

第 I 章は疑い始めれば疑いきれないほどの疑問が生じてくる。特に (R1)–(R17) で実数を特徴づけているが、それが必要かつ十分であるかは残念ながら私にはわからない。しかし、他の書に比べ、この章の構成が私にとって非常にわかりやすいものになっていることは間違いない。

### (P. 1 交換律から結合律は導けない例)

$x \odot y = \frac{x+y}{2}$  とすれば、 $\odot$  は交換律をみたすが結合律はみたさない。

$$a = 1, b = 2, c = 3 \text{ として計算すると, } (a \odot b) \odot c = \frac{9}{4} \neq a \odot (b \odot c) = \frac{7}{4}$$

### (P. 2 (R10) がなぜ必要か)

$\{0\} = \mathbf{R}$  ではないことを示すため。

特に、(R8) の元 1 を 0 に置き換えても、 $00 = 0$  であり、(R9) については、0 以外の任意の  $a$  はないので問題ない。 $\{0\}$  も (R9) まで満たすことになる。

### (P. 2 問1)

$$(i) \quad 0 + 0 = 0 = 0 + 0' = 0'$$

(ii)  $b$  がそのような数であったなら、

$$a + (-a) + b = (a + (-a)) + b = b = a + b + (-a) = -a$$

$$(iii) \quad a + (-a) - (-a) = a + 0 = a = 0 - (-a) = -(-a)$$

$$(iv) \quad 0a = (1 - 1)a = a - a = 0$$

$$(v) \quad (-1)a + a = \{(-1) + 1\}a = 0a = 0 \rightarrow (-1)a = -a$$

$$(vi) \quad (-1)(-1) - 1 = (-1)(-1) + (-1) = (-1)\{(-1) + 1\} = 0$$

$$(vii) \quad a(-b) = a(-1)b = (-1)ab = -ab = (-a)b$$

$$(viii) \quad (-a)(-b) = (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab = ab$$

$$(ix) \quad ab = 0, b \neq 0 \rightarrow a = (ab)b^{-1} = 0b^{-1} = 0$$

$$ab = 0, a \neq 0 \rightarrow b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$$

$$(x) \quad (-a)(-(a^{-1})) = (-1)a(-1)(a^{-1}) = aa^{-1} = 1 \rightarrow -(a^{-1}) = (-a)^{-1}$$

$$(xi) \quad (ab)(b^{-1}a^{-1}) = abb^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = 1 \rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

**(P. 3(1. 4))**

(1, 3)より、 $1^2 = 1 \geq 0$  であるから、 $1 > 0$  であるか  $1 = 0$  、ところが(R10)があるので、 $1 > 0$  となる。したがって、(R15)より、 $0 + 1 < 1 + 1 \rightarrow 1 < 2$  となる。

**(P. 3問2)**

(i) (R15)より、 $a \leq b \Rightarrow a - a \leq b - a \Rightarrow 0 \leq b - a$  また、 $0 \leq b - a \Rightarrow a \leq b - a + a \Rightarrow a \leq b$

(ii)  $a \leq b \Rightarrow$  (i)より、 $0 \leq b - a \Rightarrow 0 - b \leq b - a - b \Rightarrow -b \leq -a$

(iii)  $a \leq b, c \leq 0 \Rightarrow$  (R16)より、 $-c \geq 0$  なので、 $-ac \leq -bc$  (ii)より、 $ac \geq bc$

(iv)  $a > 0 \Rightarrow aa^{-1} = 1 > 0$ 、ここで  $a^{-1} < 0$  ならば (iii)から  $aa^{-1} < 0$  となり矛盾する。また、 $a^{-1} = 0$  ならば  $aa^{-1} = 0$  となり矛盾する。よって、 $a^{-1} > 0$

(v)  $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + c, b + c \leq b + d$  (R13)より、 $a + c \leq b + d$  ( $a = b, c = d$  のとき  $a + c = b + d$ )

(vi)  $a \leq b, c < d \Rightarrow$  (V)より、 $a + c < a + d, a + d \leq b + d$  (R13)より  $a + c < a + d \leq b + d \Rightarrow a + c < b + d$

**(P. 3 命題1. 1)**

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow a < \frac{a + b}{2}, a + b < b + b \Rightarrow \frac{a + b}{2} < b$$

よって、 $a < \frac{a + b}{2} < b$  となる。

**(P. 4 命題1. 2 に追加)**

$$5) ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

(証明)  $|a| - |b| \leq |a + b|$

$$|a| - |-b| \leq |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様にして、}|b| - |a| \leq |a - b| \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②より、絶対値の定義(1. 7)から

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

### (P. 5 例3 有理関数体の順序)

実数を係数とする文字  $t$  の有理式とは、例えば、 $\frac{4t^2}{2t^2+3t-2}$  のような式で、その全体を  $R(t)$  とする。

(R1) ~ (R10) は明らかである。特に、自然数  $n \in \mathbf{N}$  について、 $nt^0$  と考えれば、 $n \in R(t)$  であり、したがって、 $0, 1 \in R(t)$  となり、加法、乗法、それぞれの単位元となる。順序については、字引式順序といい、まず、多項式

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \quad a_n \neq 0$$

に対して、 $a_n > 0$  のとき、 $f > 0$  と定義し、有理式  $\frac{g}{f}$  に対しては、 $fg \geq 0$  のとき  $\frac{g}{f} \geq 0$  とする。そして、二つの有理式  $f, g$  に対し、 $g - f \geq 0$  のとき、 $g \geq f$  と定義する。 $g - f = 0$  のときは、 $g = f$  のときのみである。

私なりの解釈では、ここでは、 $t$  を実数とする。単なる文字とする場合は、他書(例えば、数学の基礎 P. 65 齋藤正彦 著 東大出版)を参照してほしい。

多項式の場合、 $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$  とした場合、 $b_m > 0$  であれば、 $b_0 \sim b_{m-1}$  がすべて負であっても、 $t$  を十分大きくとれば  $g(t) > 0$  とすることができるということである。

有理式の場合

$$f = \frac{b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m}{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n}, \quad g = \frac{d_0 + d_1 t + \cdots + d_k t^k}{c_0 + c_1 t + \cdots + c_\ell t^\ell}, \quad h = \frac{q_0 + q_1 t + \cdots + q_r t^r}{p_0 + p_1 t + \cdots + p_s t^s}$$

ここで、 $a_n, c_\ell, p_s > 0, b_m, d_k, q_r \neq 0$  としてよい。

まず  $f$  と 0 の大小であるが、分子と分母の積の最高次の項の係数で決まるので  $a_n b_m > 0$  ならば  $f > 0$  となる。つまり、 $a_n > 0$  なので、 $b_m$  の符号で決まることになる。

次に、 $g - f$  であるが、通分してから分母をかけるので、 $a_n, c_\ell > 0$  より、分母は無視してよい。

$$(d_0 + \cdots + d_k t^k)(a_0 + \cdots + a_n t^n) - (b_0 + \cdots + b_m t^m)(c_0 + \cdots + c_\ell t^\ell)$$

の最高次の項の係数を 0 と比較することになる。

しかし、上の式を簡略化して書けば、 $d(t)a(t) - b(t)c(t)$  であり、所詮  $t$  の多項式なので、最高次の項の係数が正ならば、十分大きな  $t_0$  をとって、

$$t > t_0, \quad d(t)a(t) - b(t)c(t) > 0$$

とできるはずである。(  $t$  が実数なのでわかることである。) また、逆も成り立つ。つまり、十分大きな  $t_0$  をとって、 $t > t_0$  ならば  $d(t)a(t) - b(t)c(t) > 0 \Leftrightarrow g - f > 0$

**補題1** 上の定義により定まる  $\leq$  は順序となっている。

**証明** (1)  $g \leq g$  は明らかである。(2)  $g \leq f$  かつ  $g \geq f$  ならば  $g = f$  も明らかである。

(3)  $f \leq g$  かつ  $g \leq h$  ならば  $f \leq h$  となるかであるが、( = ) のときは明らかであるので省略する。

$f < g$  ならば 十分大きな  $t_0$  をとって、 $t > t_0$  ならば  $d(t)a(t) - b(t)c(t) > 0$

$g < h$  ならば 十分大きな  $t_1$  をとって、 $t > t_1$  ならば  $c(t)q(t) - d(t)p(t) > 0$

ただし、 $h = \frac{q(t)}{p(t)}$  とした。ここで、 $T_1 = \text{Max}\{t_0, t_1\}$  とすれば、 $t > T_1$  で、

$$d(t)a(t) - b(t)c(t) > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$c(t)q(t) - d(t)p(t) > 0 \cdots \textcircled{2}$$

