、違う。なぜなら、r , θ は(x , y)の関数だからである。

偶然前に出てきた式と一致しただけである。本当は、かなり計算が複雑である。

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = (\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y})(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}) f$$

$$= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}) + \cos\theta \frac{\partial}{\partial x}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y})$$

$$= \cos\theta(-\sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) + \cos\theta(\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})$$

$$+ \sin\theta(-\sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})$$

$$+ \sin\theta(\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$$

$$= -\sin\theta\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2\theta \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$-\sin^2\theta \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin\theta\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= -\sin\theta\cos\theta \frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2\theta \frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\sin^2\theta\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$+\sin\theta\cos\theta\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-$$

$$\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=\cos^2\theta f_{x,x}+2\sin\theta\cos\theta f_{x,y}+\sin^2\theta f_{y,y}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\right)-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\right)+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=r\sin\theta\{r_x\sin\theta f_x+r\cos\theta\ \theta_x f_x+r\sin\theta f_{x,x}\}$$

$$-r\sin\theta\{r_x\cos\theta f_y-r\sin\theta\ \theta_x f_y+r\cos\theta f_{x,y}\}$$

$$+r\cos\theta\{-r_y\sin\theta f_x-r\cos\theta\ \theta_y f_x-r\sin\theta f_{x,y}\}$$

$$+r\cos\theta\{r_y\cos\theta f_y-r\sin\theta\ \theta_y f_y+r\cos\theta f_{y,y}\}$$

$$=r\sin^2\theta\, r_x f_x+r^2\sin\theta\cos\theta\ \theta_x f_x+r^2\sin^2\theta f_{x,x}$$

$$-r\sin\theta\cos\theta\, r_x f_y+r^2\sin^2\theta\ \theta_x f_y-r^2\sin\theta\cos\theta f_{x,y}$$

$$-r\sin\theta\cos\theta\, r_y f_x-r^2\cos^2\theta\ \theta_y f_x-r^2\sin\theta\cos\theta f_{x,y}$$

$$+r\cos^2\theta\, r_y f_y-r^2\sin\theta\cos\theta\ \theta_y f_y+r^2\cos^2\theta f_{y,y}$$

$$=r\sin^2\theta\cos\theta f_x-r\sin^2\theta\cos\theta f_x+r^2\sin^2\theta f_{x,x}$$

$$-r\sin\theta\cos^2\theta f_y+r\sin^3\theta f_y-r^2\sin\theta\cos\theta f_{x,y}$$

$-\ rsin^2\theta\cos\theta f_x - rcos^3\theta f_x - r^2 sin\theta\cos\theta f_{x,y}$

$+\ rsin\theta\cos^2\theta f_y - rsin\theta\cos^2\theta f_y + r^2\cos^2\theta f_{y,y}$

$= r^2 sin^2\theta f_{x,x} - rf_y\{\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta\} - 2r^2\sin\theta\cos\theta f_{x,y} - rf_x\{\sin^2\theta\cos\theta$
$+\cos^3\theta\} + r^2\cos^2\theta f_{y,y}$

$= r^2\sin^2\theta f_{x,x} - r\sin\theta f_y - 2r^2\sin\theta\cos\theta f_{x,y} - r\cos\theta f_x + r^2\cos^2\theta f_{y,y}$

また、$f_{x,x}$, $f_{y,y}$ 、こちらの方が簡単で、$f_{y,y}$ だけ計算してみると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})g$$

$$= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r})$$

$$+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta})$$

$$= \sin^2\theta g_{r,r} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r})$$

$$+\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta})$$

$$= \sin^2\theta g_{r,r} + \sin\theta\cos\theta\{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\}$$

$$+\frac{\cos\theta}{r}\{\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\} + \frac{\cos\theta}{r^2}\{-\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\}$$

$$= \sin^2\theta g_{r,r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}g_{\theta,r} + \frac{\cos^2\theta}{r}g_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}g_{r,\theta}$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r^2}g_{\theta,\theta}$$

$$= \sin^2\theta g_{r,r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}g_\theta + \frac{\sin 2\theta}{r}g_{r,\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}g_r + \frac{\cos^2\theta}{r^2}g_{\theta,\theta}$$

（P. 137　例6）

$\phi(x, y) = g(x, y, h(x,y))$,　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \subset R^2$　このとき、ϕ の偏導関数を g , h のそれで表してみる。

$V \overset{f}{\to} U \overset{g}{\to} R$　（$U \subset R^3$）　連鎖律より、$\phi = g\circ f \ \to\ \phi' = g'\circ f'$

なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_x & h_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_x + h_x g_z & g_y + h_y g_z \end{pmatrix}$$

ϕ_x，ϕ_y を（x，y）の関数として、もう一度**連鎖律**を使えば、

$$(\phi_x)' = \begin{pmatrix} \phi_{x,x} & \phi_{x,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_x + h_x g_z) & \frac{\partial}{\partial y}(g_x + h_x g_z) & \frac{\partial}{\partial z}(g_x + h_x g_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_x & h_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_x + h_x g_z) + h_x \frac{\partial}{\partial z}(g_x + h_x g_z) & \frac{\partial}{\partial y}(g_x + h_x g_z) + h_y \frac{\partial}{\partial z}(g_x + h_x g_z) \end{pmatrix}$$

$$\phi_{x,x} = g_{x,x} + h_{x,x} g_z + h_x g_{z,x} + h_x \{ g_{x,z} + h_{x,z} g_z + h_x g_{z,z} \} \quad (\text{注意} \quad h_{x,z} = 0)$$

$$= g_{x,x} + h_{x,x} g_z + 2 h_x g_{x,z} + h_x^2 g_{z,z} \quad (g_{z,x} = g_{x,z})$$

$$\phi_{x,y} = g_{x,y} + h_{x,y} g_z + h_x g_{z,y} + h_y \{ g_{x,z} + h_{x,z} g_z + h_x g_{z,z} \}$$

$$= g_{x,y} + h_{x,y} g_z + h_x g_{z,y} + h_y g_{x,z} + h_x h_y g_{z,z} = \phi_{y,x} \quad (g, h \text{ は} C^2 \text{級として})$$

$$\phi_{y,y} = g_{y,y} + h_{y,y} g_z + 2 h_y g_{y,z} + h_y^2 g_{z,z} \quad (x, y \text{ の対称性})$$

（P．138　命題6．9　有限増分の定理Ｉ）

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_i(t) \\ \vdots \\ \phi_m(t) \end{pmatrix} = f(g(t)) = \begin{pmatrix} f_1(g(t)) \\ \vdots \\ f_i(g(t)) \\ \vdots \\ f_m(g(t)) \end{pmatrix}$$

$$\phi'(t) = f'(g(t)) = \begin{pmatrix} f_1'(g(t)) \\ \vdots \\ f_i'(g(t)) \\ \vdots \\ f_m'(g(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial g_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial g_n} \end{pmatrix} (b-a)$$

$f_i{}'(g(t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial g_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial g_n} \end{pmatrix} (b-a)$

したがって、$\phi_i(t)$ は $t \in [\,0\,,\,1\,]$ で定義された 1 変数の実数値関数である。そこで平均値の定理を適用すれば、$0 < \theta_i < 1$ が存在して

$\phi_i(1) - \phi_i(0) = \phi_i{}'(\theta_i) = f_i(b) - f_i(a) = f_i{}'(g(\theta_i))(b-a)$

となる。$M = \sup_{x \in L} |\, f(x)' \,|$ と置くとき、命題 6.5,2（行列のノルム）により

$|\, f_i(b) - f_i(a) \,| \leqq |\, f_i{}'(g(\theta_i)) \,|\,|\, b-a \,| \leqq M \,|\, b-a \,|$

を得る。

$\sup_{x \in L} |\, f'(x) \,|$ について、L は閉集合であるが、$f'(x)$ は連続とは限らない、しかし、有限確定なので、連続の公理（R17）により存在することがわかる。

（P. 139　注意5）

他書では、$u \neq v \rightarrow f(u) \neq f(v)$ を単射の定義としているものが多い。また、単射の射が写になっているのも著者の好みなのか？

また、第 2 式から f は全写と書いてあるが、任意の $y \in B$ に対し、$(\, f \circ g\,)(y) = y$ なので、$(\, f \circ g\,)(y) = f(g(y)) = y$ となる A の元 $g(y)$ が存在するからである。

（P. 139　定理6. 10　逆関数の定理Ⅰ）

この定理の証明は難しいので、詳しく補足することにした。

U、V を R^n の開集合とし、関数 $f\colon U \rightarrow V$ が 次のⅰ）～ⅲ）をみたすものと仮定する。

ⅰ）f は U 上 C^1 級

ⅱ）任意の $x \in U$ で $\det f'(x) \neq 0$

ⅲ）f が U から V の上への一対一写像（U から V への全単写）

このとき、

1）逆関数 f^{-1} は V 上で微分可能であって、$y = f(x)$（$x \in$U）における f^{-1} の導値 $(\, f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$　　$(\, y = f(x)\,)$

2）f^{-1} は V 上 C^1 級である。

証明1）V の任意の一点 y_0 を一つ取る。仮定ⅲ）より $x_0=f^{-1}(y_0)$ としたとき、仮定ⅱ）と命題6．5．3）によって、ある $\rho>0$ が存在して、任意の $x\in R^n$ に対し

(6.40)　$|f'(x_0)x| \geqq \rho|x|$　　（$\rho=|f'(x_0)^{-1}|^{-1}$）が成り立つ。

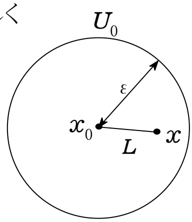
仮定ｉ）より、f' は連続なので、$0<K<\dfrac{\rho}{\sqrt{n}}$ となる正数 K に対して、x_0の十分小さい近傍 $U_0=U(x_0,\varepsilon)$ において $|f'(x)-f'(x_0)| \leqq K$　$(\forall x\in U_0)$が成り立つ。