が同時に成り立つ。

また、 $a(t)$ 、 $c(t)$ 、 $p(t)$  の最高次の項の係数が正だったので、上と同じように十分大きな  $T_2$  をとれば、 $t > T_2$ 、 $a(t)$ 、 $c(t)$ 、 $p(t) > 0$  とすることができる。よって、

$T = \text{Max}\{T_1, T_2\}$  とすれば

$t > T$  で、 $\textcircled{1}$  の両辺を  $c(t) > 0$  で割る

$$\begin{aligned} d(t)a(t) > b(t)c(t) &\rightarrow \frac{a(t)d(t)}{c(t)} > b(t) \rightarrow -b(t) > -\frac{a(t)d(t)}{c(t)} \\ &\rightarrow -b(t)p(t) > -\frac{a(t)d(t)}{c(t)}p(t) \end{aligned}$$

両辺に  $a(t)q(t)$  をたして

$$a(t)q(t) - b(t)p(t) > a(t)q(t) - \frac{a(t)d(t)}{c(t)}p(t)$$

$c(t)$  を両辺にかけて

$$a(t)c(t)q(t) - b(t)c(t)p(t) > a(t)c(t)q(t) - a(t)d(t)p(t)$$

$$= a(t) \{ c(t)q(t) - d(t)p(t) \}$$

$a(t) > 0$  ,  $c(t)q(t) - d(t)p(t) > 0$  なので

$$a(t)c(t)q(t) - b(t)c(t)p(t) > 0 \rightarrow a(t)q(t) - b(t)p(t) > 0$$

よって、 $h - f > 0$  つまり  $h > f$  がわかった。

**補題2**  $R(t)$  は全順序集合である。(R14)

**証明**  $R(t)$  の任意の有理式  $f = \frac{b(t)}{a(t)}$  ,  $g = \frac{d(t)}{c(t)}$  (十分大きな  $T$  をとれば

$\forall t > T$  ,  $a(t)$  ,  $c(t) > 0$  とする。)

ここで、 $a(t)d(t) - b(t)c(t)$  は  $t$  の多項式である。したがって、 $T$  よりもっと大きな  $t$  をとれば、正になるか負になるかのどちらか、または、常に 0 であるかである。よって全順序集合となる。

**補題3**  $R(t)$  は順序体である。(任意の  $f, g, h \in R(t)$  に対し次のことがいえる)

$$(1) f < g \rightarrow f + h < g + h \quad (\mathbf{R15})$$

$$(2) f > 0, g > 0 \rightarrow fg > 0 \quad (\mathbf{R16})$$

**証明**  $f = \frac{b(t)}{a(t)}$  ,  $g = \frac{d(t)}{c(t)}$  ,  $h = \frac{q(t)}{p(t)}$  ただし、十分大きな  $T$  をとって、 $\forall t \in$

$T$  に対し

$a(t)$  ,  $c(t)$  ,  $p(t)$  ,  $a(t)d(t) - b(t)c(t) > 0$  とする。

(1) の証明

$$\begin{aligned} g + h - (f + h) &= \frac{c(t)q(t) + d(t)p(t)}{c(t)p(t)} - \frac{b(t)p(t) + a(t)q(t)}{a(t)p(t)} \\ &= \frac{a(t)d(t)p(t) - b(t)c(t)p(t)}{a(t)c(t)p(t)} \\ &= \frac{p(t) \{ a(t)d(t) - b(t)c(t) \}}{a(t)c(t)p(t)} > 0 \end{aligned}$$

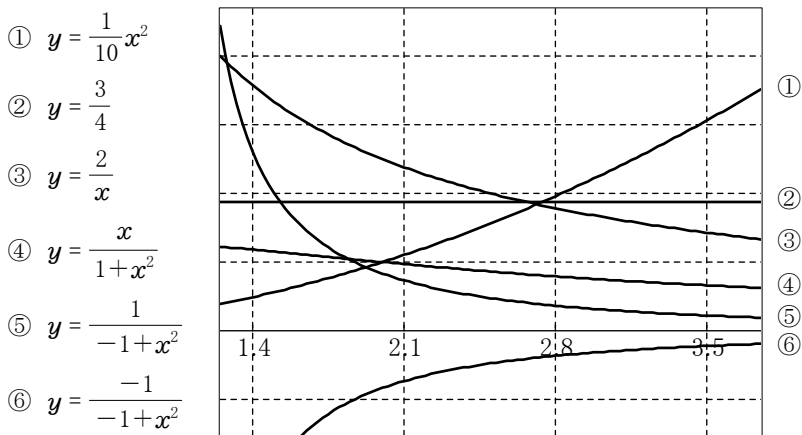
(2) の証明

$f = \frac{b(t)}{a(t)} > 0$  ,  $g = \frac{d(t)}{c(t)} > 0$  なので、 $b(t)$  ,  $d(t) > 0$  よって

$$fg = \frac{b(t)d(t)}{a(t)c(t)} > 0$$

(例) 以上の内容を直感的に表してみる。ここでは、 $t$  の代わりに  $x$  を用いる。

①、②、③、④、⑤、⑥の大きい順になっていることがわかる。



③と④について、

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{2+2x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{2+x^2}{x(1+x^2)} > 0 \text{ なので、} \frac{2}{x} > \frac{x}{1+x^2} \text{ となる。}$$

(P. 6 命題1. 3の 2)の証明) (注  $m \notin A$  でもよい)

(証明)もし、 $x < m$ となる任意の  $x$  に対して、 $x < a$ となる  $a \in A$  が存在しなければ、任意の  $a \in A$  に対して、 $x \geq a$ となり、つまり、 $x$  は  $A$  の一つの上界となる。よって、最小上界である上限  $m$  に対して、 $x < m$ となり矛盾する。また、 $A$  が有限集合の場合、例えば  $A = \{c, d\}$ 、 $c < d$  のとき、 $\sup A = d$  であり、任意の  $x < d$  は  $c$  なので  $c < a$ となる  $a \in A$  は  $d$  一つしかないが、確かに存在する。

(P. 6 例5)

” $(s - \varepsilon)^2 < 2$ 、 $\varepsilon > 0$ は任意だから、 $s^2 \leq 2$ となる。”が理解できない。そこで、P. 3(1. 1)より、i)  $2 < s^2$  ii)  $2 = s^2$  iii)  $2 > s^2$  の内の一つ、そして、唯一つが成り立つので、i)から検討してみる。

もし、 $2 < s^2$  ならば、適当な  $t \in \mathbb{Q}$  をとれば  $2 < t^2 < s^2$  とすることができる。

なぜなら、 $\frac{1}{2}(s^2 - 2) > \frac{1}{n^2}$ 、 $\frac{1}{4s}(s^2 - 2) > \frac{1}{m}$  となる自然数  $n, m \geq 1$  を取り、

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} = c > 0, t = s - c \text{ と置けば } t \text{ は有理数であり, } t < s \rightarrow t^2 < s^2$$

$$c \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{4s}(s^2 - 2), \quad c \leq \frac{1}{n} \rightarrow c^2 \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2}(s^2 - 2) \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} t^2 &= (s - c)^2 = s^2 - 2sc + c^2 > s^2 - 2s \frac{1}{4s}(s^2 - 2) - \frac{1}{2}(s^2 - 2) \\ &= s^2 - \frac{1}{2}(s^2 - 2) - \frac{1}{2}(s^2 - 2) = 2 \end{aligned}$$

よって、 $t$  は  $A$  の上界となる。このことは、 $s$  が上限であることに反する。

iii) ならば、また同じように、適当な  $0 < t \in \mathbb{Q}$  をとれば、 $s^2 < t^2 < 2$  とすることができる。なぜなら、 $\frac{1}{2}(2 - s^2) > \frac{1}{n^2}, \frac{1}{4s}(2 - s^2) > \frac{1}{m}$  となる自然数  $n, m \geq 1$  を

$$\text{取り } \text{Min} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} = c > 0, t = s + c \text{ と置けば, } s < t \rightarrow s^2 < t^2$$

$$c \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{4s}(2 - s^2), \quad c \leq \frac{1}{n} \rightarrow c^2 \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2}(2 - s^2) \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} t^2 &= (s + c)^2 = s^2 + 2sc + c^2 < s^2 + 2s \frac{1}{4s}(2 - s^2) + \frac{1}{2}(2 - s^2) \\ &= s^2 + \frac{1}{2}(2 - s^2) + \frac{1}{2}(2 - s^2) = 2 \end{aligned}$$

$t \in A, s < t$  となり、 $s$  は最小上界なので矛盾する。以上により、 $s^2 = 2$  とならなければならない。しかし、ありえないのである。

### (P. 7 例6)

$$\varepsilon \leq b \rightarrow \varepsilon^2 \leq b\varepsilon \text{ なので,}$$

$$(b + \varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \leq b^2 + 2b\varepsilon + b\varepsilon = b^2 + 3b\varepsilon$$

$$\leq b^2 + 3b \frac{a - b^2}{3b} = a$$

$$(b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \geq b^2 - 2b\varepsilon - \varepsilon^2 \geq b^2 - 2b\varepsilon - b\varepsilon$$

$$= b^2 - 3b\varepsilon \geq b^2 - 3b \frac{b^2 - a}{3b} = a$$

### (P. 9 命題1. 6)

命題1. 3 2)より、

$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a$ ,  $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b$  となる  $a \in A$ ,  $b \in B$  が存在するので

$$\sup A + \sup B - \varepsilon < a + b \leq \sup(A + B)$$

$$0 \leq (\sup A + \sup B) - \sup(A + B) < \varepsilon$$

よって、 $\varepsilon > 0$  は任意なので、(1.5)より、 $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$  となる。

$\sup A \sup B = \sup(AB)$  について

$A, B$  が共に  $[0, +\infty)$  の部分集合なのでどちらか、または、共に有界でない場合は、等号が成り立つのは明らか。共に上に有界の場合を考える。

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、上記と同様にして

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} < a$$
,  $\sup B - \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B} < b$  となる  $a \in A$ ,  $b$

$\in B$  が存在するので

$$\sup A \sup B - \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}\right)^2 < ab \leq \sup(AB)$$

$$\sup A \sup B - \varepsilon < \left(a + \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}\right) \left(b + \frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}\right) - \varepsilon$$

$$= ab + \frac{(a+b)\varepsilon}{\sup A + \sup B} + \left(\frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}\right)^2 - \varepsilon$$

$$< ab + \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}\right)^2 - \varepsilon$$

したがって

$$A, B \subset [0, +\infty) \text{ なので } 0 \leq (\sup A \sup B) - \sup(AB)$$

$$0 \leq (\sup A \sup B) - \sup(AB) < \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{\sup A + \sup B}\right)^2$$

よって、 $\varepsilon > 0$  は任意なので、(1.5)より、 $\sup A \sup B = \sup(AB)$  となる。



## (P. 10 定義1 (継承的))

$R$  の部分集合  $H$  が次の 1), 2) をみたすとき、 $H$  は継承的であるという。

$$1) 0 \in H$$

$$2) n \in H \Rightarrow n+1 \in H$$

例えば、0.1 の倍数の集合  $\{\dots -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots\}$

は継承的である。 $\{0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, \dots\}$  でもよい。

1 より大きい数の倍数の集合は継承的ではない。

## (P. 11 例2 (2項定理))

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right\} \\ &= (a+b) \left\{ \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{k-1} a^{k-1} b^{n-(k-1)} + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0 \right\} \\ &= \left\{ \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} a^n b^1 + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \right\} \\ &\quad + \left\{ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a^1 b^n + \dots + \binom{n}{k-1} a^{k-1} b^{n-k+2} + \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + (n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \quad \text{★の所で}$$

よって、

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \dots + \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \dots + \binom{n+1}{n} a^n b^1 + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\ \binom{n}{0} &= \binom{n+1}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{★の所で} \\ &= a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \dots + \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \dots + \binom{n+1}{n} a^n b^1 + a^{n+1} b^0 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

(P. 11 定理2. 2)

$m \in A$ ,  $A \cap N(m) = \emptyset$  のとき,  $x < m$ ,  $x \in A$  が存在したとすると,  $x \in N(m)$  なので  $x \in A \cap N(m) \neq \emptyset$  となり矛盾する。よって,  $m = \text{Min}(A)$  となる。

$m \in A$ ,  $A \cap N(m) \neq \emptyset$  のとき,  $A \cap N(m)$  は  $N$  の有限部分集合なので,  $\text{Min}(A \cap N(m)) = n$  が存在する。ここで,  $x < n$ ,  $x \in A$  が存在したとすると,  $n < m$  なので  $x$  が最小値となり  $n$  が最小値であることに矛盾する。よって, そのような  $x$  はない。つまり,  $n$  は  $A$  の最小値となる。

(P. 12 例5 補足)

$$0 < a \leq b \rightarrow \frac{a}{ab} \leq \frac{b}{ab} \rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

(P. 13 例6)

$$n_0 h > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow nh > n_0 h > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{nh} < \varepsilon$$

(P. 13 例7)

$$x^n > \frac{n(n-1)h^2}{2}$$

$$(n-1)h^2 > (n_0-1)h^2 > \frac{2}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(n-1)h^2} < \frac{1}{(n_0-1)h^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{よって, } 0 < \frac{n}{x^n} < \frac{2}{(n-1)h^2} < \varepsilon \text{ となる。}$$

(P. 14 定理2. 5)

$$1) |a-b-(a_n-b_n)| = |a-a_n+b_n-b| \leq |a-a_n| + |b_n-b|$$

$$2) |ab-a_n b_n| \leq \frac{|a|\varepsilon}{2(|a|+1)} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \frac{|a|\varepsilon + |a|\varepsilon + \varepsilon}{2(|a|+1)}$$

$$= \frac{(2|a|+1)\varepsilon}{2|a|+2} < \varepsilon$$

$$3) \varepsilon \text{ として } \frac{1}{2}|b| \text{ とすれば, } \frac{1}{2}|b| > |b-b_n| \geq |b| - |b_n|$$

$$\rightarrow -\frac{|b|}{2} > -|b_n|$$

(P. 15 定理2. 6)

$$a - b = 2\varepsilon \rightarrow a = b + 2\varepsilon \rightarrow b + \varepsilon = a - \varepsilon$$

(P. 18 例1)

$$a < a + a_0 \rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a + a_0} \rightarrow a_0 < a_1$$

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (\sqrt{a + a_n})^2 - (\sqrt{a + a_{n-1}})^2 = a_n - a_{n-1} > 0$$

$$(1 + \sqrt{a})^2 - (\sqrt{a + 1 + \sqrt{a}})^2 = 1 + 2\sqrt{a} + a - (a + 1 + \sqrt{a}) = \sqrt{a} > 0$$

$$c^2 - c - a = 0$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-a)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

(P. 19 (3. 7) がアルキメデスの原理と同値)

⇐ の証明

任意の実数  $\frac{b}{a} > 0$  に対し  $n > \frac{b}{a}$  となる自然数  $n$  が存在する。よって、 $na > b$

となる自然数  $n$  が存在することになる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  は同値

⇒ 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $n > \frac{1}{\varepsilon}$  となる自然数  $n$  が存在するので、 $\frac{1}{n} < \varepsilon$  となり

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  となる。

⇐ 任意の  $b > 0$  に対し、 $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$  となる自然数  $n$  が存在するので、 $n > b$  となり

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  となる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

任意の  $b > 0$  に対し、 $2^n > b$  となる自然数  $n$  が存在するので、 $2^n = m$  とおけば  $m > b$  となる自然数  $m$  が存在することになる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$  となる自然数  $n$  が存在するので、 $2^n = m$  とおけば

$\frac{1}{m} < \varepsilon$  となる自然数  $m$  が存在することになる。

(P. 20 定理3. 3 区間縮小法)

命題2. 7のはさみうちの原理は共に  $a$  に収束する数列  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  があって、すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対し、 $a_n \leq b_n$  をみたし、数列  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  がすべての  $n \in \mathbb{N}$  に対し、 $a_n \leq c_n \leq b_n$  となっている必要がある。 $b_n - a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるが  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$  となっているわけではない。またそうであったとしても最初から、 $a_n \leq c_n \leq b_n$  となる数列  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  が存在することを認めているので  $a$  に収束するのであって、**区間縮小法** ではその存在を求めている。実数の連続性から存在することを証明している。

(3.11), (3.12) より、 $a_n \leq a \leq c \leq b \leq b_n$  なので

$$c - a_n \leq b_n - a_n \quad \text{また、} \quad -a_n \geq -a \geq -c \geq -b \geq -b_n \rightarrow c - a_n \geq c - a \geq 0$$