ここで、$g(x)=f(x)-f'(x_0)x$ とおくと、例1）から、$g'(x)=f'(x)-f'(x_0)$ となり、

$|g'(x)|\leqq K$　$(\forall x\in U_0)$ であるから、有限増分の定理Ⅰを g に適用して、

$|g(x)-g(x_0)| \leqq \sqrt{n}K|x-x_0|$

詳しく



$|f'(x)-f'(x_0)| \leqq K$　$(\forall x\in U_0)$

$g(x)=f(x)-f'(x_0)x$　（C^1 級）

$g'(x)=f'(x)-f'(x_0)$

$|g'(x)|=|f'(x)-f'(x_0)| \leqq K$　$(\forall x\in U_0)$

$L=\{x_0+t(x-x_0)\mid t\in[0,1]\}\subset U_0$

$\sup_{x\in L}|g'(x)| \leqq \sup_{x\in U_0}|g'(x)| \leqq K$ よって、有限増分の定理Ⅰから

$|g(x)-g(x_0)| \leqq \sqrt{n}K|x-x_0|$

$|g(x)-g(x_0)|=|f(x)-f'(x_0)x-(f(x_0)-f'(x_0)x_0)|$

$=|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|=|f(x)-f(x_0)+(-f'(x_0)(x-x_0)|$

ここで、$|a|-|b| \leqq |a+b|$ により

$|f'(x_0)(x-x_0)|-|f(x)-f(x_0)| \leqq |f(x)-f(x_0)+(-f'(x_0)(x-x_0))|$

また、(6.40) から、$\rho|x-x_0| \leqq |f'(x_0)(x-x_0)|$

$\rho|x-x_0|-|f(x)-f(x_0)| \leqq |g(x)-g(x_0)| \leqq \sqrt{n}K|x-x_0|$ となるので、

$|x-x_0|(\rho-\sqrt{n}K) \leqq |f(x)-f(x_0)|$

また、$0<K<\dfrac{\rho}{\sqrt{n}}$ より、$\sqrt{n}K<\rho$ なので

(6.41)　$0 \leqq |x-x_0|(\rho-\sqrt{n}k) \leqq |f(x)-f(x_0)|$ ($\forall x \in U_0$)

ここで　$f(x)=y$ とおけば、

$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)| \leqq \dfrac{|y-y_0|}{\rho-\sqrt{n}K}$ となる。

よって、任意の y_0 に対し、f が全単写なので、$x_0=f^{-1}(y_0)$ から x_0 が決まり、

$\rho=|f'(x_0)^{-1}|^{-1}$, K というように順に定まる。

よって、任意の $\varepsilon'>0$ に対して、$|y-y_0|<\varepsilon'(\rho-\sqrt{n}K)$ とおけば、

$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)| \leqq \dfrac{|y-y_0|}{\rho-\sqrt{n}K} \leqq \dfrac{\varepsilon'(\rho-\sqrt{n}K)}{\rho-\sqrt{n}K} = \varepsilon'$ となる。ゆえに

f^{-1} は y_0 で連続となる。 y_0 は、V の任意の一点であったので、f^{-1} は V 上で連続となる。

次に、f は、x_0 で微分可能なので

(6.42) $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\varepsilon(h)$ (6.43) $\displaystyle\lim_{h\neq 0, h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{|h|}=0$

が成り立つ。

いま、V は開集合だから、$|k|$ が十分小さいとき、$U(y_0,|k|) \subset V$ となり、$f^{-1}(y_0+k)$ が定義される。

f^{-1} は連続なので、$f^{-1}(y_0+k)=x_0+h$ と置くとき、$x_0=f^{-1}(y_0)$ なので

$f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)=h \to |f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)|=|h|<\varepsilon$ となる。(この ε は、$U_0=U(x_0,\varepsilon)$ の ε と同じである。)

このことは、$x=x_0+h \in U_0(x_0, \varepsilon)$ ということである。

f は全単写だから、k と h は一対一に対応し、$k=0 \Leftrightarrow h=0$ 、また、f、f^{-1}は連続なので、(6.44)　$k \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$

$f(x_0+h)=f(x_0+h')=y_0+k \to x_0+h=x_0+h' \to h=h'$ となり

k を定めれば、h は確定する。f^{-1} についても同様である。

$k \to 0 \Rightarrow h \to 0$ は明らかである。

$f^{-1}(y_0+k)=x$ とすれば、$x-x_0=h$ なので $h \to 0$ ならば $f(x)-f(x_0) \to 0$

つまり、$y_0+k-y_0 \to 0$ よって $k \to 0$

仮定ⅱ)より、逆行列 $f'(x_0)^{-1}$ が存在するので、$f'(x_0)^{-1}$を(6. 42)の両辺に左からかければ、(h , k はそれぞれベクトルであることに注意したい。)

$f(x_0+h)-f(x_0)=k$, $f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)=h$ なので

$f'(x_0)^{-1}(f(x_0+h)-f(x_0))=f'(x_0)^{-1}(f'(x_0)h+\varepsilon(h))$

$f'(x_0)^{-1}k=h+f'(x_0)^{-1}\varepsilon(h)$

よって、$h=f'(x_0)^{-1}k-f'(x_0)^{-1}\varepsilon(h)$

そこで、 $\delta(k)=-f'(x_0)^{-1}\varepsilon(h)$ とすれば、

$\boldsymbol{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)=f'(x_0)^{-1}k+\delta(k)}$ となる。

(6.45) $\lim_{k\neq 0, k\to 0}\dfrac{\delta(k)}{|k|}=0$ がいえれば、f^{-1}は y_0 で微分可能で、

$(f^{-1})'(y_0)=f'(x_0)^{-1}$ であることが証明できる。

ここで、$U(x_0,\varepsilon)=U_0$ の任意の $x=x_0+h\in U_0$ に対して、(6.41)より、

$$\frac{|\delta(k)|}{|k|}\leqq\frac{|f'(x_0)^{-1}\|\varepsilon(h)|}{|k|}=\frac{|f'(x_0)^{-1}\|\varepsilon(h)|}{|f(x_0+h)-f(x_0)|}$$

$$=|f'(x_0)^{-1}|\frac{|\varepsilon(h)|}{|h|}\frac{|h|}{|f(x_0+h)-f(x_0)|}$$

$$\leqq|f'(x_0)^{-1}|\frac{|\varepsilon(h)|}{|h|}\frac{|h|}{(\rho-\sqrt{n}K)|h|}=|f'(x_0)^{-1}|\frac{1}{(\rho-\sqrt{n}K)}\frac{|\varepsilon(h)|}{|h|}$$

が成り立つ。

この不等式は(6.43)、(6.44)により、$k\to 0$ のとき、0 に収束し、(6.45) が成り立つことを示す。

証明2) よって、f^{-1}は V で微分可能で、逆行列の作り方から

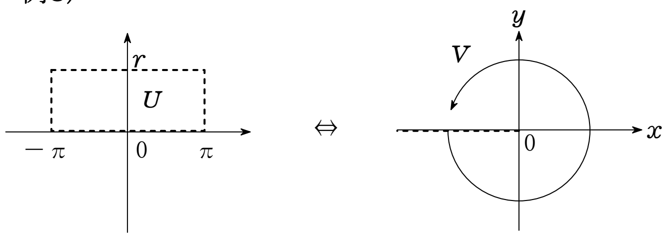
$(f^{-1})'(y)=f'(x)^{-1}$ の (i , j)成分は

(6.46) 行列 $f'(x)$ の $\Delta_{j,i}(x)/\det f'(x)$ ($\Delta_{j,i}$ は余因子)

であり、命題6.3 とⅠ章定理6.8 より、x の連続関数である。ところが、 $f^{-1}: y\to x$ が連続だから、$\Delta_{j,i}(x)=\Delta_{j,i}(f^{-1}(y))$, $\det f'(x)=\det f'(f^{-1}(y))$ と考えれば定理6.7,3 から y の連続関数でもある。これは、f^{-1} が y について C^1級 である

ことを示す。

(P.142　例8)



θ_x, θ_y は (x, y) のなぜ一価関数かといえば、

$$\theta_x = -\frac{1}{r}\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

$$\theta_y = \frac{1}{r}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$ だからである。

(P.143　例9)

$$\phi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ とし、$f(x,y,z)$ を実数値関数とする。

このとき、$g = f\circ\phi(r, \theta, \phi)$ とすれば、連鎖律から、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} & \dfrac{\partial g}{\partial \theta} & \dfrac{\partial g}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

そこで、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ なので、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

よって、次のように書き直すことができる。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial g}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

この右辺の係数行列 A は、列同士の内積をとったとき、違う列同士では 0 に等しく、同じ列では 1 になるので、直交行列である。つまり、$A^{-1} = {}^tA$ となるので、${}^tA$ を左からかけて、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial g}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

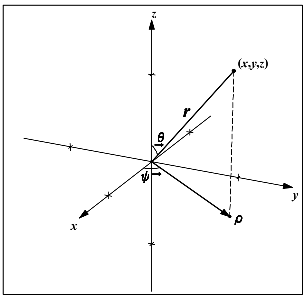
次に、ラプラス作用素 $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ の極座標への変換をする。

連鎖律を使っての変換はかなり面倒なので、次のようにする。

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ なので、$\rho = r\sin\theta$ と置けば、3次元極座標から直交座標への変換を2段階にすることができる。すなわち、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{array}{ccccc} (r,\ \theta,\ \phi) & \rightarrow & (z,\ \rho,\ \phi) & \rightarrow & (x,\ y,\ z) \\ & & \uparrow\quad\uparrow & & \uparrow\quad\uparrow \\ & & (r\cos\theta, r\sin\theta, \phi) & & (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z) \end{array}$$

(z, ρ) 直交座標における (r, θ) を極座標とする。また、(x, y) 直交座標における (ρ, ϕ) を極座標とし、2段階に変換する。すると、例5 (6.33) を使うことができる。



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

この二式を加えると、$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$ の項が消え(ただの文字式と考えればだが)、

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

ここで、$\rho=r\sin\theta$ なので、代入して

$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

また、例5 (6.32) より

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

したがって

$$\Delta f=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

次に

① $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg)=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(g+r\frac{\partial g}{\partial r}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial g}{\partial r}+r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right\}=\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

② $\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\cos\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}+\sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right\}$

$$=\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

よって、①、②を代入すると

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

となる。

しかし、「$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}$ の項が消え」が理解できない。もう少し微分作用素の詳しい説明がほしい。よって、普通にやってみる。少し字が小さくなるが、

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$, $f(x,y,z)$ が微分可能であり、

合成関数 $g(r,\theta,\phi)=f\circ\Phi=f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ としたとき

$$x^2+y^2+z^2=r^2\sin^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\cos^2\theta=r^2 \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\theta=\frac{z}{r} \rightarrow \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow \theta=\cos^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$\frac{y}{x}=\tan\phi \rightarrow \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\cos^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \\ \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

$f=g(r(x,y,z),\theta(x,y,z),\phi(x,y,z))$ と表される合成関数の微分をする。合成関数の連鎖律から

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial\theta} & \frac{\partial g}{\partial\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} & \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\phi} \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\phi} \quad \cdots ②$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\phi} \quad \cdots ③$$

①、②、③ はまた x , y , z の関数なので連鎖律から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)$$

$$= \sin\theta\cos\phi\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\partial r} + \right.$$

$$\left.\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi\partial r}\right)$$

$$+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\left(\cos\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial r} + \sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \theta} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial \theta}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi\partial \theta}\right)$$

$$-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\left(-\sin\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial r} + \sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \phi} - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial \theta}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\partial \phi} - \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}\right)$$

$$= \sin^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\partial r}$$

$$+\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\phi}-\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}\cos^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}-\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\sin^2\phi\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\sin^2\phi}{\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial\phi}+\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$=\sin^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial r}$$

$$+\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\phi}-\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}\cos^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}$$

$$-\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\sin^2\phi\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\sin^2\phi}{\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial\phi}+\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{pmatrix}\quad,\quad\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\phi\\ \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\\ \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$=\sin\theta\sin\phi\Big(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial r}$$

$$-\frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial r}\Big)$$

$$+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\Big(\cos\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\sin\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial\theta}\Big)$$

$$+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\Big(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial\phi}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}\Big)$$

$$=\sin^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial r}$$

$$-\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}\cos^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}-\frac{\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\cos^2\phi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{\cos\theta\cos^2\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$+\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial\phi}-\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}+\frac{\cos^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$= sin^2\theta\, sin^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} sin\theta\, cos\theta\, sin^2\phi \frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{2}{r} sin\theta\, cos\theta\, sin^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial r}$$

$$-\frac{sin\phi\, cos\phi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{sin\phi\, cos\phi}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}cos^2\theta\, sin^2\phi \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}cos^2\theta\, sin^2\phi \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} - \frac{cos^2\theta\, sin\phi\, cos\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi}$$

$$+\frac{cos\theta\, sin\phi\, cos\phi}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi\,\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r}cos^2\phi \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}sin\phi\, cos\phi \frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\phi} + \frac{cos\theta\, cos^2\phi}{r^2 sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$+\frac{cos\theta\, sin\phi\, cos\phi}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial\phi} - \frac{sin\phi\, cos\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{cos^2\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta \\ -\frac{1}{r}sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\phi}\right)$$

$$= cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(cos\theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}sin\theta \frac{\partial g}{\partial\theta}\right)$$

$$-\frac{1}{r}sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(cos\theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}sin\theta \frac{\partial g}{\partial\theta}\right)$$

$$= cos\theta\left(cos\theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}sin\theta \frac{\partial g}{\partial\theta} - \frac{1}{r}sin\theta \frac{\partial^2 g}{\partial\theta\,\partial r}\right)$$

$$-\frac{1}{r}sin\theta\left(-sin\theta \frac{\partial g}{\partial r} + cos\theta \frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r}cos\theta \frac{\partial g}{\partial\theta} - \frac{1}{r}sin\theta \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\right)$$

$$= cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} sin\,\theta\, cos\,\theta\,\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{1}{r} sin\,\theta\, cos\,\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r} sin^2\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} sin\,\theta\, cos\,\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial \theta} + \frac{1}{r^2} sin\,\theta\, cos\,\theta\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

$$= cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} sin\,\theta\, cos\,\theta\,\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{2}{r} sin\,\theta\, cos\,\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r} sin^2\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$= sin^2\theta\, cos^2\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} sin\,\theta\, cos\,\theta\, cos^2\phi\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{2}{r} sin\,\theta\, cos\,\theta\, cos^2\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial r}$$

$$+\frac{sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{sin\,\phi\, cos\,\phi}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r} cos^2\theta\, cos^2\phi\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} cos^2\theta\, cos^2\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{cos^2\theta\, sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}$$

$$-\frac{cos\,\theta\, sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi\,\partial \theta}$$

$$+\frac{1}{r} sin^2\phi\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} sin\,\phi\, cos\,\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial \phi} + \frac{1}{r^2}\frac{cos\,\theta\, sin^2\phi}{sin\,\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{cos\,\theta\, sin\,\phi\, cos\,\phi}{sin\,\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial \phi} + \frac{sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{sin^2\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

$$+ sin^2\theta\, sin^2\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} sin\,\theta\, cos\,\theta\, sin^2\phi\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{2}{r} sin\,\theta\, cos\,\theta\, sin^2\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial r}$$

$$-\frac{sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{sin\,\phi\, cos\,\phi}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi\,\partial r}$$

$$+\frac{1}{r} cos^2\theta\, sin^2\phi\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} cos^2\theta\, sin^2\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - \frac{cos^2\theta\, sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}$$

$$+\frac{cos\,\theta\, sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi\,\partial \theta}$$

$$+\frac{1}{r} cos^2\phi\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} sin\,\phi\, cos\,\phi\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial \phi} + \frac{cos\,\theta\, cos^2\phi}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$+\frac{cos\,\theta\, sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\,\partial \phi} - \frac{sin\,\phi\, cos\,\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{cos^2\phi}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

$$+\cos^2\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

$$=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial g}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\end{aligned}}$$

（注意） $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg)=\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$

以下は各成分の補足

$$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta=\cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}\end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=2x\cdot\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}=x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\frac{r\sin\theta\cos\phi}{r\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta}}=\sin\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=2y\cdot\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}=y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r}=\sin\theta\sin\phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=2z\cdot\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}=z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$

$\theta = cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$, $t = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ とする。

$cos\,\theta = t$

$-sin\,\theta = \dfrac{dt}{d\theta} \rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{sin\,\theta} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ （$sin\,\theta > 0$（$0 < \theta < \pi$）とした）

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}cos^{-1}t$$

$$= \left(\frac{-2x\times\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\times z}{x^2+y^2+z^2}\right)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}}\right)$$

$$= \frac{xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}\times\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} = \frac{rsin\,\theta\,cos\,\phi\,rcos\,\theta}{r^2\sqrt{r^2sin^2\theta\,cos^2\phi+r^2sin^2\theta\,sin^2\phi}}$$

$$= \frac{sin\,\theta\,cos\,\theta\,cos\,\phi}{rsin\,\theta} = \frac{1}{r}cos\,\theta\,cos\,\phi$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}cos^{-1}t$$

$$= \frac{yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}\times\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= -\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} = \frac{rsin\,\theta\,sin\,\phi\,rcos\,\theta}{r^3sin\,\theta} = \frac{1}{r}cos\,\theta\,sin\,\phi$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}cos^{-1}t$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}\times\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{r^2-z^2}{r^2}\times\left(-\frac{1}{rsin\,\theta}\right) = -\frac{r^2(1-cos^2\theta)}{r^3sin\,\theta} = -\frac{1}{r}sin\,\theta$$

$\phi = tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $t = \dfrac{y}{x}$ とする。

$t = tan\,\phi \rightarrow \dfrac{dt}{d\phi} = \left(\dfrac{sin\,\phi}{cos\,\phi}\right)' = \dfrac{cos^2\phi+sin^2\phi}{cos^2\phi} = 1+t^2 \rightarrow \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ なので

$$\frac{\partial\ \phi}{\partial\ x} = \frac{\partial\ t}{\partial\ x}\frac{\partial}{\partial\ t}tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \frac{-y}{x^2}\times\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2}\times\frac{1}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2}\times\frac{x^2}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$= -\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi} = -\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r^2\sin^2\theta} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\ \phi}{\partial\ y} = \frac{\partial\ t}{\partial\ y}\frac{\partial}{\partial\ t}tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\sin\theta\cos\phi}{r^2\sin^2\theta} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\ \phi}{\partial\ z} = \frac{\partial\ t}{\partial\ z}\frac{\partial}{\partial\ t}tan^{-1}\frac{y}{x} = 0\times\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\frac{\partial\ r}{\partial\ y} = \sin\theta\sin\phi$$

$$\frac{\partial\ r}{\partial\ z} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial\ \theta}{\partial\ x} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial\ \theta}{\partial\ y} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi$$

$$\frac{\partial\ \theta}{\partial\ z} = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial\ \phi}{\partial\ x} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\ \phi}{\partial\ y} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\ \phi}{\partial\ z} = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\ r}{\partial\ x} & \dfrac{\partial\ r}{\partial\ y} & \dfrac{\partial\ r}{\partial\ z} \\ \dfrac{\partial\ \theta}{\partial\ x} & \dfrac{\partial\ \theta}{\partial\ y} & \dfrac{\partial\ \theta}{\partial\ z} \\ \dfrac{\partial\ \phi}{\partial\ x} & \dfrac{\partial\ \phi}{\partial\ y} & \dfrac{\partial\ \phi}{\partial\ z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