よって、 $0 \leq c - a \leq c - a_n \leq b_n - a_n$

以上から、 $0 \leq |a - c| \leq b_n - a_n$  となる。

同様にして

$$b_n - c \leq b_n - a_n \quad \text{また、} \quad 0 \leq b - c \leq b_n - c \rightarrow 0 \leq |b - c| \leq b_n - a_n$$

そこで仮定  $b_n - a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) と (1.5) により  $a = b = c$  を得る。

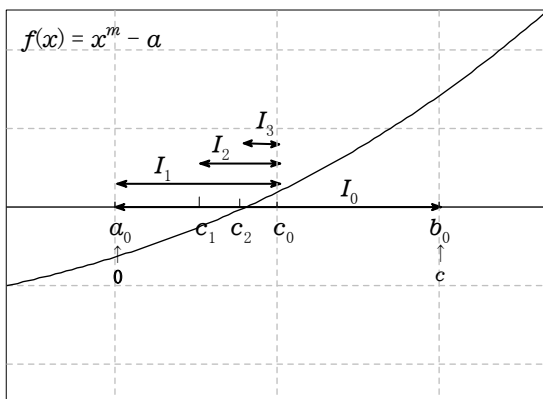
(P. 22 例3 補足)

$$0 < a < 1 \rightarrow 0 < a^2 < a < 1 \rightarrow 0 < a^3 < a^2 < a < 1 \rightarrow 0 < a^m < a < 1$$

$$1 < a \rightarrow 1 < a < a^2 \rightarrow 1 < a < a^2 < a^3 \rightarrow 1 < a < a^m$$

右図の様に区間を縮小していく

$$b_n - a_n = \frac{c}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



(P.23 (3.17))

すべての  $k \in \mathbb{N}$  に対し、 $k \leq n(k)$

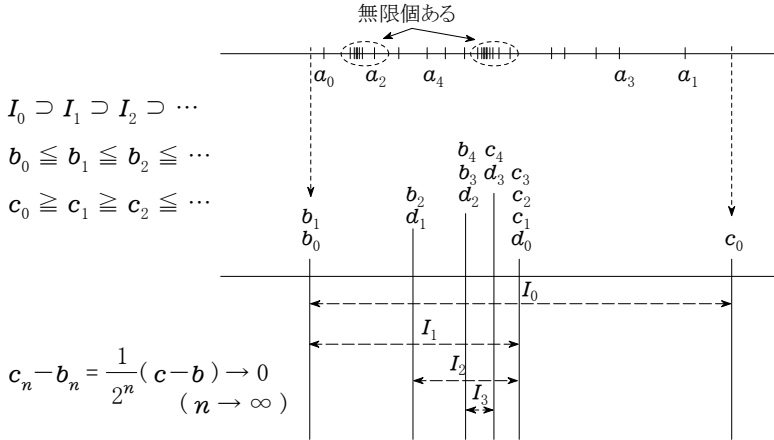
$n(k)$  は狭義単調増加であることから、数学的帰納法によって証明する。

$0 \leq n(0)$  は明らかである。

また、 $k-1 \leq n(k-1) < n(k)$

$k$  は  $k-1$  より大きい最小の自然数なので、 $k \leq n(k)$  となる。

(P.24 定理3.4 (ボルツァーノ・ワイヤストラス))



そこで、区間縮小法により、ある実数  $a$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

(3.20) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  を一つ定めるとき、 $a_m \in I_n$  となる  $m \in \mathbb{N}$  が無限にある。

このことから

$$n(0) < n(1) < \dots < n(k) < \dots$$

となる自然数列  $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$  で

すべての  $k \in \mathbb{N}$  に対し  $a_{n(k)} \in I_k$  をみたくものが存在する。実際、 $d_k = a_{n(k)}$  とおけば、 $d_0 = a_{n(0)}$ ,  $d_1 = a_{n(1)}$ ,  $\dots$ ,  $d_k = a_{n(k)}$  まで選んだとき、つまり、 $k$  番目まで選び、 $k+1$  番目を  $n(k)$  より大きい  $m$  で  $a_m \in I_{k+1}$  となる  $m \in \mathbb{N}$  が無数にあるから、定理2.2 ( $\mathbb{N}$  の空でない任意の部分集合  $A$  は、最小元  $\min A$  をもつ。) より最小のものを  $n(k+1)$  とすれば、 $n(k) < n(k+1)$ ,  $a_{n(k+1)} \in I_{k+1}$  となる。

このときすべての  $k$  に対し

$$b_k \leq a_{n(k)} \leq c_k$$

が成り立つから、はさみ打ちの原理(命題2. 7)により、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = a$$

である。即ち部分列  $(a_{n(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  は  $a$  に収束する。

### (P.28 コーシーの収束条件とアルキメデスの原理 → 連続の公理)

部分的に補足

任意の  $c \in C, b \in B$  に対し  $c < a \in A$  となる  $a$  がある。

なぜなら、もしそのような  $a$  が存在しないならば、すべての  $A$  の元が  $\leq c$  となり  $c \in B$  になってしまうからである。

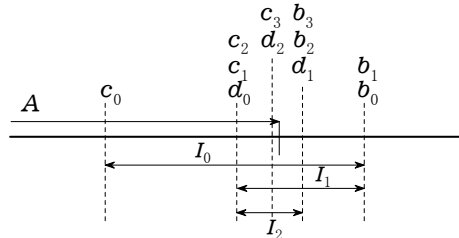
具体的に

$$d_0 \notin B \text{ なので } d_0 \in C$$

$$I_1 = [c_1, b_1] = [d_0, b_0]$$

$$d_1 \in B$$

$$I_2 = [c_2, b_2] = [d_0, d_1]$$



$b = c = \sup A$  を示す。

定義から  $c_n \in C, b_n \in B$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

であるから、任意の  $a \in A$  に対し  $a \leq b_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) となる。したがって、

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (\forall a \in A) \leftarrow (\text{定理2. 6から})$$

即ち、 $b$  は  $A$  の上界 ( $b \in B$ ) である。

いま任意の  $x < b$  を取ると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c = b$  だから、 $x < c_n < b$  となる  $n$  が存在する。 $c_n \in C$  は  $A$  の上界ではないから、 $a \in A$  が存在して、

$$x < c_n < a \leq b$$

が成り立つ。つまり、 $x$  は  $A$  の上界ではない。まとめると、任意の  $x < b$  は  $A$  の上界ではない。以上から、 $b$  が  $A$  の最小上界であり、即ち上限であることになる。

### (P.29 注意5 連続の公理)

P.27の「※この注意の内容は理論的に重要であるが、本書の後の部分を読むには必要ない。」に甘えたいところであるが少しだけ深入りする。

「(K)、(C)から(A)は導けない。」については、(数学の基礎 P.65 齋藤正彦 著 東大出版、附録の有理数のコーシー完備化)を参考してもらいたい。

(B-W)から(A)が導かれることは、

(B-W)を仮定し、(A)が成り立たないとして背理法(帰謬法)で証明する。

実際、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ ではないとする。つまり、有界であるならば、収束する部分列が存在するはずである。その部分列を  $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$  とおく。収束列はコーシー列なので、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある整数  $N$  が存在して

$$|n(i) - n(j)| < \varepsilon \quad \forall i, j > N$$

とすることができる。しかし、 $i < j$  ならば、 $n(i) < n(j)$  であり、しかも、ともに自然数である。したがって  $\varepsilon$  を 1 未満としたら、いかなる  $N$  をとっても  $\varepsilon$  より小さくすることはできない。よって、矛盾する。

### (P.29 定理3.7)

任意に与えられた実数  $a$  に対し、

$$(3.27) \quad m > -a$$

となる自然数  $m$  が存在する。実際  $0 \geq -a$  ならば  $m = 1$  でよい。また  $-a > 0$  ならば、アルキメデスの原理によって、 $1 > 0$  なので  $m > -a$  となる  $m \in \mathbb{N}$  が存在する。いま(3.27)をみたす  $m$  を一つ定める。 $m+a > 0, 1 > 0$  なので、アルキメデスの原理により  $m+a < n$  となる自然数  $n$  が存在する。そのような  $n$  の集合を  $A$  とすれば  $A \neq \emptyset$  だから定理2.2により、 $\text{Min } A = l \in \mathbb{N}$  が存在する。 $l$  の定義により  $0 < m+a < l$  だから、 $l-1$  も自然数で、次の関係式が成り立つ。

$$(3.28) \quad l-1 \leq m+a < l$$

$l-1 \leq m+a$  であるが、 $l-1 > m+a$  だとしたら、 $l-1$  も自然数なので、 $l$  が最小であることに反するからである。