(P.146　命題7．1)

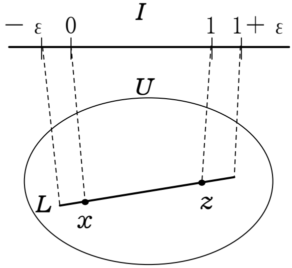
$L : g(t) = x + tz$, $t \in [\ 0\ ,\ 1\ ] = I$

f は R^n の開集合 U 上で定義された

C^k 級の実数値関数とする。

合成関数 $\phi(t) = f\circ g(t)$ は I で定義された

実数値関数である。



$I_\varepsilon=(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$としているのは開集合
にして連鎖律を利用するためである。
具体的に $n=3$ の場合 $m=1$ として、連鎖律により

$$\phi'(t)=f'(x+tz)g'(t)$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}z_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}z_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}z_3 \leftarrow 3\text{項}$$

$$\phi''(t)=\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}z_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}z_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}z_3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}z_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}z_2+$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}z_3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}z_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2}z_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_3}z_3\Big)\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}z_1z_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}z_2z_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}z_3z_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}z_1z_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}z_2z_2+$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}z_3z_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}z_1z_3+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2}z_2z_3+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_3}z_3z_3 \leftarrow 3^2\text{ 項}$$

$1\leqq i_1, i_2\leqq 3 \rightarrow (i_1, i_2)=(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$という意味で

$$=\sum_{1\leqq i_1,i_2\leqq 3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}z_{i_1}z_{i_2}$$

$$\phi^{(m)}(t)=\sum_{1\leqq i_1,i_2,\cdots,i_m\leqq 3}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}z_{i_1}\cdots z_{i_m} \leftarrow 3^m\text{ 項}$$

一般に n の場合は

$$(7.1)\quad \phi^{(m)}(t)=\sum_{1\leqq i_1,i_2,\cdots,i_m\leqq n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}(x+tz)z_{i_1}\cdots z_{i_m} \leftarrow n^m\text{ 項}$$

となる。

(P.147　定理7．2　多変数のテイラーの定理)

多変数のテイラーの定理といっても $\phi(t)=f(x+th)$ なので、一変数 $t\in[0,1$

］に対する実数値関数なので、テイラーの定理が使える。

P. 99 定理2. 10　区間［ a , x ］で n 回微分可能な実数値関数 f に対して、

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$+R_n(x)$ と定義するとき、

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる $c \in (a, x)$ が存在する。

これを $\phi(t)$ に適用する。

$$\phi(1) = \phi(0)+\frac{\phi'(0)}{1!}+\frac{\phi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}+\frac{\phi^{(k)}(\theta)}{k!}$$

となる $\theta \in (0, 1)$ が存在する。

$\phi(1) = f(x+h)$, $\phi(0) = f(x)$

命題7. 1から、$\phi^{(m)}(0) = (d^m f)_x(h)$, $\phi^{(k)}(\theta) = (d^k f)_{x+\theta h}(h)$ であるから

$$f(x+h) = f(x)+\frac{(d^1 f)_x(h)}{1!}+\frac{(d^2 f)_x(h)}{2!}+\cdots+\frac{(d^{k-1} f)_x(h)}{(k-1)!}+\frac{(d^k f)_{x+\theta h}(h)}{k!}$$

となる。

(P.147 微分とは？)

微分とは、一点 x で微分可能な任意の実数値関数 f に対し

$(df)_x(z) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) z_i$ （ $z \in R^n$ ）

によって定義される関数であって、点 x を原点として f を近似しているだけにすぎない。また、内積を使って表現すれば、$(df)_x = f'(x)z$ であり、$f'(x)$ は R^n の特定の座標系に依存するが、$(df)_x(z) = \phi'(0)$ だから<u>座標系の取り方に関係しない</u>。ここのところをもう少し詳しく調べると、$f'(x)$ は自然基底に関する座標系によって表現されていたので他の座標系に基底を取りかえてみる。

標準座標系 $\langle e_1,\cdots,e_n \rangle$ から $\langle \ell_1,\cdots,\ell_n \rangle$ へとかえた場合の微分 $(df)_x(z)$ を求める。

任意の $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し、標準座標系では、$\boldsymbol{z}=z_1\boldsymbol{e}_1+z_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+z_n\boldsymbol{e}_n$ と表せる。

形式的に表現すると次のようになるが、それを基底 $<\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n>$ へとかえた場合

$$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n)\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_2' \end{pmatrix}$$

となる。

次に、$<\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n>$ を標準座標系で表してみると、

$$\boldsymbol{\ell}_1=\ell_{1,1}\boldsymbol{e}_1+\ell_{2,1}\boldsymbol{e}_2+\cdots+\ell_{n,1}\boldsymbol{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\ell}_i=\ell_{1,i}\boldsymbol{e}_1+\ell_{2,i}\boldsymbol{e}_2+\cdots+\ell_{n,i}\boldsymbol{e}_n \quad \to \quad (\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\ell}_n=\ell_{1,n}\boldsymbol{e}_1+\ell_{2,n}\boldsymbol{e}_2+\cdots+\ell_{n,n}\boldsymbol{e}_n$$

$\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}=A$ とすれば、A の i 列は $\boldsymbol{\ell}_i$ と一致する。

次に、数ベクトルはどの様に変換されるだろうか。

$$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n)\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_2' \end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_2' \end{pmatrix}$$

A は正則行列(線型代数学　佐武一郎 著　P.127) なので

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_2' \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}$$ となる。

標準座標系 $<\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n>$ から $<\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n>$ へとかえた場合の微分$(df)_x(\boldsymbol{z})$は、

$A^{-1\,t}(f'(x))$ が $<\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n>$ における数ベクトルになるので

$$(A^{-1\,t}(f'(x)),\boldsymbol{z}')=(A^{-1\,t}(f'(x)),A^{-1}\boldsymbol{z})=({}^t(f'(x)),{}^t(A^{-1})A^{-1}\boldsymbol{z})$$

$<\boldsymbol{\ell}_1,\cdots,\boldsymbol{\ell}_n>$ が正規直交底ならば A は直交行列になるので ${}^t(A^{-1})=A$

$$=({}^t(f'(x)),\boldsymbol{z})=f'(x)\boldsymbol{z}$$

よって、不変であることがわかる。しかし、$<\ell_1,\cdots,\ell_n>$ が正規直交底でない場合は不変とは言えない。これがベクトル解析の限界のようだ。

（別証）

実数値関数を $f(x)$ とし、$x_i = x_i(X)$（$1 \leqq i \leqq n$）とするとき、$f\,'(X)$ は連鎖律によって

$$f\,'(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_n} \\ & \cdots & \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

$$df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_n}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial X_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1}dX_1+\cdots+\dfrac{\partial x_1}{\partial X_n}dX_n \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial X_1}dX_1+\cdots+\dfrac{\partial x_n}{\partial X_n}dX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}dX_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_n}dX_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

(P.148 (7.9))

$(df)_x = f\,'(x)z$ とすると、$(df)_x$ は R^n から R への線型写像である。また

(7.6)　$d(f+g)_x = (df)_x+(dg)_x$

(7.7)　$d(cf)_x = c(df)_x$　（$c \in R$）

(7.8)　$d(fg)_x = g(x)(df)_x+f(x)(dg)_x$

これらは、Ⅱ巻のP. 51からP. 52の関係してくるようだ。（微分形式かな？）

$x_i\,(x) = x_i\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i$　つまり、$x_i'(x) = \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial x_i}{\partial x_n} \right) = (\,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\,)$

であるから

$$(dx_i)_x(z) = x_i' z = (\ 0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\ ) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z_i = x_i(z)$$

そこで、任意の $z \in R^n$ に対し

$$(df)_x(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(dx_i)_x(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(\ 0,\cdots,0,\overset{\overset{i}{\vee}}{1},0,\cdots,0\ )z$$

$$(7.9) \quad (df)_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(dx_i)_x$$

が成り立つ。

ここで、$n = 2$ ならば、$(df)_x = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)(dx_1)_x + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x)(dx_2)_x$

$(df)_x$ を df と略記すれば

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2$$

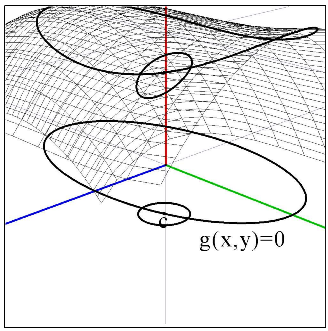
ベクトル値関数 f に対しても、x における微分 $(df)_x$ を (7.5) によって定義すれば

つまり、$(df)_x(z) = f\,'(x)z$ とすれば

$$(df)_x(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ & \cdots & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \rightarrow (df)_x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)(dx_i)_x \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)(dx_i)_x \end{pmatrix}$$

詳細については、II巻に譲る。

（P. 152　例2　ラグランジュの乗数法）



$\Psi : x \rightarrow {}^t(\ x\ ,\ \phi(x)\ )$ とすれば

$g \circ \Psi$ を x で微分して、$(\ g_x\ ,\ g_y\ ) \begin{pmatrix} 1 \\ \phi'(x) \end{pmatrix}$

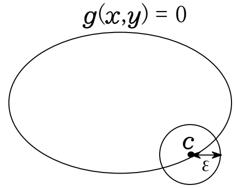
となり、$\phi(x)$ は a のある近傍 V で、

$g_x + g_y \phi'(x) = 0$　（ $x \in V$ ）を得る。

f については、$x = a$ で極値をとるから

c において

同様に、 $f_x + f_y \phi'(a) = 0$



$g_x + g_y \phi'(x) = 0 \rightarrow g_x = - g_y \phi'(x)$

$f_x + f_y \phi'(x) = 0 \rightarrow f_x = - f_y \phi'(x)$

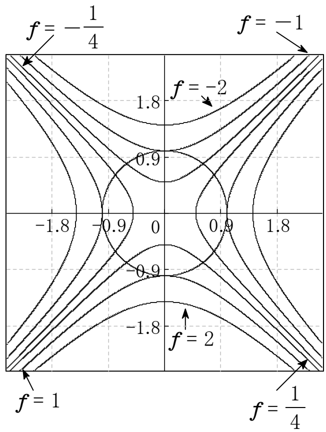
よって $\dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} = \lambda$ とすれば

$\Phi = f - \lambda g$ とおくとき、f の極値点 c において

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -g = 0$

つまり、 x , y , λ の関数とみて、 $\Phi' = 0$ を意味する。

（P. 152 例3）



$\Phi = f - \lambda g = x^2 - y^2 - \lambda (x^2 + y^2 - 1)$

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - 2\lambda x$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y - 2\lambda y$

, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = g$

よって、 $a = \lambda a$, $b = -\lambda b$, $a^2 + b^2 = 1$

をみたす。$c = {}^t(a , b)$ をさがすことになる。

$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ の場合は、$\lambda = 1$ かつ

$\lambda = -1$ となってしまうので、$a = 0$, $a \neq 0$

の場合にわけて考える。

$a = 0$ の場合

$b \neq 0$ であり、$b = \pm 1$, $\lambda = -1$ となる。

$a \neq 0$ の場合

$\lambda = 1$, $b = 0$, $a = \pm 1$ となる。

よって、$\lambda = 1$ のとき $c = (\pm 1 , 0)$ 、$\lambda = -1$ のとき $c = (0 , \pm 1)$ を得る。そこで、f は $f(\pm 1 , 0) = 1 > -1 = f(0 , \pm 1)$ なので、$c = (0 , \pm 1)$ で最小値、$c = (\pm 1 , 0)$ で最大値をとることになる。

次に、$grad\, f$ が f の等高線に直交することを示す。

等高線を曲線 ($x(t)$, $y(t)$) とすると、$f(x(t)$, $y(t))$ = 定数であるから、両辺を t で微分すると連鎖律で

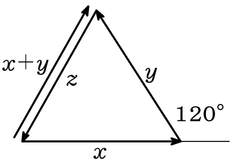
$$(f_x, f_y)\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

${}^t\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ は等高線の接ベクトルであり、$grad\ f$ と直交することになる。

幾何学的には、f の極値を与える点cでは、Sの法線ベクトル $grad\ g(c)$ と等高線 $f = k$ の法線ベクトル $grad\ f(c)$ が平行になることを意味する。

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \lambda \ \rightarrow\ f_x = \lambda g_x, f_y = \lambda g_y \ \rightarrow\ (f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y)$$

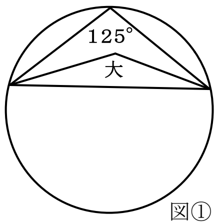
(P. 152　例4)



$grad\ f_a(x) + grad\ f_b(x) + grad\ f_c(x) = 0$ は、何を表しているかであるが、3つのベクトルは正三角形を作ることを示す。

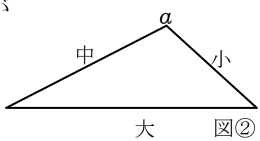
特に、このベクトルは互いに120°の角をなす。

$f'(x) = 0$ となる点 x とは、△abc の各辺を120°に見込む点である。△abc の内角に ≧ 120° となるものがあれば、このような点は存在しない。図①を参照せよ。



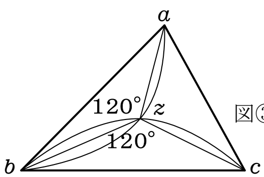
図①

次に、「△abc の内角の中に ≧120° となるものがあれば、その角の頂点が f の最小点である。」についてだが図②を参照せよ。仮に頂点 a の内角が≧120° だとしたら、$f(a)$ は a の対辺以外の二辺の和(小＋中)である。



図②

次に、すべての内角が < 120° の場合には、各辺を120° に見込む点 z は唯一つ存在する。図3を参照せよ。(∠azb = ∠bzc = 120° となるように作図すればよい。)



図③

次に図④⑤をみよ。

$$(m+\frac{\ell}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}\ell}{2})^2 = m^2+\ell^2+\ell m$$

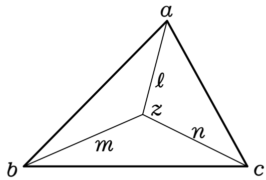
$$\ell^2+m^2+\ell m > \frac{\ell^2}{4}+m^2+\ell m = (\frac{\ell}{2}+m)^2$$

$$|a-b| > \frac{\ell}{2}+m$$

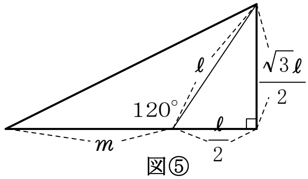
同様にして、$|a-c| > \dfrac{\ell}{2}+n$

$$f(a) = |a-b|+|a-c| > \ell+m+n = f(z)$$

同様に、$f(b) > f(z)$, $f(c) > f(z)$ であることがわかる。



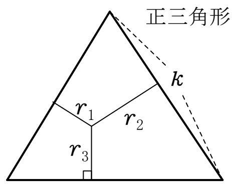
図④



図⑤

よって、a , b , c は f の最小点ではなく、z が極値点で、また、そのことは次のようにしてもわかる。

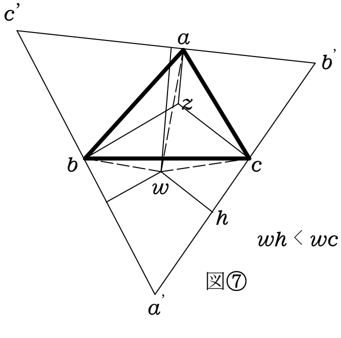
z から各頂点に下ろした線分に垂直な3直線の作る $\triangle a'b'c'$ は正三角形である。図⑥からわかるように、$r_1+r_2+r_3$ は一定である。



図⑥

したがって、垂線の方が斜線より短いから

$f(z) < f(w)$となる。（図⑦参照）



図⑦

$r_1+r_2+r_3$ は一定

$$S = \frac{1}{2}k(r_1+r_2+r_3)$$

よって

$$r_1+r_2+r_3 = \frac{2S}{k} \text{（一定）}$$

（P. 153　定義1　二次形式）

$n = 2$ の場合　　（ $x \in R^2$, $b_{i,j} = b_{j,i}$ ）

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{2} (b_{i,1}x_ix_1+b_{i,2}x_ix_2)$$

$$= b_{1,1}x_1x_1+b_{1,2}x_1x_2+b_{2,1}x_2x_1+b_{2,2}x_2x_2 = b_{1,1}x_1^2+2b_{1,2}x_1x_2+b_{2,2}x_2^2$$

$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ とすれば、${}^tB = B$（対称行列）であって

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 \\ b_{1,2}x_1 + b_{2,2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= b_{1,1}x_1x_1 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{2,1}x_2x_1 + b_{2,2}x_2x_2 = b_{1,1}x_1^2 + 2b_{1,2}x_1x_2 + b_{2,2}x^2 = {}^tx\,B\,x$$

よって、 $Q(x) = {}^tx\,B\,x$ となる。

n の場合　　$(x \in R^n,\ b_{i,j} = b_{j,i},\ B = (b_{ij}))$

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} 2\, b_{i,j}x_ix_j = {}^txBx$$

$$(Bx \mid y) = (y \mid Bx) = {}^t(Bx)\,y = {}^txBy \quad ({}^tB = B)$$

$$= {}^tyBx$$

よって、$Q(x+y) = {}^t(x+y)B(x+y) = {}^t(x)B(x+y) + {}^t(y)B(x+y)$

$$= {}^txBx + {}^txBy + {}^tyBx + {}^tyBy$$

$$= Q(x) + 2(Bx \mid y) + Q(y)$$

$$2(Bx \mid y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

$$Q(cx) = {}^t(cx)B(cx) = c^2({}^txBx) = c^2Q(x) \quad (c \in R)$$

（P. 154　例5）

x が二次形式 Q の停留点 ⇔ $Bx = 0$

$Q'(x) = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial Q}{\partial x_n}\right) = 0$　となる x であるが、

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}\,x_ix_j$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad i \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\
= b_{1,1}x_1x_1 + b_{1,2}x_1x_2 + \cdots + b_{1,i}x_1x_i + \cdots + b_{1,n}x_1x_n \\
+ b_{2,1}x_2x_1 + b_{2,2}x_2x_2 + \cdots + b_{2,i}x_2x_i + \cdots + b_{2,n}x_2x_n \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
+ b_{i,1}x_ix_1 + b_{i,2}x_ix_2 + \cdots + \boldsymbol{b_{i,i}x_ix_i} + \cdots + b_{i,n}x_ix_n \leftarrow i \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
+ b_{n,1}x_nx_1 + b_{n,2}x_nx_2 + \cdots + b_{n,i}x_nx_i + \cdots + b_{n,n}x_nx_n
\end{array}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 2b_{i,i}x_i + b_{1,i}x_1 + \boldsymbol{b_{i,1}x_1} + \cdots + b_{n,i}x_n + \boldsymbol{b_{i,n}x_n}$$

$$= 2b_{i,i}x_i + 2b_{i,1}x_1 + \cdots + 2b_{i,n}x_n = 2\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}x_j \qquad (b_{i,j} = b_{j,i})$$