また、 $n = l - m - 1$  とすれば、 $l-1 \leq m+a < l \rightarrow l-m-1 \leq a < l-m \rightarrow n \leq a < n+1$  となり、(3.26) が成り立つ。

一意性を示すために  $n$  以外の  $p < n < q$  なる自然数  $p, q$  をとれば、  
 $p+1 \leq n \leq a < n+1 \leq q$  だから  $p+1 \leq a, a \leq q$  なので  $p, q$  は (3.26) を  
 みたさない。

**(P.30 定理3.9)**

$-4 \leq -3.1 < -3 \rightarrow [-3.1] = -4$  であるから、 $x < 0$  であっても、 $x - [x] = x_0$   
 $> 0$  であることに注意が必要である。したがって、いかなる場合も、 $x_0 \in [0, 1)$  と

なる。 $I_0$  を  $[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10})$  ( $0 \leq k \leq 9$ ) の半開区間に十等分すると  $10x_0$  は実数  
 なので定理3.7より、 $k \leq 10x_0 < k+1$  となる整数  $k$  が唯一つ存在する。その  $k$

を  $x_1$  とすれば、 $x_0 \in [\frac{x_1}{10}, \frac{x_1+1}{10}) = I_1$  また同じように  $I_1$  を十等分し

$x_0 \in [\frac{x_1}{10} + \frac{l}{10^2}, \frac{x_1}{10} + \frac{l+1}{10^2}) = I_2$  となる整数  $l$  が存在するので、 $l = x_2$  とし

$$\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leq x_0 < \frac{x_1}{10} + \frac{x_2+1}{10^2}$$

$$\text{よって、} [x] + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leq x_0 + [x] < [x] + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

となり、以下同様に各  $n \in \mathbf{N}$  に対し、 $x_n$  が一意的に定まる。そこで、次のように

$$(3.29) \quad a_n = [x] + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \quad (0 \leq x_i \leq 9, x_i \in \mathbf{N})$$

有理数列  $a_n$  を定義し、 $x_0 + [x] = x$  なので、 $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$  ,  $J_n = [a_n, b_n)$   
 $\overline{J}_n = [a_n, b_n]$  とすれば

$x \in J_n \subset \overline{J}_n$  ( $\forall n \in \mathbf{N}$ ) となる。

**(P.31 (3.32) の収束について)**

(3.32)  $x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$  ( $x_0$ : 任意の自然数,  $(x_n)_{n \in \mathbf{N} - (0)}$ : 0 から 9 までの整数  
 を値にとる任意の数列)

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \dots < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

**(P.37 シュワルツの不等式)** (線型代数学 川久保勝夫 著 日本評論社 参照)

シュワルツの不等式で等号が成り立つのは  $x, y$  の一方が他方の実数倍になって



いるときに限る。この”限る”についてだが

$x \neq 0$  のとき、 $t = \frac{(x|y)}{|x|^2}$  とおくと

$$|y - tx|^2 = |y|^2 - 2t(x|y) + t^2|x|^2 = |y|^2 - \frac{2(x|y)^2}{|x|^2} + \frac{(x|y)^2}{|x|^2}$$

$$= |y|^2 - \frac{(x|y)^2}{|x|^2}$$

$0 \leq |y - tx|^2 = |y|^2 - \frac{(x|y)^2}{|x|^2}$  なので  $(x|y)^2 \leq |x|^2|y|^2$  を得る。

$(x|y)^2 = |x|^2|y|^2$  のときは  $|y - tx| = 0$  なので  $y = tx$  のときに限ることになる。逆に  $y = tx$  のとき等号になることは明らかである。

**(P.41 R6,R7)**

$$\begin{aligned} & \{(a, b)(c, d)\}(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (e(ac - bd) - f(ad + bc), f(ac - bd) + e(ad + bc)) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ & (a, b)\{(c, d)(e, f)\} \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, abf + ade + bce - bdf) \end{aligned}$$

よって、 $\{(a, b)(c, d)\}(e, f) = (a, b)\{(c, d)(e, f)\} \leftarrow R6 (OK)$

R7 については

$$\begin{aligned} & (a, b)\{(c, d) + (e, f)\} \\ &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ & (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

よって、 $(a, b)\{(c, d) + (e, f)\} = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} & \{(c, d) + (e, f)\}(a, b) \\ &= (c+e, d+f)(a, b) = (a, b)(c+e, d+f) \\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \\ & (c, d)(a, b) + (e, f)(a, b) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= (ac-bd+ae-bf, ad+bc+af+be) \\ & \text{よって、}\{(c, d) + (e, f)\}(a, b) = (c, d)(a, b) + (e, f)(a, b) \cdots \textcircled{2} \\ & \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より、} R7 \text{ (OK)} \end{aligned}$$

**(P.44 例2)**

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+\cdots+z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

高校の教科書にもものっているが、説明することにする。

$$s_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n \text{ とすれば、}$$

$$zs_n = z+z^2+\cdots+z^n+z^{n+1}$$

$$s_n(1-z) = 1-z^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

次に移項して反転すると

$$\frac{1}{1-z} = s_n + \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-z} = s_n + \frac{z^{n+1}}{1-z} = 1+z+\cdots+z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

を得る。

**(P.46 命題5.3 2))**

連続する有限個の項の和を項とする級数とは、

$$(a_0+a_1+\cdots+a_{n_0})+(a_{n_0+1}+\cdots+a_{n_1})+(\cdots)+\cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & b_0 & & b_1 & & \end{array}$$

$$b_0 = s_{n_0}, b_0 + b_1 = s_{n_1} \cdots \{s_n\} \text{ の部分列となる。}$$

**注意** 後に、条件収束が出てくるが、ここでは、項の順序をかえていないことに注意したい。

(P.46 定理5.5 3))

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \rightarrow \text{両辺に } \frac{a_n}{c_{n+1}} \text{ をかけると } \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} \leq \frac{a_n}{c_n} \leq \dots \leq \frac{a_0}{c_0}$$

(P.48 定理5.8)

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

⋮

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$\sum_{n=0}^m |c_n| = \sum_{n=0}^m |a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0| \leq \sum_{n=0}^m \sum_{p+q=n} |a_p| |b_q|$$

$$\leq \left( \sum_{n=0}^m |a_p| \right) \left( \sum_{n=0}^m |b_q| \right)$$

したがって、 $\sum c_n$  は絶対収束する。その和を  $c$  とすれば

$$s_m = \sum_{n=0}^m c_n = c_0 + c_1 + \dots + c_m = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_m + \dots + a_m b_0)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = c$$

$$\sum_{n=0}^{2m} c_n = s_{2m} \text{ は } s_m \text{ の部分列になる。よって、} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2m} c_n = c \text{ となる。}$$

次に、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が絶対収束すれば、 $\alpha_n = \sum_{p=n}^{\infty} |a_p|$  とおいたとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  となることを示す。

まず、 $\sum_{p=n}^{\infty} |a_p|$  が収束することを示す。部分和を次のようにする。

$$\text{任意の } n \text{ に対し、} 0 \leq \alpha_n = \sum_{p=n}^{\infty} |a_p| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |a_p|$$

$\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|$  は絶対収束するので  $\alpha_n$  は上にも下にも有界である。

また、 $\alpha_n$  は単調減少なので定理3.1 2)より、ある値に収束する。

次に、 $s_n = \sum_{p=0}^n |a_p|$  としたとき  $\sum_{p=0}^{\infty} |a_p| = s_{n-1} + \alpha_n$  である。

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} |a_p|$  なので  $n \rightarrow \infty$  すると、上の等式から

$\alpha_n = \sum_{p=0}^{\infty} |\alpha_p| - s_{n-1} \rightarrow 0$ となる。

同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ となる。

	↑	(0,8)	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)
	q	(0,7)	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)
2m		(0,6)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)
		(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)
		(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)
m		(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)
		(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
		(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)
		(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)	(8,0)
					m		2m		p	→

( $m = 3$  のとき) 右図参照

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^6 c_n - \sum_{p=0}^3 \alpha_p \sum_{q=0}^3 b_q \right| \\
 & \leq (|\alpha_0| \|b_4\| + |\alpha_1| \|b_4\| + |\alpha_2| \|b_4\| + |\alpha_0| \|b_5\| + |\alpha_1| \|b_5\| + |\alpha_0| \|b_6\|) + (|\alpha_4| \|b_0\| + |\alpha_4| \|b_1\| + |\alpha_4| \|b_2\| + |\alpha_5| \|b_0\| + |\alpha_5| \|b_1\| + |\alpha_6| \|b_0\|) \\
 & = \sum_{q=4}^6 \sum_{p=0}^{6-q} |\alpha_p| \|b_q\| + \sum_{p=4}^6 \sum_{q=0}^{6-p} |\alpha_p| \|b_q\| \\
 & \leq (|\alpha_0| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|)(\|b_4\| + \|b_5\| + \dots) + (|\alpha_4| + |\alpha_5| + \dots)(\|b_0\| + \|b_1\| + \|b_2\| + \|b_3\|) \\
 & = \left( \sum_{p=0}^3 |\alpha_p| \right) \left( \sum_{q=4}^{\infty} \|b_q\| \right) + \left( \sum_{p=4}^{\infty} |\alpha_p| \right) \left( \sum_{q=0}^3 \|b_q\| \right)
 \end{aligned}$$

(P. 59 例8)

$$c_0 = z^0 z^0, c_1 = z^0 z^1 + z^1 z^0, c_2 = z^0 z^2 + z^1 z^1 + z^2 z^0$$

$$c_n = z^0 z^n + \dots + z^n z^0 = (n+1)z^n$$

(P. 52 例2)

$$|x| - |a| < |x - a| < \delta$$

(P. 53 例4)

$$\frac{2x^2 \tan \theta}{x^2 + x^2 \tan^2 \theta} = \frac{2x^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{x^2 \left( 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)} = \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta}{\cos \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

定義3で  $A = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x \tan \theta\}$  とし、 $B$  内で 0 に近づくとき

の  $f(x)$  の極限を求めている。

(P.53 (6.3))

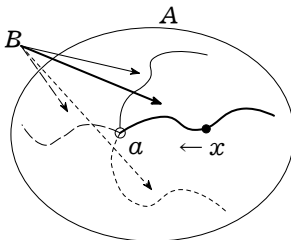
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  が存在することの

意味は、右図の様に  $a \in \overline{B}$  を

みたす任意の  $B \subset A$  に対して

$\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x) = b$  となることであり、 $B \subset A$  が

任意の  $B$  であることに注意したい。



(P.54 例5)

$I = [a, b]$  で  $f$  は単調増加とする。任意の  $c \in I$  に対し、 $f(c-0)$  が存在する。

$B = [a, c)$  とし、 $c$  に収束する  $B$  の任意の数列  $\{x_n\}$  を選ぶ。 $\{x_n\}$  の部分列の

なかで単調増加するものを選び出し、それを  $\{x_{n(k)}\}$  とすれば、 $f(x_{n(k)})$  は単調増

加するので、有界ならば極限值が存在

する。つまり、命題3.5, 2)から  $f(x_{n(k)})$

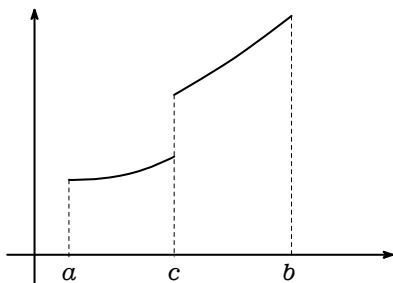
も同じ極限值に収束することになる。

としたいところだが  $f(x_n)$  がコーシー列

であることを示せないのが上手くない。

やはり、任意の数列と任意の単調

増加数列とは違う。



よって、数学解析 溝畑 茂 著 P. 8 定理1. 2を引用することにする。

$$\gamma = \sup_{x < c} f(x)$$

とする。 $f(b)$  は上界のはずなので、 $\gamma$  は存在するはずである。

$$\gamma = f(c-0) \text{ を示す。}$$

上限の定義より、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $x_0 < c$  が存在して

$$\gamma - \varepsilon < f(x_0)$$

また上限の定義より  $f(x) \leq \gamma$  ( $x < c$ ) だから、 $f(x)$  の単調性を考慮すれば

$x_0 < x < c$  のとき、

$$\gamma - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \rightarrow 0 \leq \gamma - f(x) < \varepsilon$$

が成り立つ。 $x_0 - c = \delta$  とすれば、 $0 < c - x < \delta$  のとき  $|\gamma - f(x)| < \varepsilon$  なので

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \gamma$$

つまり、 $f(c-0) = \gamma$  となる。 $f(c+0)$  についても同様に証明できる。

**(P.55 命題6.5 b)  $\Leftrightarrow$  d)**

b) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して  $|x - a| < \delta$  となるすべての  $x \in D$  に対し  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  となる。

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$  が存在して  $f(a)$  に等しい。

d) を b) のように書いてみれば、

d') 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在して  $0 < |x - a| < \delta$  となるすべての  $x \in D$  に対し  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  となる。

したがって、 $0 < |x - a| < \delta$  ならば  $|x - a| < \delta$  なので  $b) \Rightarrow d)$  が成り立つ。

逆に  $f$  は  $x = a$  で定義されているので、 $|x - a| = 0$  のとき  $|f(x) - f(a)| = 0$

よって  $d) \Rightarrow b)$  が成り立つ。

**(P.56 例6)**

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \quad (\sqrt{x} + \sqrt{a} > 0 \text{ なので})$$

**(P.56  $x^n$  は連続関数である)**

定理6.3, 3)を使えば、簡単だが、あえて定理に頼らず証明してみる。

まず、 $|x| - |a| \leq |x - a| = |x + (-a)|$  なので、

$$|x - a| < \delta \text{ なら } |x| - |a| < \delta$$

となる。よって

$$|x| - |a| + 2|a| < 2|a| + \delta \text{ なので } |x| + |a| < 2|a| + \delta \text{ となる。}$$

さて、 $y = x^n$  が  $a$  で連続なことを示す。

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $\delta = \text{Min} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{(2|a| + 1)^{n-1}} \right\}$  とする。

$|x - a| < \delta$  ならば  $|x| + |a| < 2|a| + \delta$  なので、

$$\begin{aligned} |x^n - a^n| &\leq |x - a| (|x|^{n-1} + |a|^{n-1} + |x|^{n-2}|a| + |a|^{n-2}|x| + \dots + |a|^{n-1}) \\ &\leq |x - a| (|x|^{n-1} + |a|^{n-1} + |x|^{n-2}|a| + |a|^{n-2}|x| + \dots + |a|^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |x-a|(|x|+|a|)^{n-1} \\ &< \delta(2|a|+\delta)^{n-1} \\ &\leq \delta(2|a|+1)^{n-1} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

よって、 $a$  で連続であることがわかった。

### (P.56 例9)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = \text{無理数} \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q} \text{ (既約分数で、} q > 0 \text{)} \end{cases}$$

とすると、 $f$  は有理数  $x$  で不連続、無理数  $x$  で連続である。

実際、有理数  $\frac{p}{q}$  に対し、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、どんな  $\delta > 0$  をとっても、 $|x - \frac{p}{q}| < \delta$  には無理数  $x$  が存在する。したがって、 $|f(x) - f(\frac{p}{q})| = |\frac{1}{q}|$  となるからである。

次に無理数  $a$  で連続であることを示す。

$q$  を一つ定めたとき無理数  $a$  の近傍  $U(a, 1)$  に含まれる  $\frac{p}{q}$  の形の既約分数は有限個しかない。従って任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $n\varepsilon > 1$  となる自然数  $n \geq 1$  を一つ定めたとき  $0 < q \leq n$  となる既約分数 (例  $n=3$  ならば、 $q=1, 2, 3$  に対し  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ )  $\frac{p}{q} \in U(a, 1)$  も有限個である。

従ってその中で  $a$  に一番近いものと  $a$  の距離より小さく  $\delta > 0$  をとれば  $U(a, \delta)$  に含まれる既約分数  $\frac{p}{q}$  ( $q > 0$ ) は、 $q > n$  となり、 $|f(a) - f(\frac{p}{q})| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$  である。また、任意の  $x \in U(a, \delta)$  が無理数ならば  $|f(a) - f(x)| = 0 < \varepsilon$  だから任意の  $x \in U(a, \delta)$  に対し  $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$  となり、 $a$  で連続となる。

つまり、無限個の不連続点があり、無限個の連続点がある関数となる。

### (P.57 定理6.6 2)の証明の補足)

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在し

$$|g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)}$$

とすることができるので

$$M|g(x)-c|+|c||f(x)-b|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|c|\varepsilon}{2(|c|+1)} = \frac{(|c|+1+|c|)\varepsilon}{2(|c|+1)} = \frac{(2|c|+1)\varepsilon}{2|c|+2} < 1 \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