よって、$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}x_j = 0$ なので

$$Bx = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,j} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行}\ (1 \leqq i \leqq n)$$

よって、$Bx = 0$ となる。 逆については以上の計算から明らかである。また、Q が正則ならば、停留点は $x = 0$ のみである。

（P．154　例6）

$Q(y) < 0 < Q(x)$ となる x , y があれば、$Q(tx) = t^2Q(x)$ なので、 $Q(\frac{x}{(-10)^n}) = \frac{1}{10^{2n}}Q(x) > 0$ とすることができ、$Q(\frac{y}{(-10)^m}) = \frac{1}{10^{2m}}Q(y) < 0$ とすることができるので、$t < 0$ であっても、n , m

を大きくしていけば、0 の近くに Q の正となる点、負となる点が存在することがわかる。したがって、停留点 0 は極値点ではない。

（P．154　正規直交基底）

$(u_i \mid u_i) = 1$ なので、長さは 1 のベクトルであることに注意。

（P．154　定理8．2の補足）（線型代数学 佐武一郎 著　P.166 参照）

なぜ、$F_1 = \{ x \mid (x \mid u_1) = 0 \}$ は閉集合なのか。（注　$u_1 \in S$ なので $|u_1| = 1$ ）

F_1^c が開集合であることを示す。$F_1^c = \{ x \mid (x \mid u_1) \neq 0 \}$ なので、$f(x) = (x \mid u_1)$ とすれば、f は連続関数であり、任意の $x_0 \in F_1^c$ に対し、$f(x_0) = (x_0 \mid u_1) \neq 0$ である。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、$|x - x_0| < \delta$ ならば、$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ とすることができる。ここで、$|f(x_0)| = d$ とすれば、$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon < d$ とすることができる。つまり、

$|f(x_0)|-|f(x)|<|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon<d$

$d-|f(x)|<\varepsilon \rightarrow 0<d-\varepsilon<|f(x)|$　つまり、$f(x)\neq 0$ となるので、

x_0 の δ 近傍 $U(x_0, \delta)\in F_1^c$ となり、開集合であることがわかったことになる。

$Q(u_1)=\lambda_1$ 続けて、Q は $u_2\in S\cap F_1$ で最小値 λ_2 となる。$|u_2|=1$, $(u_1|u_2)=0$ である。

$F_2=\{x\in R^n|(x|u_1)=(x|u_2)=0\}$ もまた閉集合である。なぜなら、

$F_2=F_1\cap\{x|(x|u_2)=0\}$ であり、$\{x|(x|u_2)=0\}$ が上の説明から閉集合だからである。よって、Q は $u_3\in S\cap F_2$ で最小値 λ_3 をとり、u_3 は u_1 , u_2 に直交し、$|u_3|=1$ となる。

以下同様なことを繰り返せば、R^n の正規直交基底 $u_1,\cdots,u_n$ を得る。

（$dim\, F_k=n-k$ は直交補空間の定理から出てくる。）

次に (8.13) について、

$Q(x)={}^t xBx={}^t(Uy)B(Uy)={}^t yU^{-1}BUy={}^t yAy=Q_0(y)$

(8.14) について、

$x=Uy$ 、U は直交変換なので、内積を変えない。つまり、$|y|=1$ ならば $|x|=1$ である。よって、(8.13) から、$|y|=1$ ならば $|x|=1$ であり、λ_1 は S 上の最小値だったので

$Q_0(y)-\lambda_1(y|y)=Q(x)-\lambda_1\geqq 0$ となる。

任意の $y\in R^n$ に対しては、$y=c\ y'$, $(c\in R, |y'|=1)$ とすれば、

$Q_0(y)-\lambda_1(y|y)=Q_0(cy')-\lambda_1(cy'|cy')=c^2\{Q_0(y')-\lambda_1(y'|y')\}\geqq 0$ となる。

$A=(a_{i,j})$ と置くとき、（${}^tA={}^tU{}^tB{}^t(U^{-1})=U^{-1}BU=A \rightarrow A$ は対称行列）

(8.15)　$a_{1,1}=\lambda_1$

(8.16)　$a_{j,1}=a_{1,j}=0$　$(2\leqq j\leqq n)$

実際、$\lambda_1=Q(u_1)=Q(Ue_1)=Q_0(e_1)=(1,\cdots,0)\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=a_{1,1}$

また、$y=(1,\varepsilon,0,\cdots,0)$ とすれば、(8.14) より

$$Q_0(y) - \lambda_1(y \mid y) = (1, \varepsilon, 0, \cdots, 0)\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - a_{1,1}(1+\varepsilon^2)$$

$$= (1, \varepsilon, 0, \cdots, 0)\begin{pmatrix} a_{1,1}+a_{1,2}\varepsilon \\ a_{2,1}+a_{2,2}\varepsilon \\ \vdots \\ a_{n,1}+a_{n,2}\varepsilon \end{pmatrix} - a_{1,1}(1+\varepsilon^2)$$

$$= a_{1,1}+a_{1,2}\varepsilon + \varepsilon(a_{2,1}+a_{2,2}\varepsilon) - a_{1,1}(1+\varepsilon^2) = \varepsilon^2(a_{2,2}-a_{1,1})+2a_{1,2}\varepsilon \geqq 0$$

ここで、任意の $\varepsilon \in R$ に対して、$a\varepsilon^2+b\varepsilon+c \geqq 0$ となるためには、$a \geqq 0$ で $D = b^2 - 4ac \leqq 0$ とならなければならない。

よって、$(a_{2,2} - a_{1,1}) \geqq 0 \rightarrow a_{2,2} \geqq a_{1,1}$ であり、
$D = 4a_{1,2}^2 \leqq 0$ となる必要がある。 $a_{1,2} \in R$ なので、 $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$ となる。

同様にして、$y = (1, 0, \varepsilon, 0, \cdots, 0)$ とすれば、

$$Q_0(y) - \lambda_1(y \mid y) = (1, 0, \varepsilon, \cdots, 0)\begin{pmatrix} a_{1,1}+a_{1,3}\varepsilon \\ a_{2,1}+a_{2,3}\varepsilon \\ a_{3,1}+a_{3,3}\varepsilon \\ \vdots \\ a_{n,1}+a_{n,3}\varepsilon \end{pmatrix} - a_{1,1}(1+\varepsilon^2)$$

$$= a_{1,1}+a_{1,3}\varepsilon + \varepsilon(a_{3,1}+a_{3,3}\varepsilon) - a_{1,1}(1+\varepsilon^2) = \varepsilon^2(a_{3,3}-a_{1,1})+2a_{1,3}\varepsilon \geqq 0$$

よって、$a_{3,3} \geqq a_{1,1}$ であり、 $4a_{1,3}^2 \leqq 0$ から $a_{1,3} = a_{3,1} = 0$ となる。

以下同様にして、ε の位置をずらしていけば、(8.16) を得る。

次に、$U^{-1} = {}^tU$ も直交変換なので内積を変えない、よって

$(x \mid u_1) = (x \mid Ue_1) = (U^{-1}x \mid e_1) = (y \mid e_1) = y_1$ だから $x \in F_1 \Leftrightarrow y_1 = 0$ である。

(8.17) $\quad Q_0(y) - \lambda_2(y \mid y) \geqq 0 \qquad (Uy = x \in F_1)$

なぜなら、(8.14) のときと同様に、$|y| = 1$ ならば $|x| = 1$ であり、λ_2 は $S \cap F_1$ における最小値であるので、$Q_0(y) - \lambda_2(y \mid y) = Q(x) - \lambda_2 \geqq 0$ となる。また、$y_1 = 0$ である任意の y に対し、$x \in F_1$ なので、$y = cy'$ $(c \in R, |y'| = 1)$ と

すれば、(8.14) のときと同様に (8.17) を得る。

また、$\lambda_2 = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{e}_2) = (0,1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} = a_{2,2}$ である。

(8.17) より、$\boldsymbol{y} = (0,1,\varepsilon,0,\cdots,0)$ とすれば、

$$\boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{y}) - \lambda_2(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}) = (0,1,\varepsilon,\cdots,0)\begin{pmatrix} a_{1,2}+a_{1,3}\varepsilon \\ a_{2,2}+a_{2,3}\varepsilon \\ a_{3,2}+a_{3,3}\varepsilon \\ \vdots \\ a_{n,2}+a_{n,3}\varepsilon \end{pmatrix} - a_{2,2}(1+\varepsilon^2)$$

$$= a_{2,2}+a_{2,3}\varepsilon+\varepsilon(a_{3,2}+a_{3,3}\varepsilon)-a_{2,2}(1+\varepsilon^2) = \varepsilon^2(a_{3,3}-a_{2,2})+2a_{2,3}\varepsilon \geqq 0$$

またもや $a_{3,3} \geqq a_{2,2}$ ， $a_{2,3} = a_{3,2} = 0$ を得る。

ε の位置をずらせば、$a_{2,j} = a_{j,2} = 0$（$3 \leqq j \leqq n$）となる。

次に、$x \in F_2$ ならば、$(x \mid u_1) = (x \mid u_2) = 0$ なので、 $x \in F_2 \Leftrightarrow y_1 = 0$ かつ $y_2 = 0$ ということになる。

$\lambda_3 = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{e}_3) = a_{3,3}$ となり、$\boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{y}) - \lambda_3(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}) \geqq 0$ （$\boldsymbol{U}\boldsymbol{y} = x \in F_2$）

$\boldsymbol{y} = (0,0,1,\varepsilon,0,\cdots,0)$ として、 $a_{3,j} = a_{j,3} = 0$（$4 \leqq j \leqq n$）

以下同様にして、$\boldsymbol{a}_{i,i} = \lambda_i$ ， $\boldsymbol{a}_{i,j} = \boldsymbol{a}_{j,i} = 0$ （$i \neq j$） したがって、

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}_0(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k^2$$ となる。

$det(tI - B) = det\{U^{-1}(tI - B)U\} = det\{U^{-1}tIU) - (U^{-1}BU)\}$
$= det\{(tU^{-1}U) - (U^{-1}BU)\} = det(tI - A) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)$ となる。

また、$det(cB) = c^n\, det\, B$（$c \in R$）から、$c = -1$, $t = 0$ の場合
$(-1)^n\, det\, B = (-1)^n\, \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ を得る。

また、任意の $x \in F_k$ に対し、$(x \mid u_1) = (x \mid u_2) = \cdots = (x \mid u_k) = 0$ なので当然、$(x \mid u_1) = (x \mid u_2) = \cdots = (x \mid u_{k-1}) = 0$ である。よって、$x \in F_{k-1}$ つ

まり、$F_k \subset F_{k-1}$ ということになる。各 λ_i は $S \cap F_{i-1}$ での最小値だったので
$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$ となる。

最後に u_k が λ_k の固有ベクトルになっていることを示す。

$$(Bu_k \mid u_\ell) = (BUe_k \mid Ue_\ell) = {}^t e_k {}^t U {}^t B\, Ue_\ell = {}^t({}^t UBUe_k)e_\ell = {}^t(U^{-1}BUe_k)e_\ell$$
$$= (U^{-1}BUe_k \mid e_\ell) = (Ae_k \mid e_\ell)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} e_k \mid e_\ell \right) = \lambda_k \delta_{k,\ell}$$

がすべての k,ℓ に対して成り立つ。このことから、

任意の $x \in R^n$ に対し、$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ と置くと
$$(Bu_k - \lambda_k u_k \mid \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n)$$
$$= (Bu_k \mid \alpha_1 u_1) - (\lambda_k u_k \mid \alpha_1 u_1) + (Bu_k \mid \alpha_2 u_2) - (\lambda_k u_k \mid \alpha_2 u_2)$$
$$+ \cdots + (Bu_k \mid \alpha_n u_n) - (\lambda_k u_k \mid \alpha_n u_n)$$
$$= (Bu_k \mid \alpha_k u_k) - (\lambda_k u_k \mid \alpha_k u_k)$$
$$= \alpha_k \lambda_k - \alpha_k \lambda_k = 0$$
つまり、任意の $x \in R^n$ に対し $(Bu_k - \lambda_k u_k \mid x) = 0$ なので、$Bu_k = \lambda_k u_k$
を得る。

(P．157　定理8．3の補足)

線型代数学の本では、主行列式 D_k を次のようにしている。

$$\begin{vmatrix} b_{i_1,i_1} & b_{i_1,i_2} & \cdots & b_{i_1,i_k} \\ b_{i_2,i_1} & b_{i_2,i_2} & \cdots & b_{i_2,i_k} \\ & & \cdots & \\ b_{i_k,i_1} & b_{i_k,i_2} & \cdots & b_{i_k,i_k} \end{vmatrix} \quad (1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n)$$

この本では、$D_k = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,k} \\ & & \cdots & \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{k,k} \end{vmatrix}$ ($1 \leqq k \leqq n$) としている。

また、$(c) \Rightarrow (e)$ で、Q の定義域を限定するとは

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ & & \cdots & \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,k}x_k \\ b_{2,1}x_1 + \cdots + b_{2,k}x_k \\ \vdots \\ b_{n,1}x_1 + \cdots + b_{n,k}x_k \end{pmatrix}$$

$$= x_1(b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,k}x_k) + \cdots + x_k(b_{n,1}x_1 + \cdots + b_{n,k}x_k)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,k} \\ & & \cdots & \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$x_1, \cdots, x_k$ の正値二次形式と考えるわけである。

固有値は変わってしまう可能性はあるが (d) からすべて正なので $D_k > 0$ となる。

$(e) \to (c)$　n に関する帰納法であるが、

(8.18)　$b_{1,1}Q(x) = (\, b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,n}x_n\,)^2 + (\, x_2, \cdots, x_n$ の二次形式 $)$

なぜなら、$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}\, x_i x_j$

$$= b_{1,1}x_1x_1 + b_{1,2}x_1x_2 + \cdots + b_{1,k}x_1x_k + \cdots + b_{1,n}x_1x_n$$
$$+ b_{2,1}x_2x_1 + b_{2,2}x_2x_2 + \cdots + b_{2,k}x_2x_k + \cdots + b_{2,n}x_2x_n$$
$$\vdots$$
$$+ b_{n,1}x_nx_1 + b_{n,2}x_nx_2 + \cdots + b_{n,k}x_nx_k + \cdots + b_{n,n}x_nx_n$$

$$= b_{1,1}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{i,i}x_i^2 + 2\,(\, \sum_{i=2}^{n} b_{1,i}x_1x_i + \sum_{2 \leqq i < j \leqq n} b_{i,j}x_ix_j \,)$$

したがって

$$b_{1,1}Q(x) \;=\; b_{1,1}\{\, b_{1,1}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{i,i}x_i^2 + 2\,(\, \sum_{i=2}^{n} b_{1,i}x_1x_i + \sum_{2 \leqq i < j \leqq n} b_{i,j}x_ix_j \,)\,\}$$

$$= \; b_{1,1}^2x_1^2 + b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{i,i}x_i^2 + 2b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{1,i}x_1x_i + 2b_{1,1}\sum_{2 \leqq i < j \leqq n} b_{i,j}x_ix_j$$

ここで

$$(\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2 = (b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \cdots + b_{1,n}x_n)^2$$

$$= b_{1,1}^2 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{1,i}^2 x_i^2 + 2b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{1,i}x_1x_i + 2\sum_{2\leqq i<j\leqq n} b_{1,i}b_{1,j}x_ix_j$$

よって、

$$b_{1,1}Q(x) = (\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2 + b_{1,1}Q(x) - (\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2 + \boldsymbol{b_{1,1}^2 x_1^2} + b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{i,i}x_i^2 + 2\boldsymbol{b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{1,i}x_1x_i} + 2b_{1,1}\sum_{2\leqq i<j\leqq n} b_{i,j}x_ix_j - \boldsymbol{b_{1,1}^2 x_1^2}$$

$$-\sum_{i=2}^{n} b_{1,i}^2 x_i^2 - 2\boldsymbol{b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{1,i}x_1x_i} - 2\sum_{2\leqq i<j\leqq n} b_{1,i}b_{1,j}x_ix_j$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2 + b_{1,1}\sum_{i=2}^{n} b_{i,i}x_i^2 + 2b_{1,1}\sum_{2\leqq i<j\leqq n} b_{i,j}x_ix_j - \sum_{i=2}^{n} b_{1,i}^2 x_i^2 - 2\sum_{2\leqq i<j\leqq n} b_{1,i}b_{1,j}x_ix_j$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2 + \sum_{i=2}^{n} (b_{1,1}b_{i,i} - b_{1,i}^2)x_i^2 + 2\sum_{2\leqq i<j\leqq n} (b_{1,1}b_{i,j} - b_{1,i}b_{1,j})x_ix_j$$

$$= (b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,n}x_n)^2 + (x_2,\cdots,x_n \text{ の二次形式})$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} b_{1,i}x_i)^2 + (x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots \\ \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{注 } a_{i,j} = b_{1,1}b_{i,j} - b_{1,i}b_{1,j})$$

$$D_k = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & \cdots & \cdots & b_{2,k} \\ \\ b_{k,1} & \cdots & \cdots & b_{k,k} \end{vmatrix} \text{ とすれば、} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,k} \\ b_{1,1}b_{2,1} & \cdots & \cdots & b_{1,1}b_{2,k} \\ \\ b_{1,1}b_{k,1} & \cdots & \cdots & b_{1,1}b_{k,k} \end{vmatrix} = b_{1,1}^{k-1}D_k$$

第1行 $(b_{1,1}, \cdots, b_{1,k})$ を $b_{1,i}$ 倍した $(b_{1,1}b_{1,i}, \cdots, b_{1,k}b_{1,i})$ を i 行から引いても行列式の値は変わらない（線形代数の本を参照せよ）ので、$b_{i,1} = b_{1,i}$ から

$$b_{1,1}^{k-1}D_k = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,k} \\ b_{1,1}b_{2,1} & \cdots & \cdots & b_{1,1}b_{2,k} \\ \\ b_{1,1}b_{k,1} & \cdots & \cdots & b_{1,1}b_{k,k} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,k} \\ b_{1,1}b_{2,1} - b_{1,1}b_{1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,1}b_{2,k} - b_{1,k}b_{1,2} \\ \\ b_{1,1}b_{k,1} - b_{1,1}b_{1,k} & \cdots & \cdots & b_{1,1}b_{k,k} - b_{1,k}b_{1,k} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ & & & \\ 0 & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} = b_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ & \cdots & \\ a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$ ← k に注目

仮定 $D_k > 0$ ($0 \leqq k \leqq n$) により、$x_2 , \cdots , x_n$ の二次形式 Q_1 もやはりすべての主行列式 > 0 つまり、(e) をみたす。

そこで、帰納法の仮定より Q_1 は正値であるから (8.18) と $b_{1,1} > 0$ により、Q も正値になる。

(P. 157 定理8. 3系)

$-Q$ は正値なので $-{}^t xBx = {}^t x(-B)x$ 、$Bx = \lambda x \to -Bx = -\lambda x$ となり、λ が B の固有値ならば $-\lambda$ は $-B$ の固有値となる。

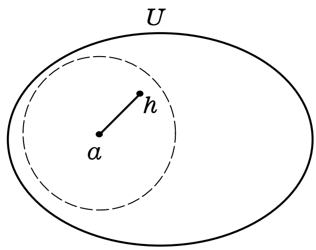
B の固有値がすべて < 0 ならば、$D_n = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ なので、