$c \neq 0$  ならば、 $A$  における  $a$  のある近傍  $A \cap U(a, \delta) = W$  で

$$|c| - |g(x)| \leq |c - g(x)| < \frac{|c|}{2} \rightarrow -|g(x)| < -\frac{|c|}{2} \rightarrow |g(x)| > \frac{|c|}{2}$$

### (P.60 補完数直線について)

$\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$  は、あくまで実数値関数についての極限值として無限大を考えているので、これを拡張して、 $\overline{R}^n$  を考える必要はない。その訳は、P.362において  $\overline{R}$  の順序を定めているが、 $R^n$  においては、そもそも順序が定められないからである。したがって、定理6.10においても、 $\overline{R}$  または、 $R^n$  の部分集合として論理を展開している。

### (P.61 命題6.9の4)の証明)

任意の  $M > 0$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在し、 $x \in U(a, \delta) \cap D$  ならば

$$|f(x)| = f(x) < \frac{1}{M} \text{ とすることができる。よって、} \frac{1}{f(x)} > M \text{ となる。}$$

### (P.62 命題6.11)の証明)

各  $x \in D$  に対し、 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  は収束するので、そのときの値を  $f(x)$  とすれば  $f(x)$  が定まる。

次に、 $D$  の任意の点  $a$  で  $f(x)$  が連続であることを示す。

まず、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、仮定iii)から、ある  $p \in N$  が存在して

$$(6.8) \sum_{n>p}^{\infty} M_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ。

なぜなら、 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  が存在するので、それを  $M$ 、 $b_k = \sum_{n=0}^k M_n$  とすれば、 $b_k$  は  $M$  に

収束から、任意の  $\frac{\varepsilon}{3} > 0$  に対し、ある  $p_0 \in N$  が存在して  $k > p_0$  に対し

$$|M - b_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^k M_n + \sum_{n>k}^{\infty} M_n = b_k + \sum_{n>k}^{\infty} M_n$$

したがって



$|M - b_k| = \left| \sum_{n > k} M_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$  となる。 $k$  を改めて  $p$  とすればよい。

$s_p(x) = \sum_{n \leq p} f_n(x)$  と置けば、(6.8) と仮定 ii) により、任意の  $x \in D$  に対し

$$(6.9) \quad |f(x) - s_p(x)| = \left| \sum_{n > p} f_n(x) \right| \leq \sum_{n > p} |f_n(x)| \leq \sum_{n > p} M_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ。このとき、 $a \in D$  なので

$$(6.9)' \quad |f(a) - s_p(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(6.9), (6.9)', (6.10) から  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  となる。

### (P.64 例3)

$$A = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

$$B = \{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \}$$

$K = A \cup B$  は点列コンパクトである。

$k$  の任意の点列  $(z_n)_{n \in N}$  をとる。

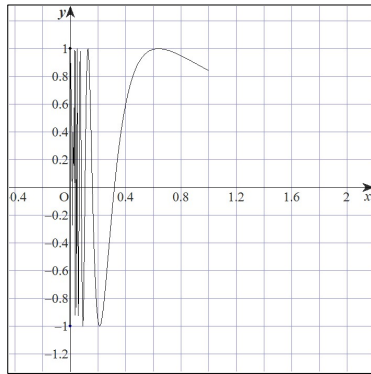
もしこの点列の項の内  $B$  に属しているものが無限にあれば、それを  $(z_{n(k)})_{k \in N}$  とするとき、

$z_{n(k)} = (0, y_{n(k)})$  の形であり、ボルツァーノ・ワイヤストラス定理により、 $(y_{n(k)})_{k \in N}$  は収束する部分列  $(y_{n(k(\ell))})_{\ell \in N}$  をもつ。このとき、 $(z_{n(k(\ell))})_{\ell \in N}$  は収束し、極限は  $B$  に含まれる。(定理2.6)

$(z_n)_{n \in N}$  が有限個しか  $B$  の元を含まない場合を考える。有限個の項を取り去っても収束には関係しないのははじめから  $(z_n)_{n \in N}$  は  $A$  の点列としてよい。このとき

$$z_n = \left( x_n, \sin \frac{1}{x_n} \right), \quad 0 < x_n \leq 1$$

と表せる。 $(x_n)_{n \in N}$  は有界実数列だから、再びボルツァーノ・ワイヤストラス定理により、収束する部分列  $(x_{n(k)})_{k \in N}$  を含む。いまこの部分列の極限を  $x$  とおくと  $0 \leq x \leq 1$  である。ここで、イ)  $x > 0$ 、ロ)  $x = 0$  の二つの場合について考える。イ) の場合には、 $(x_{n(k)})_{k \in N}$  は収束し、その極限は  $(x, \sin \frac{1}{x}) \in A \subset K$  である。



ロ) の場合には、 $y_k = \sin \frac{1}{x_{n(k)}}$  とおくと、 $(y_k)_{k \in N}$  は有界実数列だから、やはり収束部分列  $(y_{k(\ell)})_{\ell \in N}$  を持ち、その極限  $y$  は  $[-1, 1]$  に含まれる。したがって  $(z_n)_{n \in N}$  の部分列  $(z_{n(k(\ell))})_{\ell \in N}$  は収束し、その極限  $(0, y) \in B \subset K$  となる。これで、 $K$  が点列コンパクトであることが示された。

(確認)  $x_n = \frac{1}{n\pi}$  だったとすれば、

$x_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) そのとき、 $y_n = \sin \frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0$  よって極限  $y \in [-1, 1]$  となる。

### (P.65 条件2)の置き換え)

1)  $K$  の任意の点列  $(x_n)_{n \in N}$  は収束する部分列  $(x_{n(k)})_{k \in N}$  を含む。

2) この収束部分列  $(x_{n(k)})_{k \in N}$  の極限  $x$  は  $K$  に含まれる。

2)' 任意の収束する  $K$  の点列  $(y_n)_{n \in N}$  の極限  $y$  は、 $K$  に含まれる。

2)''  $\overline{K} \subset K$

2)'''  $\overline{K} = K$

1), 2)  $\Rightarrow$  2)' について

1), 2) を仮定すれば、P. 23 (3.18) より、任意の収束する  $K$  の点列  $(y_n)_{n \in N}$  の部分列はもとの点列  $(y_n)_{n \in N}$  の極限值  $y$  に収束するので、2) より  $y$  は  $K$  に含まれる。

2)'  $\Rightarrow$  2)'' について

$\Rightarrow$  P. 50 命題6. 1,1) から、任意の  $y \in \overline{K}$  に対し、 $y$  に収束する  $K$  の点列が存在するので、2)' を仮定すれば  $y \in K$  よって、 $\overline{K} \subset K$  となる。

2)''  $\Rightarrow$  2)''' P. 50 命題6. 1,2) から明らかである。

2)'''  $\Rightarrow$  2)'' は  $\overline{K} = K$  ならば  $\overline{K} \subset K$  である。

2)''  $\Rightarrow$  2)'  $\overline{K} \subset K$  ならば、 $y \in \overline{K}$  ならば  $y \in K$  なので、P. 50 命題6. 1,1) から  $y$  に収束する  $K$  の点列  $(y_n)_{n \in N}$  が存在する。その極限  $y$  は、 $K$  に含まれる。

### (P.69 7行目 上限の意味)

$f(K)$  は有界閉集合、 $b = \sup f(K)$  とする。このとき、上限の意味から、 $b$  に収束す

る  $f(K)$  の点列  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  が存在する。

なぜなら、上限の性質から、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $b - \varepsilon < a$  となる  $a \in f(K)$  が存在するので、 $\varepsilon = \frac{1}{n}$  に対するそのような  $a$  のうち  $a = f(x_n)$ ,  $x_n \in K$  となる  $x_n$  を一つを選び  $f(x_n)$  (選出公理) とすれば

$$b - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq b < b + \frac{1}{n} \rightarrow |b - f(x_n)| < \frac{1}{n} \text{ となり、存在することがわかる。}$$

**(P.69 例10)**

$f(x) = \sum_{k=1}^m |x - a_k|^2$  について、十分大きな  $r > 0$  に対する  $B(r)$  上の  $f$  の最小値を考える。 $m$  個の定点  $a_1, a_2, \dots, a_m$  はそれぞれ、 $a_k = {}^t(a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})$   
 $f(x) = \sum_{k=1}^m \{(x_1 - a_{k,1})^2 + (x_2 - a_{k,2})^2 + \dots + (x_n - a_{k,n})^2\}$  を他の  $x_j$  成分を固定して、 $x$  の第  $i$  座標  $x_i$  だけの関数と考えれば、最小点  $x$  で導関数が 0 となるので