$(-1)^n \times D_n = (-\lambda_1) \times (-\lambda_2) \times \cdots \times (-\lambda_n) > 0$ 二次形式 Q の定義域を k 次元部分空間に限定すれば、$(-1)^k \times D_k > 0$ を得る。

(P. 158 例7)

$$Q(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(P. 158 定理8. 4の補足)



この定理は、ある一点 a で $f'(a) = 0$ に注意したい。定理7. 3から

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}(d^2 f)_{a+\theta h}(h)$$

となる実数 θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(d^2 f)_{a+\theta h}(h)$$

$$(df)_{a+\theta h}(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\theta h), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+\theta h) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\theta h)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+\theta h)h_n$$

$$(d^2f)_{a+\theta h}(h) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a+\theta h)h_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a+\theta h)h_n , \cdots ,\right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a+\theta h)h_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a+\theta h)h_n \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} h_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} h_n h_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} h_1 h_n + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} h_n^2$$

$$= (h_1 , \cdots , h_n) \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

注意、f は C^2 級

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$h_i h_j = h_j h_i$$

つまり、$(d^2f)_{a+\theta h}(h)$ は $h_1 , \cdots , h_n$ の二次形式となる。

3) $(d^2f)_a$ が不定符号のとき、

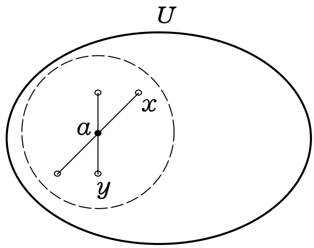
(8.21) $(d^2f)_a(x) > 0 > (d^2f)_a(y)$

となる $x , y \in R^n$ が存在する。x , y をその実数倍 cx , cy で置き換えても

${}^t(cx)B(cx) = c^2({}^t xBx)$ なので、(8.21) は成り立つ。したがって、十分小さい値 c

を選べば、$|x| < \varepsilon$,$|y| < \varepsilon$ と仮定してもよいことになる。

このとき実変数（$-1 < t < 1$）の二つの関数



$g(t) = f(a+tx)$, $h(t) = f(a+ty)$

を考えると、$a+tx$, $a+ty \in U$ であり

g , h は共に C^2 級で命題7．1により

$g^{(1)}(0) = (df)_a(x)$, $h^{(1)}(0) = (df)_a(y)$

$g^{(2)}(0) = (d^2f)_a(x)$, $h^{(2)}(0) = (d^2f)_a(y)$

仮定から、$(df)_a = 0$ だから、$g'(0) = h'(0) = 0$

$g''(0) = (d^2f)_a(x) > 0 > (d^2f)_a(y) = h''(0)$ したがって、一変数 t の関数として

定理2．6（P.97）から、$t = 0$ は、g からみると狭義極小点で、h から見ると狭義極大点ということになる。すなわち、a は f の峠点であり、a で極大とも極小ともならない。

（P. 160　例8）

$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2 - y^2)(-2xe^{-(x^2+y^2)})$

$= 2x(1 - x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2 - y^2)(-2ye^{-(x^2+y^2)})$

$= 2y(-1 - x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

したがって、$f_x = f_y = 0$ となる点は、

$x(1 - x^2 + y^2) = 0$　　… ①

$y(-1 - x^2 + y^2) = 0$　… ②

を連立させればよい。

$x = 0$　→　②から　$y = \pm 1$　または　$y = 0$　$(0, 0)(0, 1)(0, -1)$

$y = 0$　→　①から　$x = \pm 1$　または　$x = 0$　$(1, 0)(-1, 0)(0, 0)$

よって、（ｉ）$(0, 0)$，（ⅱ）$(\pm 1, 0)$，（ⅲ）$(0, \pm 1)$　5点で $f'(x, y) = 0$ となる。

（ｉ）は峠点である。

（ⅱ）$f_x(x, y) = 2x(1 - x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = (2x - 2x^3 + 2xy^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$f_{x,x}(x, y) = (2 - 6x^2 + 2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} + (2x - 2x^3 + 2xy^2)(-2xe^{-(x^2+y^2)})$

$= \{2 - 6x^2 + 2y^2 - 2x(2x - 2x^3 + 2xy^2)\}\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= (2 - 6x^2 + 2y^2 - 4x^2 + 4x^4 - 4x^2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= (2 - 10x^2 + 2y^2 + 4x^4 - 4x^2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{1 - 2x^2 + y^2(1 - 2x^2) - x^2 + 2x^4 - 2x^2\}\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{(1 - 2x^2) + y^2(1 - 2x^2) - x^2(1 - 2x^2) - 2x^2\}\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{(1 - 2x^2)(1 - x^2 + y^2) - 2x^2\}\, e^{-(x^2+y^2)}$

$f_{x,y}(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)} + (2x - 2x^3 + 2xy^2)(-2ye^{-(x^2+y^2)})$

$= \{4xy - 2y(2x - 2x^3 + 2xy^2)\}\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= (4x^3y - 4xy^3)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$= 4xy(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} = f_{y,x}(x, y)$

$f_y(x, y) = 2y(-1-x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (-2y-2x^2y+2y^3)e^{-(x^2+y^2)}$

$f_{y,y}(x, y) = \{-2-2x^2+6y^2+(-2y-2x^2y+2y^3)(-2y)\}e^{-(x^2+y^2)}$

$= \{-2-2x^2+6y^2+4y^2+4x^2y^2-4y^4\}e^{-(x^2+y^2)}$

$= \{-2-2x^2+10y^2+4x^2y^2-4y^4\}e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{-1-x^2+5y^2+2x^2y^2-2y^4\}e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{-1-x^2+2y^2+2x^2y^2-2y^4+y^2+2y^2\}e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{-(1-2y^2)-x^2(1-2y^2)+y^2(1-2y^2)+2y^2\}e^{-(x^2+y^2)}$

$= 2\{2y^2+(1-2y^2)(-1-x^2+y^2)\}e^{-(x^2+y^2)}$

したがって

$$\begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} \\ f_{y,x} & f_{y,y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2\{(1-2x^2)(1-x^2+y^2)-2x^2\}}{e^{(x^2+y^2)}} & \dfrac{2\{2xy(x^2-y^2)\}}{e^{(x^2+y^2)}} \\ \dfrac{2\{2xy(x^2-y^2)\}}{e^{(x^2+y^2)}} & \dfrac{2\{2y^2+(1-2y^2)(-1-x^2+y^2)\}}{e^{(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

$D_1(\pm 1, 0) = 2e^{-1}\cdot(1-2)(1-1)-2 = -\dfrac{4}{e} < 0 \rightarrow (-1)^1 D_1(\pm 1, 0) > 0$

$D_2(\pm 1, 0) = (2e^{-1})^2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{16}{e^2} > 0 \rightarrow (-1)^2 D_2(\pm 1, 0) > 0$

よって、$(\pm 1, 0)$ で f は極大となる。

(iii) $D_1(0, \pm 1) = \dfrac{2}{e}\cdot 1\cdot(1+1) = \dfrac{4}{e} > 0$

$D_2(0, \pm 1) = \dfrac{4}{e^2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{16}{e^2} > 0$

よって、$(0, \pm 1)$ で f は極小となる。

(P. 160　例9)

$f(x, y, z) = x^2-y^2-x^3+z^4$

$f'(x, y, z) = (2x-3x^2, -2y, 4z^3)$ ， $f'(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$

$$f''(x,y,z)=\begin{pmatrix}2-6x & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 12z^2\end{pmatrix}$$

$$D_3(0,0,0)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

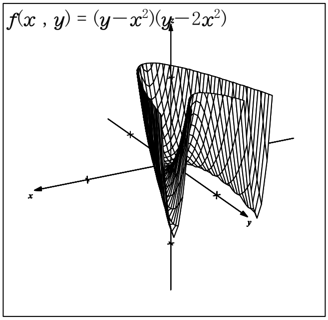
$$(d^2f)_0(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=(x,y,z)\begin{pmatrix}2x\\ -2y\\ 0\end{pmatrix}$$

$=2x^2-2y^2$

$(d^2f)_0(1,0,0)=2>0>-2=(d^2f)_0(0,1,0)$　つまり、不定符号である。

したがって、原点は f の極値ではない。

(P. 161　例10)



定理8．4では $D_n(a)=0$ の場合に不備がある。そのために、この例がある。つまり、極値点であるか確定できないのである。

$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$

$=y^2-3x^2y+2x^4$

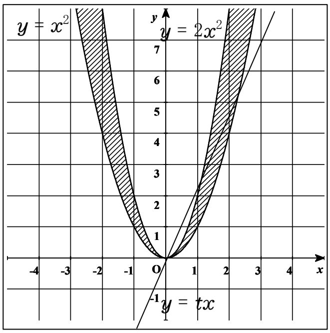
に対し原点は極値ではない。なぜなら、

$f'(x,y)=(-6xy+8x^3,\ 2y-3x^2)$

したがって、$f'(0,0)=(0,0)$　であるが

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}-6y+24x^2 & -6x\\ -6x & 2\end{pmatrix}$$

$D_2(0,0)=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0$　,　$D_1(0,0)=0$



図①からもわかるように、下図の斜線部の内部で $y-x^2>0$, $y-2x^2<0$ よって、$f<0$ であり、 他の外分では $f<0$ となる。だから、原点のどんな近くにも $f<0$ となる点も $f>0$となる点もあるということになる。つまり、R^2 において極小点にならないことになる。ところが、直線 $y=tx$ の上では

$f(x,y)=(tx-x^2)(tx-2x^2)=x^2(t-x)(t-2x)$

は原点の近傍では常に >0 となることが面白い。
参考までに、（微分積分学　笠原 著）には、**弱い意味での正定符号**という記述があった。