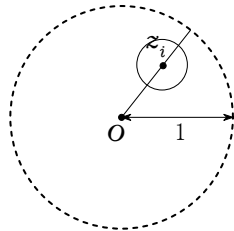
$$\sum_{k=1}^m 2(x_i - a_{k,i}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \rightarrow \sum_{k=1}^m (x_i - a_{k,i}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

となる。つまり、 $mx_i = \sum_{k=1}^m a_{k,i}$  なので  $mx = \sum_{k=1}^m a_k$  となり、 $x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k$  となる。

**(P.70 例11)**

$$|z_i| + \frac{1 - |z_i|}{2} = \frac{1 + |z_i|}{2}$$

$$\leq \frac{1+r}{2} < \frac{2}{2} = 1 \quad (1 \leq i \leq m)$$



**(P.71 定理7.4の証明)**

ここで、一般に

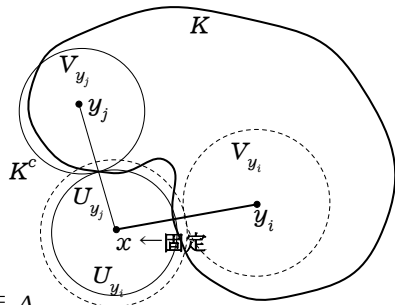
$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

であるが、ここでは  $\subset$  を証明する。

$$\forall x \in (B \cup C) \cap A$$

$$\rightarrow x \in (B \cup C) \text{ かつ } x \in A$$

$$\rightarrow (x \in B \text{ または } x \in C) \text{ かつ } x \in A$$



$\rightarrow (x \in B \text{ かつ } x \in A)$  または  $(x \in C \text{ かつ } x \in A) \rightarrow x \in (B \cap A) \cup (C \cap A)$

$U = \bigcap_{i=1}^m U_{y_i}$  とした場合、 $U$  は  $x$  を含む開集合であり、 $K \subset \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}$  なので

$$K \cap U \subset \left( \bigcup_{i=1}^m V_{y_i} \right) \cap U \subset \bigcup_{i=1}^m (V_{y_i} \cap U) \subset \bigcup_{i=1}^m (V_{y_i} \cap U_{y_i}) = \emptyset$$

$K \cap U = \emptyset$  つまり  $U \subset K^c$  となる。なぜなら

$$\forall z \in U \rightarrow K \cap U = \emptyset \text{ なので } z \notin K \rightarrow z \in K^c$$

$2^n$  個の小区間の内の少なくとも一つと

$K$  の共通部分は、有限個の  $U_\lambda$  では

被覆されない。そのような小区間がある。

もしないならば、すべての小区間と  $K$  の

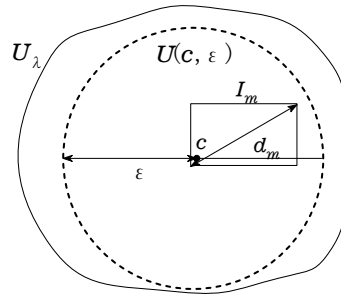
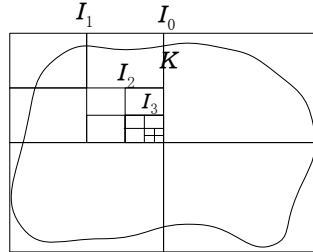
共通部分が有限個の  $U_\lambda$  で被覆される

ことになってしまい、 $K = K \cap I_0$  自身も有限個の  $U_\lambda$  で被覆できることになる。しかし、あつたとしても  $2^n$  個以下、つまり有限個であることを忘れてはいけない。

(7.7) の  $I_m \subset U(c, \varepsilon)$  については

$c \in I_m$  なので、 $d_m < \varepsilon$  ならば右図の

ようにすることができる。



### (P.74 中間値の定理)

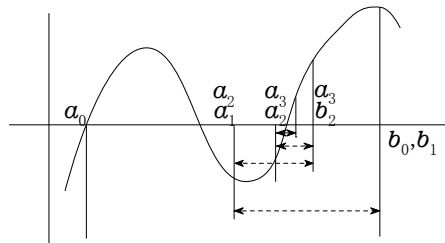
$f(a) = r$  ならば  $c = a \in I$  と

すればよい。なので、 $f(a) < r$

同様にして、 $r < f(b)$  としてかま

わないので、 $f(a) < r < f(b)$  と

考えることにする。



したがって、 $g(a) = f(a) - r < 0$  となり  $g(b) = f(b) - r > 0$  となる。

帰納的に定義される  $I_n = [a_n, b_n]$  に対し図中の  $\leftrightarrow$  の中に  $c$  が閉じ込められていくわけである。

また、 $I_n$  の作り方であるが、 $f(c_n) > 0$  のとき  $c_n$  を右端にするのは  $b_n$  と置き換えるため、 $f(c_n) \leq 0$  のとき  $c_n$  を左端にするのは  $a_n$  と置き換えるためである。

証明の後半は、まず、 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$  で存在がわかり、 $f$  の連続性から

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$  となり、 $f(c) \leq 0 \leq f(c)$  なので、 $f(c) = 0$  を得ることができる流れである。

### (P.75 定理8.1系3)

$\alpha < \gamma < \beta$  の不等号  $\leq$  ではないことに注意。また、 $f$  が連続であることから、 $\gamma - \alpha = \varepsilon$  とすれば、 $x$  を十分に  $a$  に近づければ  $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

$$\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$$

$$\alpha - (\gamma - \alpha) < f(x) < \alpha + \gamma - \alpha \rightarrow 2\alpha - \gamma < f(x) < \gamma$$

よって、 $f(x) < \gamma$  とすることができる。

同様に、 $\beta - \gamma = \varepsilon$  とすれば、 $y$  を十分に  $b$  に近づければ  $|f(y) - \beta| < \varepsilon$

$$\beta - \varepsilon < f(y) < \beta + \varepsilon$$

$$\beta - (\beta - \gamma) < f(y) < \beta + \beta - \gamma \rightarrow \gamma < f(y) < 2\beta - \gamma$$

### (P.77 定理8.2)

$x \in A \subset U$  ならば、 $U$  は開集合なので、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して、 $U(x, \varepsilon) \subset U$  とすることができる。ここで、任意の  $y \in U(x, \varepsilon)$  は  $U(x, \varepsilon)$  内で  $\overline{xy}$  で結ぶことができるので  $y \in A$  となり、 $U(x, \varepsilon) \subset A$ 、つまり  $A$  は開集合となる。

$x \in B \subset U$  ならば、 $U$  は開集合なので、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して、 $U(x, \varepsilon) \subset U$  とすることができる。任意の  $y \in U(x, \varepsilon)$  は  $U(x, \varepsilon)$  内で  $\overline{xy}$  で結ぶことができるので  $y \in B$  となり、 $U(x, \varepsilon) \subset B$ 、つまり  $B$  は開集合となる。

$B = \emptyset$  については、もし  $B \neq \emptyset$  ならば  $U = A + B$  なので空でない開集合の直和となってしまう。したがって  $B = \emptyset$  しかない。

(8.3) について  $f([\alpha, \alpha + \delta)) \subset A$ 、 $\gamma$  は  $K$  の上限なので  $\alpha + \frac{\delta}{2} \leq \gamma$  よって  $\alpha < \gamma$  となる。 $f((\beta - \delta, \beta]) \subset B$ 、ここで、 $\gamma > \beta - \delta$  ならば命題1.3から  $x > \beta - \delta$ 、 $x \in K$  が存在し、 $f(x) \in A$  となり  $A \cap B = \emptyset$  に反する。よって  $\gamma \leq \beta - \delta$  である。ゆえに  $\gamma < \beta$  となる。

(i)、(ii) について

$f(\gamma) \in A$  ならば、 $A$  は開集合なので、ある  $\varepsilon > 0$  があって、 $U(f(\gamma), \varepsilon) \subset A$  とすることができる。また、 $f$  は  $\gamma$  で連続なので、その  $\varepsilon$  に対して  $\varepsilon_1 > 0$  をとれば  $f(U(\gamma, \varepsilon_1)) \subset U(f(\gamma), \varepsilon) \subset A$

(ii) も同じ論法である。